

DIE ELEKTRISCHEN KRÄFTE.

DARLEGUNG UND GENAUERE BETRACHTUNG

DER VON

HERVORRAGENDEN PHYSIKERN

ENTWICKELTEN

MATHEMATISCHEN THEORIEEN.

VON

Dr. CARL NEUMANN,

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG. KGL. SÄCHS. GEHEIMER HOFRATH. RITTER I. CLASSE DES KGL. SÄCHS. VERDIENSTORDENS. RITTER DES KGL. PREUSS. ORDENS POUR LE MÉRITE. ORD. MITGLIED DER KGL. SÄCHS. GESELLSCH. DER WISSENSCH. AUSWÄRTIGES MITGLIED DER KGL. SOCIETÄT DER WISSENSCH. ZU GÖTTINGEN. CORRESPOND. MITGLIED DER KGL. AKADEMIE DER WISSENSCH. ZU BERLIN UND DER KGL. AKADEMIE DER WISSENSCH. ZU MÜNCHEN. MITGLIED DES ISTITUTO LOMBARDO UND DER AKADEMIE ZU BOLOGNA. MITGLIED DER REGIA LYNCEORUM ACADEMIA ZU ROM. UNO DEI XII. S. S. DELLA SOCIETA ITALIANA DELLE SCIENZE.

ZWEITER THEIL.

UEBER DIE VON HERMANN VON HELMHOLTZ IN SEINEN ÄLTEREN UND IN SEINEN NEUEREN ARBEITEN ANGESTELLTEN UNTERSUCHUNGEN.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898.

Einleitung*).

Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem. Omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae. Iam illa certo temporis momento, divina quadam necessitate coacta, emerget.

C. G. J. Jacobi.

Unsere heutigen Kenntnisse über die Bewegung und das Gleichgewicht *ponderabler Massen* verdanken wir den tiefer und tiefer eindringenden Arbeiten eines Aristoteles**), Archimedes, Galilei, Kepler, Descartes, Newton, Bernoulli, Euler, Lagrange, u. A., verdanken wir also Arbeiten, die über mehr als *zwei Jahrtausende* sich hinerstrecken; — während andrerseits die Versuche, die Principien der *elektrischen und magnetischen Erscheinungen* zu ergründen, erst mit Franklin, Aepinus und Coulomb begonnen haben, also noch nicht einmal über *zwei Jahrhunderte* sich ausdehnen.

Demgemäss kann es nicht Wunder nehmen, dass diese letztern Versuche bis jetzt als *höchst unvollkommen*, als *ganz provisorisch* zu bezeichnen sind. Was bedeuten zwei Jahrhunderte gegenüber zwei Jahrtausenden, namentlich wenn man beachtet, dass es sich hier bei den elektrischen und magnetischen Phänomenen um Aufgaben handelt, die ohne allen Zweifel sehr viel schwieriger und complicirter sind, und sehr viel tiefer greifen, als jene früheren Aufgaben, die bei den ponderablen Massen vorlagen.

---

*) Durch diese Einleitung beabsichtigt der Verf. nicht nur einen allgemeinen Ueberblick zu geben über den Inhalt des vorliegenden Werkes, sondern den Leser zugleich auch bekannt zu machen mit den in diesem Werk angewendeten Bezeichnungen und Ausdrucksweisen.

**) Dass *Aristoteles* in der Mechanik bereits bedeutende Kenntnisse gehabt hat, und sogar schon eine Ahnung besessen hat vom Princip der virtuellen Verrückungen, geht aus gewissen Bemerkungen Fourier's deutlich hervor. [Vgl. Oeuvres de Fourier, Tome 2, 1890, Page 477].



So unvollkommen und provisorisch nun aber alle theoretischen Versuche im Gebiete der Elektrodynamik und des Magnetismus bis jetzt auch sein mögen, so dürfte es doch von Interesse und vielleicht auch von Nutzen sein, diese unvollkommenen provisorischen Versuche in ihren eigentlichen Grundzügen mit möglichster Schärfe zu erfassen. Und dieser Aufgabe ist das vorliegende Werk gewidmet.

Ebenso wie im ersten Theil*) des Werkes die Arbeiten von *Ampère* und *F. Neumann* besprochen sind, ebenso soll hier im zweiten Theil von den *Helmholtz*'schen Arbeiten die Rede sein, welche von jenen sich wesentlich dadurch unterscheiden, dass Helmholtz das Ampère'sche Gesetz für eine blosse Hypothese erklärt, der man nicht das mindeste Zutrauen zu schenken habe.

Uebrigens handelt es sich hier weniger um eine Reproduction der Helmholtz'schen Arbeiten, als vielmehr um die Aufgabe, das ganze Gebiet der Elektrodynamik und des Magnetismus auf möglichst geradlinigen Bahnen in denjenigen beiden Richtungen zu durchwandern, welche in den *älteren* und in den *neueren* Helmholtz'schen Arbeiten sich ausprägen. Dass diese beiden Richtungen von einander ausserordentlich verschieden sind, ist allgemein bekannt.

Die *älteren* Helmholtz'schen Arbeiten (1870—1875) wurzeln in den allgemeinen Vorstellungen der *Newton'schen Gravitationstheorie*, namentlich in dem Princip der unvermittelten Fernwirkungen.

Die *neueren* Helmholtz'schen Arbeiten hingegen (1892—1894), welche den Untersuchungen von Faraday, Maxwell und Hertz sich anschliessen, besitzen in ihren allgemeinen Grundzügen eine gewisse Aehnlichkeit mit der *Fourier'schen Wärmetheorie*. Sie beruhen, ebenso wie diese, auf der Vorstellung, dass die eigentlichen Ursachen der in irgend einem Punkt des Weltraumes stattfindenden Veränderungen in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punktes zu suchen seien.

Dieser Dualismus in den Helmholtz'schen Arbeiten dürfte seinen tieferen Grund haben. Um näher hierauf einzugehen, sei zunächst daran erinnert, dass durch Elektricität sowohl Aenderungen in der Gravitation der ponderablen Massen**), wie auch Temperatur- und

---

*) Jener erste Theil ist *vor 25 Jahren* erschienen. Und es wird daher wohl zu entschuldigen sein, dass der gegenwärtige zweite Theil, sowohl seinem Inhalt, wie auch seinem Titel nach, nicht ganz conform ist mit dem damals aufgestelltem Programm. Näheres über die Gründe zu dieser Abweichung findet man zu Ende meines Werkes, auf Seite 462.

**) Man gestatte mir diese Ausdrucksweise. In der gewöhnlichen Terminologie würde zu sagen sein, dass die Newton'sche Gravitationskraft durch den Einfluss der Elektricität um gewisse Zusatzkräfte (die sogenannten ponderomoto-

Wärmeänderungen der ponderablen Massen erzeugt werden können. Demgemäss wird man die Elektricität, wenn vielleicht auch nicht als den eigentlichen Urquell von Gravitation und Wärme, so doch jedenfalls als ein Agens anzusehen haben, welches einerseits zur Gravitation, wie auch andrerseits zur Wärme in engster Beziehung steht.

Wenn man also die wahren Principien der elektrischen Erscheinungen zu erforschen bestrebt ist, so handelt es sich dabei in letzter Instanz um die Erforschung jener ***universalen Principien****, durch welche die elektrischen Erscheinungen mit denen der Gravitation und denen der Wärme**) *zu einem einheitlichen Ganzen sich verbinden, — um die Erforschung jener universalen Principien, von denen wir ein paar schwache kümmerliche Reflexe vor uns zu haben glauben einerseits in den Principien der Newton'schen Gravitationstheorie und andrerseits in den Principien der Fourier'schen Wärmetheorie.*

Angesichts dieser Sachlage erscheint es aber fast selbstverständlich, dass man bei Erforschung jener universalen Principien sowohl von den Gedanken Newton's, wie auch von den Gedanken Fourier's sich leiten lässt. Und dem entsprechen jene beiden Richtungen oder Methoden, die in den älteren und neueren Helmholtz'schen Arbeiten uns entgegentreten.

Von diesen beiderlei Methoden ist daher nach meiner Ansicht die eine ebenso beachtenswerth wie die andere. Und es handelt sich also darum, *beide* Methoden sorgfältig zu studiren, und *beide* Methoden soweit als irgend möglich zu vervollständigen, — in der Hoffnung, dass es uns im Laufe der Zeit allmählich gelingen werde, diese beiden Methoden mit einander zu verschmelzen, und in solcher Weise jenen in weiter Ferne uns vorschwebenden universalen Principien, wenn auch nur einige Handbreit, näher zu kommen. Im vorliegenden Theil meines Werkes soll successive zuerst die *eine* Methode (die der älteren Helmholtz'schen Arbeiten), und sodann die *andre* Methode (die der neueren Helmholtz'schen Arbeiten) in Betracht gezogen werden.

---

rischen Kräfte elektrischen Ursprungs) vermehrt werden kann. Aber das ist doch schliesslich nur unsere *augenblickliche* Terminologie, die möglicherweise im Laufe der Zeit sich wesentlich verschieben könnte.

*) Gravitation und Wärme sollen hier nur als Schlagworte dienen, hinter denen sich noch mancherlei Andres verbirgt. Statt Gravitation könnte man sagen: *Gravitation, Elasticität und Capillarität.* Und andrerseits könnte man statt Wärme sagen: *Wärme und Licht.*

Untersuchungen im Anschluss an die älteren Helmholtz'schen Arbeiten (1870—1875).

Man denke sich in einem starren Körper irgend welche elektrische Bewegungen, und construire irgendwo im Innern des Körpers ein kleines Flächenelement $D\pi$, senkrecht gegen die daselbst vorhandene elektrische Bewegung. Bezeichnet man nun die durch dieses Element $D\pi$ während der Zeit dt hindurchfliessende Elektricitätsmenge mit

$$iD\pi\,dt, \tag{1.}$$

so pflegt der Factor i die an jener Stelle vorhandene *Strömung* genannt zu werden. Diese Strömung i wird offenbar geometrisch darstellbar sein durch einen sogenannten Vector, d. i. durch eine von $D\pi$ ausgehende Linie von bestimmter Richtung und Länge. Die den Coordinatenaxen entsprechenden Componenten u, v, w dieses Vectors i werden alsdann kurzweg die Strömungscomponenten zu nennen sein. Ueberdies pflegt man, was den Ausdruck (1.) betrifft, das Product

$$iD\pi = J \tag{2.}$$

zu setzen, und dieses J sodann zu bezeichnen als die dem Element $D\pi$ zugehörige *Stromstärke*, oder (genauer ausgedrückt) als die Stärke des durch $D\pi$ fliessenden Stromes*).

Wesentlich zu unterscheiden ist zwischen *linearen* und *körperlichen* Stromelementen. Ein *lineares* Stromelement ist das Element eines linearen Leiters, derselbe durchflossen gedacht von einem elektrischen Strom, dessen Stärke im Laufe der Zeit in beliebiger Weise sich ändern kann. Will man hingegen ein *körperliches* Stromelement vor Augen haben, so hat man innerhalb eines beliebig ausgedehnten Körpers M irgend ein ponderables Massenelement DM zu construiren, und zugleich vorauszusetzen, dass im Innenraum des Körpers M beliebige und im Laufe der Zeit beliebig sich ändernde elektrische Strömungen vorhanden seien. Jenes von diesen Strömungen bald in dieser bald in jener Richtung durchflossene Massenelement DM ist alsdann ein sogenanntes körperliches Stromelement.

Während also die elektrische Strömung eines *linearen* Elementes der geometrischen Axe des Elementes beständig parallel bleibt, also

*) Es soll also sein:

J = *Strom oder Stromstärke*,

andrerseits aber:

i = *Strömung oder Strömungsstärke;*

wobei noch bemerkt sein mag, dass dieses i von Kirchhoff als *Stromdichtigkeit* bezeichnet wird.



mit Bezug auf die ponderable Masse fortdauernd ein und dieselbe Orientirung behält, wird andrerseits die elektrische Strömung eines *körperlichen* Elementes ihre Richtung im Innern der ponderablen Masse im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick wechseln. Folglich sind lineare und körperliche Stromelemente ganz *heterogene* Dinge. Und in Anbetracht dieser Heterogenität erscheint es in vielen Fällen*) schlechterdings unmöglich, von den Elementen der einen Art auf solche der andern Art zu schliessen, und etwa Sätze oder Formeln, die für lineare Elemente gefunden sind, ohne Weiteres auf körperliche Elemente übertragen zu wollen.

Wenn ich nun, um trotzdem derartige Uebertragungen zu ermöglichen, annehmen werde, dass ein körperliches Stromelement, hinsichtlich der von ihm ausgehenden ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen, ersetzbar sei durch seine rechtwinkligen Componenten, so dürfte dies wohl eine althergebrachte und allgemein acceptirte Vorstellung sein. Neu dürfte dabei nur sein, dass ich diese Vorstellung nicht stillschweigend, sondern express und in ganz bestimmter Formulirung als eine besondere *Annahme* einführe. Und zwar bezeichne ich diese Annahme, im Anschluss an meine früheren Arbeiten, als die Hypothese Delta. Sie lautet folgendermassen:

Hypothese Delta. — Ein körperliches Stromelement mit der ponderablen Masse DM und der elektrischen Strömung i mag kurzweg durch das Symbol iDM angedeutet sein. Auch sei vorausgesetzt, dass der betrachtete Körper M (von welchem DM ein Element ist) starr sei.

Man denke sich nun die Strömung i in drei Componenten u, v, w zerlegt nach drei auf einander senkrechten, mit der ponderablen Masse DM fest verbundenen Axen x, y, z. Alsdann soll angenommen werden, dass das Element iDM, was die zwischen ihm und irgend welchen andern Objecten stattfindenden ponderomotorischen und elektromotorischen Einwirkungen betrifft, völlig äquivalent sei mit der Gesammtheit der drei idealen Stromelemente uDM, vDM, wDM. Dabei ist z. B. unter dem idealen Element uDM dasjenige zu verstehen, in welches iDM sich verwandeln würde, falls man i durch u ersetzen wollte. [Vgl. Seite 131].

Dass, bei dieser Hypothese, das Axensystem $[x, y, z]$ mit der ponderablen Masse DM *fest verbunden* zu denken sei, wird von uns durch eine gewisse Einrahmung, nämlich durch das Symbol:

$$\boxed{DM[x,y,z]} \tag{3.}$$

*) nämlich in solchen Fällen, wo der elektrische Strömungszustand des Elementes nicht für einen einzelnen Zeit*punkt,* sondern für ein ganzes Zeit*element* in Betracht kommt.



angedeutet werden. Ueberhaupt wird im vorliegenden Werk, sobald von irgend welchen *fest mit einander verbundenen Objecten* $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ die Rede ist, das Symbol:

$$\boxed{\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots} \tag{4.}$$

benutzt werden. [Vgl. Seite 75].

Sind die in einem Körper vorhandenen elektrischen Bewegungen *ganz beliebig*, so werden u, v, w ganz beliebige Functionen des Ortes und der Zeit, d. i. ganz beliebige Functionen von x, y, z, t sein. Auch werden alsdann die elektrischen Stromcurven und Stromfäden ganz beliebige Gestalten besitzen, und von Augenblick zu Augenblick in ganz beliebiger Weise sich ändern.

Hin und wieder aber wird der Fall zu betrachten sein, dass für jeden innern Punkt des Körpers die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5.}$$

und überdies für jeden Oberflächenpunkt des Körpers die Gleichung

$$u\cos(n, x) + v\cos(n, y) + w\cos(n, z) = 0 \tag{6.}$$

erfüllt ist; hier soll n die auf der Oberfläche errichtete Normale vorstellen. Alsdann wird jeder einzelne elektrische Stromfaden [wie auf Grund der Gleichungen (5.), (6.) sich ergiebt] *in sich zurücklaufen*, also einen *Ring* bilden. Kurz, der ganze Körper wird alsdann zu bezeichnen sein als ein System von lauter unendlich dünnen, im Laufe der Zeit sich verschiebenden Stromringen. Auch wird alsdann die Stromstärke eines jeden solchen Ringes eine blosse Function der Zeit sein, nämlich in jedem Augenblick an allen Stellen des Ringes ein und denselben Werth haben. [Vgl. Seite 235—237].

Stationär wird man offenbar einen derartigen Strömungszustand unmöglich nennen dürfen. Aber jene Ringe selber sind ein charakteristisches Merkmal des Zustandes. Demgemäss mag es gestattet sein, denselben als *annularen Zustand*, und die denselben definirenden Gleichungen (5.), (6.) als die *annularen Bedingungen* zu bezeichnen. Erstreckt sich übrigens der gegebene Körper nach allen Seiten ins Unendliche, und sind die u, v, w im Unendlichen überall $= 0$, so reduciren sich offenbar die annularen Bedingungen auf die *eine* Gleichung (5.).

Beiläufig seien hier noch einige Formeln speciell für *lineare* Stromelemente notirt. Bezeichnet man Länge und Querschnitt eines linearen Stromelementes mit Ds und $D\pi$, so wird das Volumen $D\tau$ des Elementes den Werth haben:

$$D\tau = Ds\,D\pi. \tag{7.}$$

Aus (7.) und (2.) ergiebt sich nun, durch Elimination von $D\pi$, die Formel:

$$(8.)\qquad i\,D\tau = J\,Ds.$$

Multiplicirt man endlich diese Formel (8.) der Reihe nach mit den Richtungscosinus A, B, C des Linienelementes Ds, so erhält man sofort:

$$(9.)\qquad u\,D\tau = AJ\,Ds, \quad v\,D\tau = BJ\,Ds, \quad w\,D\tau = CJ\,Ds,$$

wo $u = Ai$, $v = Bi$, $w = Ci$ die Componenten der Strömung i vorstellen.

Es erscheint angemessen, hier sogleich gewisse schwierige Begriffe, nämlich die Begriffe der *convectiven* und *endogenen* Aenderungen zur Sprache zu bringen. Ist ein Körper M in Bezug auf ein *ruhendes**) rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$ in irgend welcher Bewegung begriffen, während gleichzeitig im Innern des Körpers irgend welche von Augenblick zu Augenblick sich ändernde elektrische Strömungen vorhanden sind, und bezeichnet man irgend ein Massenelement des Körpers M mit DM, so wird die den elektrischen Strömungszustand dieses Elementes DM im Augenblick t geometrisch darstellende gerade Linie $i(u, v, w)$ während des nächstfolgenden Zeitelementes dt im Ganzen *zwei* Aenderungen erleiden, nämlich erstens eine gewisse *convective* Aenderung, die von solcher Art ist, als wäre sie mit der ponderablen Masse des Körpers fest verbunden, zweitens aber auch eine gewisse *endogene* Aenderung, d. i. eine Aenderung im Innern der ponderablen Masse. Dementsprechend zerfallen die Zuwüchse du, dv, dw, welche die Componenten u, v, w der Linie i während der Zeit dt erfahren, in zwei Theile:

$$(10.)\qquad du = \delta u + \Delta u, \quad dv = \delta v + \Delta v, \quad dw = \delta w + \Delta w,$$

wo $\delta u, \delta v, \delta w$ die convectiven, und $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ die endogenen Theile dieser Zuwüchse vorstellen sollen. [Vgl. Seite 124—128].

Sehr einfach und bequem sind diese Begriffe und Unterscheidungen, so lange der Körper M *starr* ist. Schwierigkeiten aber treten ein, sobald man sich vorstellt, die ponderable Masse des Körpers M befinde sich in irgend welchen Dilatations- oder Contractions-Bewegungen. Allerdings kann man in solchem Falle im Elemente DM diejenigen ponderablen Massenpunkte $m, m_1, m_2, \ldots$ markiren, durch welche die

*) Es braucht das System $[x, y, z]$ bei diesen Betrachtungen durchaus nicht als ein *absolut* ruhendes gedacht zu werden. Wenn wir dasselbe überhaupt als ein ruhendes bezeichnet haben, so soll dadurch nur angedeutet sein, dass alle ponderablen und elektrischen Bewegungen auf dieses System zu beziehen sind.



Linie i im Augenblick t hindurchgeht, und sodann festsetzen, die convective Aenderung der Linie i solle darin bestehen, dass sie von jenen Punkten $m, m_1, m_2, \ldots$ mit fortgetragen werde. Durch die convective Aenderung würde alsdann die Linie i während der Zeit dt in eine Linie i' von andrer Lage und Richtung sich verwandeln. Dabei würde die Länge der Linie ungeändert bleiben, also $i = i'$ sein.

Dass eine derartige Vorstellung über die convective Aenderung *erlaubt* sei, wird man schwerlich bestreiten dürfen. Doch ist sie *keineswegs nothwendig*. Auch ist sie nicht in Einklang mit der Helmholtz-schen Anschauungsweise.

Will man in die Helmholtz'sche Anschauungsweise sich hineinversetzen, so hat man im Augenblick t im Elemente DM einen unendlich dünnen *Stromfaden* zu construiren, sodann im Augenblick $t + dt$ (in welchem die räumliche Lage des Elementes DM, sowie auch die Configuration seiner ponderablen Masse bereits eine etwas andere sein wird) denjenigen Faden zu construiren, dessen cylindrische Oberfläche durch ebendieselben ponderablen Massenpunkte gebildet wird, wie die jenes ersten Fadens, und endlich unter der convectiven Aenderung jenes ursprünglich construirten Stromfadens diejenige zu verstehen, vermöge welcher derselbe während der Zeit dt in diesen zweiten Faden sich verwandelt, ohne dass dabei die *Stromstärke* des Fadens irgend welche Aenderung erlitte. Bei dieser Helmholtz'schen Anschauungsweise wird daher nicht mehr $i = i'$, sondern $qi = q'i'$ sein, wo q und q' die senkrechten Querschnitte der beiden Fäden bezeichnen. [Vgl. Seite 255 (4.)].

Uebrigens bezieht sich das soeben Gesagte nur auf die *älteren* Helmholtz'schen Arbeiten (1874). Denn bei den *neueren* Helmholtz-schen Arbeiten (1892) sind die Vorstellungen über die convective Aenderung der elektrischen Strömung wiederum etwas *andere*. [Man vgl. die Bemerkungen auf Seite 369 und auf Seite 374].

Um die Hauptsache hervorzuheben: Bei sich dilatirenden oder contrahirenden Körpern wird die Definition der convectiven Aenderung der Strömung $i(u, v, w)$ mit einer gewissen Willkür verbunden sein. [*Vgl. die Bemerkung Seite 245*].

Denkt man sich indessen die Definition dieser convectiven Aenderung so oder so, in irgend welcher Art, mit voller Genauigkeit fixirt, so wird dadurch der Begriff der endogenen Aenderung schon mitbestimmt sein. Denn wir setzen ein für alle Mal fest, dass die convective und die endogene Aenderung zu einander complementar sein sollen in Bezug auf die wirkliche Aenderung, dass also stets $d = \delta + \Delta$ sein soll, was z. B. auch in Einklang ist mit den Formeln (10.).

Uebrigens wird die Bedeutung dieser Charakteristiken δ, Δ, sobald sie für die Strömung $i(u, v, w)$ mit voller Genauigkeit fixirt ist, leicht weiter zu verallgemeinern sein. Man denke sich z. B. ein beliebiges System von Körpern, die in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Strömungen stattfinden. Ferner denke man sich eine Function f, die abhängig ist von der augenblicklichen Verfassung des ganzen Systems, d. i. von der augenblicklichen Lage der ponderablen Massen, wie auch von den augenblicklich in diesen ponderablen Massen vorhandenen elektrischen Strömungen. Alsdann wird man offenbar den Zuwachs df, den diese Function f während eines Zeitelementes dt erfährt, ebenfalls in zwei Theile zerlegen können:

$$df = \delta f + \Delta f; \tag{10a.}$$

der Art, dass δf den convectiven, und Δf den endogenen Theil vorstellt. [Vgl. Seite 128].

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen müssen wir jetzt unser eigentliches Ziel näher ins Auge fassen. Wollen wir, wie das in den älteren Helmholtz'schen Arbeiten (1870—1875) geschehen ist, im Gebiete der Elektrodynamik am Newton'schen Princip der Fernwirkungen festhalten, so handelt es sich um die Auffindung derjenigen ponderomotorischen und elektromotorischen Fernwirkungen, welche zwei elektrische Stromelemente gegenseitig aufeinander ausüben.

Zu der Zeit, als ich den *ersten* Theil dieses Werkes schrieb, herrschte noch der Glaube an das *Ampère'sche Gesetz*. Demgemäss hatte ich damals dieses Gesetz ohne Weiteres acceptirt, und dasselbe zu einem wichtigen Grundstein meiner damaligen Untersuchungen gemacht. Nachdem inzwischen aber dieses Gesetz von Helmholtz, und auch von andern Autoren, für eine in der Luft schwebende Hypothese erklärt worden ist, sehe ich mich jetzt beim *zweiten* Theil meines Werkes veranlasst, das Ampère'sche Gesetz ganz fallen zu lassen; so dass also meine gegenwärtige Aufgabe eine sehr viel schwierigere sein wird, als die damalige. Denn es sind jetzt *beide* Elementargesetze, das elektromotorische und ebenso auch das ponderomotorische, als unbekannt anzusehen.

So z. B. wird als völlig unbekannt anzusehen sein, ob die von zwei Stromelementen aufeinander ausgeübten elektromotorischen und ponderomotorischen Wirkungen in die Verbindungslinie der beiden Elemente fallen, oder ob sie vielleicht irgend welche andere Richtungen besitzen. Auch liegt die Möglichkeit vor, dass die ponderomotorischen Wirkungen nicht blos in gewöhnlichen Kräften, sondern daneben viel-

leicht auch noch in irgend welchen Drehungsmomenten bestehen könnten, mit denen die beiden Elemente gegenseitig einander zu drehen bestrebt sind*).

Wie nun aber auch diese ponderomotorischen Wirkungen beschaffen sein mögen, stets werden sie im Laufe der Zeit irgend welche *Arbeiten* verrichten. Diese *ponderomotorischen Arbeiten*, welche zwei elektrische Stromelemente DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausüben, mögen mit

$$(11.)\qquad (dL)_{DM}^{DM_1} \quad \text{und} \quad (dL)_{DM_1}^{DM}$$

bezeichnet werden; der Art, dass das erste Symbol die von DM_1 auf DM, und das zweite die umgekehrt von DM auf DM_1 ausgeübte Arbeit andeutet. Demgemäss wird z. B. das erste Symbol anzusehen sein als eine Abbreviatur für folgenden analytischen Ausdruck:

$$(12.)\qquad (dL)_{DM}^{DM_1} = (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (\Delta^x\,d\mathfrak{a} + \Delta^y\,d\mathfrak{b} + \Delta^z\,d\mathfrak{c}).$$

Hier bezeichnen X, Y, Z und Δ^x, Δ^y, Δ^z die von DM_1 auf DM ausgeübten (einstweilen noch völlig unbekannten) ponderomotorischen Kräfte und Drehungsmomente. Ferner bezeichnen dx, dy, dz die den Coordinatenaxen parallelen Verschiebungen des Elementes DM während der Zeit dt. Endlich bezeichnen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die kleinen Winkel, um welche das Element DM während der Zeit dt um jene Axen sich dreht. [Vgl. Seite 62 (14α.)].

Desgleichen wird man von den *elektromotorischen Arbeiten*

$$(13.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} \quad \text{und} \quad (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}$$

sprechen können, welche die beiden Stromelemente DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausüben. Und dabei wird alsdann z. B. unter dem ersten dieser beiden Symbole folgender Ausdruck zu verstehen sein:

$$(14.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau\,dt.$$

Hier ist $D\tau$ das Volumen des Elementes DM. Ferner bezeichnen u, v, w die Componenten der in DM vorhandenen elektrischen Strömung. Endlich bezeichnen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die (einstweilen noch völlig unbekannten) elektromotorischen Kräfte, welche das Element DM_1 in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorbringt. [Vgl. Seite 63—65; auf Seite 65 ist ein Druckfehler, in der dortigen Formel (7α.) ist nämlich $\mathfrak{L}$ statt L zu setzen]. Bringt man die allgemeine Formel (14.) auf den speciellen Fall in Anwendung, dass DM ein *lineares* Stromelement

*) Ebenso wie z. B. zwei unendlich kleine Magnete nicht nur gewöhnliche Kräfte, sondern daneben auch noch gewisse Drehungsmomente aufeinander ausüben.

ist, und substituirt man dabei für $uD\tau$, $vD\tau$, $wD\tau$ die diesem besondern Fall entsprechenden Werthe (9.), so erhält man sofort:

$$(15.) \qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C)JDs\,dt;$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(16.) \qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = \mathfrak{E}JDs\,dt,$$

wo alsdann $\mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C$ die der Richtung (A, B, C) des Elementes Ds entsprechende Componente der elektromotorischen Kraft ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) vorstellt.

Unsere eigentliche Aufgabe besteht nun in der näheren Bestimmung der Ausdrücke (12.) *und* (14.), *d. i. in der näheren Bestimmung der in diesen Ausdrücken enthaltenen Kräfte und Drehungsmomente:* X, Y, Z, Δ^x, Δ^y, Δ^z, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Zur Lösung dieser Aufgabe werden wir Gebrauch machen von drei allgemeinen Sätzen (A.), (B.), (C.), nämlich von einem gewissen Helmholtz'schen Princip und ferner von zwei allgemeinen Axiomen über die elektromotorischen Kräfte.

(A.) *Das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials. — Auf Grund des allgemeinen Princips der Erhaltung der Kraft ist Helmholtz zu der Ansicht gelangt, dass die Summe aller während der Zeit dt von zwei Stromelementen aufeinander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ein vollständiges Differential sein müsse.* Oder mit andern Worten: Helmholtz ist zu der Ansicht gelangt, dass die für irgend ein Zeitelement dt gebildete Summe

$$(17.) \qquad (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM} + (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}$$

identisch sein müsse mit demjenigen Zuwachs, den eine gewisse noch unbekannte, aber nur von der augenblicklichen Lage und dem augenblicklichen Zustande der beiden Elemente abhängende Function während der Zeit dt erfährt. Dieses Princip, dessen Zulässigkeit oder Nothwendigkeit hier nicht weiter discutirt werden soll, zieht sich wie ein rother Faden durch alle älteren Arbeiten von Helmholtz hindurch. Jedenfalls empfiehlt sich dasselbe durch seine grosse Einfachheit. [Vgl. Seite 110—112].

(B.) *Erstes allgemeines Axiom über die elektromotorischen Kräfte. Dasselbe lautet: Die durch einen gegebenen Inducenten an irgend einer Stelle des inducirten Körpers hervorgebrachte elektromotorische Kraft ist von der Grösse, Gestalt und Beschaffenheit dieses Körpers, sowie auch von seinem augenblicklichen Zustande völlig unabhängig.* [*Vgl. Seite 76*]. Enge verwandt mit diesem ersten Axiom ist ein

(C.) *Zweites allgemeines Axiom über die elektromotorischen Kräfte, welches folgendermassen lautet: Man denke sich als Inducenten*



ein körperliches Stromelement von völlig constant bleibender Beschaffenheit. Alsdann wird die von diesem Stromelement an irgend einer „Stelle" des inducirten Körpers hervorgebrachte elektromotorische Kraft stets $= 0$ *sein, falls man nur voraussetzt, dass die relative Lage dieser „Stelle" zu jenem Stromelement fortdauernd ein und dieselbe bleibt.* Schwerlich wird man dieses zweite Axiom jemals beanstandet haben. Und dennoch leidet dasselbe an einer gewissen innern Unklarheit, insofern, als man nicht weiss, ob unter einer solchen „Stelle" ein unendlich kleines *Element* des inducirten Körpers, oder aber ein blosser *Punkt* desselben zu verstehen sei. In Anbetracht dieser Unsicherheit werden wir beide Auffassungsweisen nebeneinander verfolgen, und dabei die erste als die *elementare*, die zweite als die *punktuelle* bezeichnen. [Vgl. Seite 129, 130].

Zu diesen allgemeinen Stützpunkten (A.), (B.), (C.) werden bei unsern Untersuchungen noch gewisse speciellere Stützpunkte hinzutreten. Diese letztern sollen näher angegeben werden bei Besprechung der einzelnen Abschnitte.

Der erste, zweite und dritte Abschnitt des hier vorliegenden zweiten Theiles meines Werkes enthalten gewisse Präliminarien, nämlich gewisse rein mathematische Sätze, die den berühmten Theoremen von *Stokes* (1854) und *Beltrami* (1871) sich anschliessen, und die, vermöge ihrer grossen Allgemeinheit, wohl auch an und für sich einigermassen beachtenswerth sein dürften. Ueberdies findet man zu Anfang des ersten Abschnitts [Seite 1—4] einige Angaben über das *positive* und *negative* Coordinatensystem und über den Gebrauch des einen oder andern Systems bei Maxwell, Helmholtz, Hertz, Boltzmann und beim Verfasser des vorliegenden Werkes; was bei den betreffenden Formeln zu beachten durchaus nothwendig sein dürfte. Allerdings sind diese Angaben, soweit sie Boltzmann betreffen, einigermassen zweifelhaft [vgl. Seite 404].

Der vierte Abschnitt betrifft die bekannten *F. Neumann'schen Integralgesetze.* Diese beiden Gesetze sind in einfacher Weise angebbar unter Anwendung eines gewissen analytischen Ausdruckes, den man kurzweg das *F. Neumann'sche Potential* nennen kann.

Beide Gesetze beziehen sich auf *geschlossene lineare* elektrische Ströme. Auch ist, falls man innerhalb derjenigen Grenzen bleiben will, innerhalb welcher diese Gesetze von F. Neumann wirklich aufgestellt sind, vorauszusetzen, dass die Stromstärken *blosse Functionen der Zeit* sind, und ferner vorauszusetzen, dass die geschlossenen linearen Leiter, in denen die Ströme dahinfliessen, *inextensibel* seien, abgesehen von einzelnen Gleitstellen. Sind M und M_1 die ponderablen Massen

dieser Leiter, ferner J und J_1 die Stromstärken, so wird das F. Neumann'sche Potential der beiden Stromringe den Werth haben:

$$P = JJ_1 Q, \quad \text{[vgl. Seite 57 (8.)]}, \tag{18.}$$

wo Q einen gewissen Ausdruck vorstellt, der nur noch von der Gestalt und relativen Lage der beiden Ringe abhängt. Gleichzeitig wird alsdann das F. Neumann'sche *ponderomotorische* Integralgesetz lauten:

$$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -JJ_1 dQ, \quad \text{[Seite 61 (10.)]}; \tag{19.}$$

während andrerseits das F. Neumann'sche *elektromotorische* Integralgesetz dargestellt sein wird durch die beiden Formeln:

$$\begin{cases} (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = Jd(J_1 Q), \\ (d\mathfrak{L})_{M_1}^M = J_1 d(JQ), \quad \text{[Seite 67 (15.), (16.)]}. \end{cases} \tag{20.}$$

In diesen Formeln (19.), (20.) stehen linker Hand die der Zeit dt entsprechenden Arbeiten (11.), (13.), nur mit dem Unterschiede, dass gegenwärtig, statt der einzelnen Elemente DM, DM_1, die *ganzen* Ringe M, M_1 in Betracht kommen. Andrerseits sind rechter Hand durch die Charakteristik d die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse der betreffenden Grössen angedeutet.

Diese beiden Integralgesetze sind im Jahre 1870 von Helmholtz auch auf *un*geschlossene Ströme angewendet worden. Wie weit Helmholtz hiezu berechtigt gewesen sei, — darüber sind die Ansichten getheilt. Jedenfalls ist beachtenswerth, dass Helmholtz selber im Jahre 1874 diese Anwendung auf *un*geschlossene Ströme als eine *hypothetische* bezeichnet hat*).

Im fünften Abschnitt gehen wir über zu den einzelnen *Elementen* linearer Ströme. Die ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen, welche zwei solche Elemente während der Zeit dt aufeinander ausüben, können offenbar nur abhängen von der relativen Lage und dem Zustande der beiden Elemente zu Anfang der Zeit dt, und von denjenigen Aenderungen, welche diese Dinge während der Zeit dt erleiden. Die Art und Weise dieser Abhängigkeit aber, auf Grund der schon genannten allgemeinen Sätze (A.), (B.), (C.) und auf Grund der

---

*) Die betreffende Stelle der Helmholtz'schen Auseinandersetzungen [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 712, 713] lautet nämlich, in unsere Bezeichnungsweise übersetzt, der Hauptsache nach folgendermassen:

Die Auffindung der beiden Integralgesetze durch *Gauss* und *F. Neumann* sei als eine der glücklichsten und glänzendsten Errungenschaften der mathematischen Physik anzusehen. Zufolge dieser Gesetze besässen die elektrodynamischen Kräfte gewisse *Eigenschaften*. Diese Eigenschaften auf *un*geschlossene Ströme zu übertragen, sei etwas *Hypothetisches*.



beiden F. Neumann'schen Integralgesetze, näher bestimmen zu wollen, würde ein Ding der Unmöglichkeit sein. Vielmehr bedarf es hiezu noch irgend welcher weiterer Stützpunkte.

Als derartige Stützpunkte werde ich gewisse *Grundeigenschaften* jener Wirkungen benutzen. Diese Grundeigenschaften bestehen im Wesentlichen darin, dass die von zwei Stromelementen während der Zeit dt aufeinander ausgeübten *ponderomotorischen* Einwirkungen mit den Stromstärken der beiden Elemente proportional sind, ferner darin, dass die von dem einen Element auf das andere ausgeübte *elektromotorische* Einwirkung aus zwei Theilen besteht, von denen der eine mit der Stromstärke des einwirkenden Elementes, der andre mit der zeitlichen Aenderung dieser Stromstärke proportional ist; endlich darin, dass jedes solches lineare Stromelement, hinsichtlich der von ihm ausgehenden ponderomotorischen und elektromotorischen Einwirkungen, ersetzbar sei durch seine drei rechtwinkligen Componenten, falls man nur diese Componenten mit dem Elemente selber *starr verbunden*, und die Stromstärken der drei Componenten fortdauernd ebenso gross wie die Stromstärke dieses Elementes sich denkt. [Vgl. Seite 77 und 91].

Dass diese Grundeigenschaften in ihrer gegenwärtigen Formulirung [Seite 77 und 91] mit den Vorstellungen von Helmholtz in vollem Einklang sind, kann keinem Zweifel unterliegen. In der That hat sich Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 711] dahin geäussert, dass die in ähnlicher Weise schon im Jahre 1873 von mir ausgesprochenen Grundeigenschaften nach seinem Erachten — bis auf einen einzigen Punkt — völlig unanfechtbar seien*). Jener einzige Punkt, den Helmholtz damals als anfechtbar bezeichnet hatte, ist aber bei der gegenwärtigen Formulirung

---

*) Wenn Helmholtz bei dieser Gelegenheit meine Untersuchungen als *„sorgfältig und scharfsinnig"* bezeichnet hat [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 711], so gereicht mir das zu um so grösserer Genugthuung, als bekanntlich einige Zeit vorher zwischen Helmholtz und mir über einige Punkte der Elektrodynamik wesentliche Differenzen entstanden waren. Unter Anderm war mir damals von Helmholtz ein gewisser „Rechnungsfehler" vorgeworfen [a. a. O. Seite 671]. Helmholtz hat indessen später selbst (allerdings in etwas eigenthümlicher Weise) eingeräumt, dass dieser Vorwurf *seinerseits* auf einem gewissen *„Irrthum"* beruht habe [a. a. O. Seite 687].

Ich habe durchaus keine Veranlassung, auf die betreffenden Discussionen hier von Neuem zurückzukommen, und möchte nur noch bemerken, dass man eine Zusammenstellung der damals discutirten Fragen in einem Aufsatze findet, der in den Mathematischen Annalen [Bd. 11, Seite 318] erschienen ist, und der alsdann später als besondere Schrift von Neuem gedruckt wurde unter dem Titel: *Einige Notizen hinsichtlich der gegen die Gesetze von Ampère und Weber erhobenen Einwände, Leipzig, bei Teubner, 1877* [*daselbst Seite 321—340*].

dieser Eigenschaften [Seite 77 und 91] *ganz fortgefallen*, nämlich durch die Festsetzung beseitigt worden, dass die rechtwinkligen Componenten des Stromelementes mit dem Elemente selber *starr verbunden* sein sollen. [Vgl. die Bemerkung auf Seite 77].

Mittelst dieser Grundeigenschaften ergeben sich nun für die elektromotorischen und ponderomotorischen Einwirkungen, welche zwei *lineare* Stromelemente aufeinander ausüben, gewisse analytische Ausdrücke [Seite 88 (21.) und Seite 95 (11.)], die aber leider noch mit *eilf* unbekannten Functionen

$$\varkappa,\ \varkappa^*,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \pi,\ \pi^* \quad \text{und} \quad \varrho,\ \varrho^*,\ \varphi,\ \chi \tag{21.}$$

behaftet sind. Uebrigens sind diese eilf Functionen blosse Functionen von r, wo r den gegenseitigen Abstand der betrachteten beiden Stromelemente vorstellt.

Sechster Abschnitt. — Zur näheren Bestimmung der eilf Functionen (21.) werden nun das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials (17.) und die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze (19.), (20.) benutzt. Hiedurch ergeben sich zur Bestimmung dieser *eilf* Functionen im Ganzen *eilf* Gleichungen. Doch sind, wie sich herausstellen wird, diese eilf Gleichungen nicht von einander unabhängig, sondern *zwei* derselben eine Folge der übrigen, — ein Umstand, durch welchen unser Vertrauen zu den Quellen, aus denen die eilf Gleichungen geschöpft sind, wesentlich verstärkt werden dürfte.

Jedenfalls haben wir nun aber in Wirklichkeit zur Bestimmung jener 11 Functionen nicht 11, sondern nur $11 - 2 = 9$ Gleichungen. Mittelst dieser 9 Gleichungen können wir die 11 Functionen allerdings nicht berechnen, wohl aber auf 2 derselben, z. B. auf

$$\nu \quad \text{und} \quad \chi \tag{22.}$$

reduciren. [Vgl. die Formeln Seite 116 (10.), (11.), (12.)]. Bevor wir diese beiden noch fehlenden Functionen ν und χ wirklich zu bestimmen suchen, werden wir zuvörderst

Im siebenten Abschnitt die für *lineare* Stromelemente gefundenen Gesetze und Formeln auf *körperliche* Stromelemente übertragen; wobei uns die schon vorhin [Seite VII] genannte Hypothese Delta wesentlich zu Statten kommen wird.

Achter Abschnitt. — *In seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1870 hat Helmholtz die Annahme miteinfliessen lassen, dass die Fernwirkungen ungeschlossener Ströme eben denselben Potenzen der Entfernung proportional seien, wie die entsprechenden Fernwirkungen geschlossener Ströme.* [*Vgl. Seite 158*]. Unter Anwendung dieser Helmholtz'schen Annahme und unter Anwendung des Princips der Gleich-

heit der Action und Reaction*), werden wir nun jene eilf Functionen (21):

$$(23.) \qquad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varphi,\ \chi,\ \pi,\ \pi^*,\ \varrho,\ \varrho^*,\ \varkappa,\ \varkappa^*$$

fast vollständig bestimmen können, nämlich für dieselben gewisse Werthe [Seite 169, 170] erhalten, die nur noch mit einer einzigen unbekannten Constanten K behaftet sind. Dieses K ersetzen wir übrigens durch den Buchstaben k, der Art, dass

$$(24.) \qquad K = \frac{1+k}{4}$$

sein soll. [Vgl. Seite 170 (55.)].

Die Constante K oder k ist ohne Einfluss auf das *ponderomotorische Elementargesetz*. In der That wird dieses letztere im Laufe unserer Untersuchungen in ganz bestimmter und fertiger Gestalt uns entgegentreten, und zwar als völlig identisch mit dem *Ampère'schen Gesetz;* so dass also in solcher Weise ein vielfach angegriffener Pfeiler des theoretischen Gebäudes der Elektrodynamik durch mühsame Untersuchungen zurückerobert sein dürfte. [Vgl. Seite 168, 169].

Andrerseits aber werden sich, durch Anwendung der für die eilf Functionen (23.) gefundenen Werthe, für das *elektromotorische Elementargesetz* sehr complicirte und mit jener Constanten k behaftete Formeln ergeben. [Vgl. Seite 171 (3.) und Seite 174 (18.)]. Eine *einfache* Gestalt wird dieses Gesetz dann und nur dann annehmen, wenn man $k = -1$ sich denkt. Auch würde aus der punktuellen Auffassung unseres zweiten allgemeinen Axioms [(C.) Seite XIII] sich ergeben, dass k wirklich $= -1$ sein müsse. [Vgl. Seite 175].

Bringt man dieses complicirte mit der Constanten k behaftete elektromotorische Elementargesetz in Anwendung auf einen von einem isolirenden Medium umgebenen homogenen Conductor, auf den von Aussen her keinerlei elektrische Kräfte einwirken, so erhält man *die berühmten Helmholtz'schen Differentialgleichungen vom Jahre 1870. Zugleich zeigt sich dabei, dass jene Constante k völlig identisch ist mit der Helmholtz'schen Constanten k.* Aus diesen Differentialgleichungen folgt aber bekanntlich, dass $k \geqq 0$ sein muss; — denn andernfalls würde man, auf Grund derselben, zu dem absurden Resultat gelangen, dass

*) Wollte man annehmen, dass die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente nur in gewöhnlichen Kräften bestehe (nämlich keinerlei Drehungsmomente involvire), dass also in (12.) die Δ^x, Δ^y, Δ^z alle $= 0$ seien, so würde jenes Princip der Gleichheit der Action und Reaction *ganz überflüssig* werden. [Solches geht deutlich hervor aus den Betrachtungen auf Seite 158—164].

die im Conductor enthaltene Elektricität zur Zeit ihres Ruhezustandes sich in einem *labilen* Gleichgewicht befinde. [Vgl. Seite 191, 192].

Der neunte Abschnitt ist als eine Digression von mehr oder weniger beiläufiger Natur zu bezeichnen. Auch unterscheidet sich dieser Abschnitt von den übrigen Abschnitten meiner Untersuchung dadurch, *dass er der einzige ist, der auf einer gewissen Annahme beruht, für welche ich die Autorität von Helmholtz nicht in Anspruch nehmen kann.* Diese Annahme mag, im Anschluss an meine früheren Arbeiten, die Hypothese Epsilon heissen. Sie lautet folgendermassen:

Hypothese Epsilon: Elektrische Stromelemente sind, was ihre ponderomotorischen und elektromotorischen Fernwirkungen betrifft, vollständig charakterisirt durch Angabe derjenigen Werthe, welche ihre Strömungscomponenten zu Anfang des betrachteten Zeitelementes dt besitzen, und durch Angabe derjenigen Zuwüchse, welche diese Werthe während des Zeitelementes dt erfahren; wobei das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Axensystem ein ganz beliebiges sein darf. [*Seite 194*].

Diese Hypothese, für welche ich (wie schon gesagt) die Autorität von Helmholtz nicht in Anspruch nehmen kann, zeichnet sich offenbar durch ganz besondere Einfachheit aus. Auch würde diese Hypothese jene im vorigen Abschnitt benutzte Helmholtz'sche Annahme über die Potenzen der Entfernungen, sowie auch das damals benutzte Princip der Gleichheit der Action und Reaction völlig überflüssig machen. Es würde nämlich die Hypothese Epsilon (*ohne* Anwendung dieser beiden Stützpunkte) sofort die Formeln des ponderomotorischen und elektromotorischen Elementargesetzes liefern, und zwar genau in derselben Gestalt, wie vorhin im vorigen Abschnitt, nur mit dem Unterschiede, dass dabei $k = -1$ sich ergiebt. [Vgl. Seite 201, 202].

Im Ganzen sind daher drei Gründe zu nennen, die für $k = -1$ *sprechen*, nämlich erstens der Umstand, dass das im achten Abschnitt gefundene elektromotorische Elementargesetz nur allein dann eine einigermassen einfache Gestalt erhält, wenn $k = -1$ gesetzt wird, zweitens der Umstand, dass die punktuelle Auffassung des zweiten allgemeinen Axioms [(C.) Seite XIII] mit Nothwendigkeit zum Werthe $k = -1$ führt, und drittens endlich der Umstand, dass man schlechterdings gezwungen ist, die Constante $k = -1$ zu setzen, sobald man jene durch ihre Einfachheit besonders ausgezeichnete Hypothese Epsilon acceptirt *).

---

*) Auch die Theorie des *Weber'schen Gesetzes* spricht bekanntlich für $k = -1$.

b*



Diesen drei Gründen für $k = -1$ stehen nun aber mit grossem Nachdruck die Helmholtz'schen Differentialgleichungen von 1870 gegenüber, welche für $k \geqq 0$ sprechen.

Zur Beseitigung dieses höchst unangenehmen Conflictes sei bemerkt, dass es keinem Zweifel unterliegen kann, dass unter der Einwirkung elektromotorischer Kräfte nicht blos in den Conductoren, sondern auch in den Isolatoren elektrische Vorgänge entstehen, und dass also jene Helmholtz'schen Differentialgleichungen, in denen nur die elektrischen Bewegungen im gegebenen Conductor, nicht aber die gleichzeitigen elektrischen Vorgänge in dem umgebenden isolirenden Medium in Betracht gezogen sind, kein *wirkliches Definitivum* repräsentiren können. *Demgemäss wird jene Frage, ob $k = -1$, oder aber $\geqq 0$ sei, einstweilen immer noch als unentschieden anzusehen sein.* [Vgl. Seite 207, 208].

Wollte man übrigens die genannten Differentialgleichungen von der in Rede stehenden Unvollkommenheit zu befreien, nämlich der Art einzurichten suchen, dass dabei die elektrischen Vorgänge in dem umgebenden isolirenden Medium mitberücksichtigt werden, so würde ein solcher Versuch daran scheitern, dass unsere Vorstellungen über jene Vorgänge (über die sogenannten elektrischen oder dielektrischen Polarisationen) einstweilen noch sehr unsicher und unklar sind. [Vgl. Seite 327—332]. Besonders gross würde diese Unsicherheit und Unklarheit sein für die *Uebergangsschicht*, die zwischen dem Conductor selbst und dem umgebenden isolirenden Medium anzunehmen ist. — *Demgemäss haben wir in nächster Zeit wohl wenig Aussicht, über jene Frage, ob $k = -1$, oder aber $\geqq 0$ sei, zu einer bestimmten endgültigen Entscheidung zu gelangen.*

Zehnter Abschnitt. — Die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze gelten, wie schon früher hervorgehoben ist, von Hause aus nur für inextensible lineare Stromringe, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind, nicht aber für beliebige Körper und beliebige Strömungszustände. Demgemäss entsteht für uns die Aufgabe, diejenigen *Zusatzglieder* zu finden, die jenen Gesetzen, bei ihrer Anwendung auf beliebige Körper und beliebige elektrische Strömungszustände, noch hinzuzufügen sein würden.

Das bei Behandlung dieser Aufgabe sich ergebende Resultat oder Theorem [Seite 224, 225] wird alsdann offenbar auch noch anwendbar sein auf beliebige *Theile* der betrachteten Körper, also z. B. auch anwendbar sein auf *unendlich kleine Elemente* dieser Körper; so dass also dieses Theorem die schon gefundenen Elementargesetze mit in sich enthalten muss, nur in etwas anderer Gestalt. [Vgl. Seite 227].

Eilfter und zwölfter Abschnitt. — Vor Helmholtz hatte man die Gesetze der Elektrodynamik für *starre* Körper, und überdies nur noch für *biegsame inextensible* Drähte zu finden gesucht. Helmholtz ist der Erste gewesen, der in seiner Abhandlung vom Jahre 1874 diese Gesetze auch für solche Körper in Betracht zog, deren ponderable Massen in beliebigen *Dilatations- oder Contractionsbewegungen* begriffen sind. Auf diese Helmholtz'schen Untersuchungen wird hier näher eingegangen werden.

Im dreizehnten und vierzehnten Abschnitt werden die im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetze in Anwendung gebracht werden auf inextensible lineare Stromringe, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind, namentlich z. B. auch auf die sogenannten *Solenoide;* wodurch alsdann (unter Annahme der bekannten Ampère'schen Vorstellungen) nicht nur Solenoidpole, sondern auch Magnetpole und überhaupt beliebige magnetische Körper in den Kreis unserer Betrachtungen mithineintreten. Unter den in solcher Weise sich ergebenden Sätzen dürfte folgendes Theorem zu notiren sein:

Theorem: Sind die Richtung und die Intensität eines sogenannten gleichförmigen magnetischen Feldes in bestimmter Weise als Functionen der Zeit gegeben, so wird trotzdem die elektromotorische Wirkung dieses Feldes noch völlig unbekannt sein. [*Vgl. Seite 321*].

Untersuchungen im Anschluss an die neueren*) Helmholtz'schen Arbeiten (1892—1894).

Mit Hertz und Helmholtz nehmen wir an, dass die den ganzen unendlichen Weltraum erfüllende Substanz allenthalben und fortdauernd *continuirlich* sei, dass nämlich überall, wo verschiedenartige Theile der Substanz zusammengrenzen, dünne Uebergangsschichten sich vorfinden. Ob man nun diese den Weltraum erfüllende Substanz mit Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 526] als von ponderabler Materie durchdrungenen Aether, oder ob man sie umgekehrt als von Aether durchdrungene ponderable Materie bezeichnet, dürfte wohl ziemlich auf dasselbe hinauskommen. Jedenfalls wird das Mischungsverhältniss dieser beiden Materien an verschiedenen Stellen des Weltraums sehr ver-

*) Helmholtz hat bekanntlich gewisse Buchstaben, wie z. B. ε, μ, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, X, Y, Z, bei seinen älteren und bei seinen neueren Arbeiten in ganz *verschiedenem* Sinne angewendet. Und dieser Dualismus ist, durch das Bestreben, an den Helmholtz'schen Bezeichnungen möglichst festzuhalten, auf das hier vorliegende Werk übergegangen. Doch ist kaum zu befürchten, dass hieraus irgend welche Schwierigkeiten erwachsen könnten.



schiedene Werthe haben, z. B. im sogenannten Vacuum $= 0:1$, oder wenigstens *nahezu* $= 0:1$ sein. Denn die Möglichkeit, dass die ponderable Materie in minimaler Dichtigkeit auch im sogenannten Vacuum noch anzutreffen wäre, dürfte wohl schwer zu bestreiten sein, und sogar eine gewisse Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Ferner wollen wir mit Hertz [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 257] annehmen, dass der innerhalb der ponderablen Materie enthaltene Aether nur mit dieser zugleich sich bewegen könne; so dass also ponderable Materie und Aethermaterie zusammengenommen gewissermassen nur eine *einzige* Substanz bilden.

Endlich wollen wir annehmen, dass diese den ganzen Weltraum erfüllende *continuirliche* und *einheitliche* Substanz nirgends krystallinisch sei, und nirgends invariable Magnete enthalte, dass sie vielmehr in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur sei. [Ueber die Gründe, welche uns zur Exclusion invariabler Magnete veranlassen, findet man Näheres auf Seite 379].

All' diese Annahmen sind offenbar nur provisorischer Natur, nämlich darauf berechnet, die wirklichen Verhältnisse zunächst durch etwas einfachere ideale Verhältnisse zu ersetzen, mit denen alsdann (eben in Folge ihrer grösseren Einfachheit) sich leichter operiren lässt.

Jene den ganzen Weltraum erfüllende continuirliche und einheitliche Substanz wird verschiedener Bewegungszustände, ferner verschiedener calorischer Zustände, und endlich auch verschiedener elektrischer und magnetischer Zustände fähig sein. Ihr *Bewegungszustand* an irgend einer Stelle (x, y, z) drückt sich aus durch die daselbst augenblicklich vorhandenen Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ. Ferner findet der *calorische Zustand* der Substanz an der Stelle (x, y, z) seinen Ausdruck durch eine gewisse Zahl, nämlich durch die daselbst augenblicklich vorhandene Temperatur ϑ.

Ferner wird der augenblickliche *elektrische Zustand* der Substanz an der Stelle (x, y, z), nach den Vorstellungen von Hertz und Helmholtz, darstellbar sein durch einen gewissen *Vector*, d. i. durch eine von der Stelle (x, y, z) ausgehende gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge. Die rechtwinkligen Componenten dieses Vectors mögen kurzweg die *elektrischen Zustandscomponenten* genannt, und mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bezeichnet werden.

Analoges ist zu sagen vom *magnetischen Zustande*, nur mit dem Unterschiede, dass für denselben, wenigstens bei Helmholtz, *zwei* Vectoren in Gebrauch sind, von denen allerdings der zweite nur ein Trabant des ersten ist. Bezeichnet man nämlich die Componenten des ersten (primären) magnetischen Vectors mit $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, so sollen nach Helmholtz

die Componenten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ des zweiten (secundären) magnetischen Vectors die Werthe haben:

$$(H.) \qquad \mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}, \quad \mathfrak{N} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x},$$

wo x, y, z die Coordinaten der betrachteten Stelle sind. [Vgl. (H.) Seite 367].

Dabei mögen (ebenso wie etwa in den Euler'schen hydrodynamischen und aërodynamischen Differentialgleichungen) die Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ, und ebenso auch die Grössen ϑ, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ als Functionen von *Ort* und *Zeit*, d. i. als Functionen von x, y, z, t angesehen werden. Sind die Werthe dieser Functionen für irgend einen bestimmten Zeitaugenblick gegeben, so werden sie hiedurch, vermöge der der Substanz immanenten Gesetze, schon mitbestimmt sein für alle späteren Zeitaugenblicke.

Was zuvörderst die *calorischen* Zustände betrifft, so gelten für die Temperatur ϑ die bekannten und berühmten *Fourier'schen Differentialgleichungen* [vgl. Seite 334 und 341]:

$$(F.) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right),$$

$$(FF.) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\vartheta)}{\partial z} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right),$$

von denen die erste oder zweite anzuwenden ist, je nachdem die betrachtete Substanz in Ruhe oder in Bewegung sich befindet*). Die Temperatur ϑ ändert sich also an jeder Stelle (x, y, z) nach Maassgabe dieser Differentialgleichungen, ohne dass dabei irgend welche Fernwirkungen eine Rolle spielten. Die eigentlichen Ursachen der Temperaturänderung sind also in der *unmittelbaren Nachbarschaft der betrachteten Stelle* zu suchen. Und die Art und Weise, wie diese unmittelbare Nachbarschaft bei der Hervorbringung der Temperaturänderungen in Action tritt, findet in jenen Fourier'schen Differentialgleichungen ihren analytischen Ausdruck, man könnte sagen: ihre analytische Beschreibung.

Analoges soll nun, nach den Vorstellungen von Hertz und Helmholtz, auch gelten für die *elektrischen und magnetischen* Zustandsänderungen, d. i. für die Aenderungen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$. Es sollen nämlich nach Hertz und Helmholtz die eigentlichen Ursachen dieser Aenderungen an irgend einer Stelle (x, y, z) ebenfalls in der *unmittelbaren Nachbarschaft* dieser Stelle liegen, und ebenfalls ausdrück-

*) Der Einfachheit willen ist hier die Gleichung (FF.) nur für den speciellen Fall hingeschrieben, dass die Fourier'schen Coefficienten K, C, D völlig unveränderlich sind.



bar sein durch irgend welche *Differentialgleichungen;* — so dass also diese Differentialgleichungen (um deren Aufstellung es sich weiterhin handeln wird) mit jenen Fourier'schen Gleichungen einigermassen parallelstehend zu denken sind.

Eine zweite Analogie: Ebenso wie jene Fourier'schen Gleichungen (F.), (FF.) mit gewissen von der Natur der Substanz abhängenden Coefficienten K, C, D behaftet sind, ebenso sollen nach Hertz und Helmholtz die Differentialgleichungen der elektrischen und magnetischen Zustände ebenfalls mit derartigen Coefficienten λ, ε, μ behaftet sein. Hier ist unter λ die elektrische Leitungsfähigkeit, ferner unter ε der sogenannte Dielektricitätscoefficient, endlich unter μ der Magnetisirungscoefficient zu verstehen. Uebrigens werden wir, was diese Coefficienten betrifft, der Einfachheit willen, eine allerdings nur approximative Annahme von Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 491] acceptiren, nach welcher die Werthe von λ, ε, μ für ein und dasselbe substantielle Element fortdauernd ein und dieselben bleiben. Ein solches substantielles Element ändert aber im Allgemeinen seine Lage von Augenblick zu Augenblick. Und demgemäss werden die Coefficienten λ, ε, μ im Allgemeinen Functionen von *Ort und Zeit,* d. i. Functionen von x, y, z, t sein, ebenso wie α, β, γ, ϑ, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

Eine dritte Analogie: Ebenso wie in der Fourier'schen Theorie Wärme und Temperatur, ihrem eigentlichen Wesen nach, *unerklärt* bleiben, ebenso ist in der Helmholtz'schen Theorie Gleiches zu sagen vom elektrischen und magnetischen Zustande, d. i. von den Zuständen ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) und ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$). [Vgl. die Bemerkungen auf Seite 335 und Seite 367].

Endlich eine vierte Analogie: Ebenso wie man zu den Fourier'schen Differentialgleichungen auf Grund gewisser Fundamentalgesetze gelangen kann (zu denen z. B. der Satz gehört, dass die Wärme das Bestreben habe, von den Stellen höherer Temperatur zu denen tieferer Temperatur abzufliessen), in ähnlicher Weise gelangt auch Helmholtz zu den Differentialgleichungen der elektrischen und magnetischen Zustände mittelst gewisser (allerdings mehr oder weniger willkürlich von ihm supponirter) Fundamentalgesetze. Und ebenso wie Wärme und Temperatur, wenn auch nicht ihrem Wesen nach, so doch hinsichtlich ihrer Eigenschaften, durch die betreffenden Fundamentalgesetze bis zu einem gewissen Grade *definirt* sind, ebenso ist Gleiches von den Helmholtzschen Fundamentalgesetzen zu sagen mit Bezug auf die elektrischen und magnetischen Zustände. Demgemäss sind diese Helmholtz'schen Fundamentalgesetze von mir im vorliegenden Werk als *Definitionen* bezeichnet. Dieselben sind übrigens ziemlich complicirt, und jedenfalls

von ganz eigenthümlicher Art. *Sie bestehen nämlich in bestimmten Festsetzungen über die convectiven Aenderungen der Zustände* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ *und* $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$.

Schon beim elektrischen Strömungszustande $i(u, v, w)$ war [wie früher auf Seite X näher dargelegt worden ist] die Definition der convectiven Aenderungen mit einer gewissen *Willkür* verbunden. Um so mehr wird solches der Fall sein bei Zuständen, die, wie $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$, ihrem eigentlichen Wesen nach in Dunkel gehüllt sind. Demgemäss kann es nicht Wunder nehmen, dass jene von Helmholtz für die convectiven Aenderungen dieser Zustände aufgestellten Definitionen oder Fundamentalgesetze ziemlich in der Luft schweben. Einigermassen an Bekanntes sich anschliessend ist noch die betreffende Definition für den Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ [vgl. Seite 369 (5.)]. Ganz willkürlich und *ex abrupto* tritt uns aber die betreffende Definition für den Zustand $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ entgegen [vgl. Seite 375 (5.)].

Wie sehr Helmholtz selber in seinen Gedanken durch diese mysteriösen $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ beschäftigt und beunruhigt wurde, das geht deutlich hervor aus seinen letzten Betrachtungen über diesen Gegenstand. [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 501—504]. Indessen zeigt sich bei solchen Gelegenheiten der tiefe Ernst des Helmholtz'schen Geistes, seine Eigenthümlichkeit, gerade auf *principielle* Schwierigkeiten mit besonderer Aufsamkeit einzugehen, dieselben mit grösster Anstrengung und Ausdauer nach allen Seiten hin zu durchdenken, um sie womöglich aufzulösen.

Jedenfalls bleibt uns, was die Zustände $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ betrifft, angesichts der soeben geschilderten Sachlage, nur die Hoffnung übrig, dass es allmählich gelingen werde, über diese Zustände zu ganz bestimmten anschaulichen Vorstellungen zu gelangen, aus denen alsdann jene Fundamentalgesetze oder Definitionen in ungezwungener Weise sich ergeben müssten.

Wir gehen über zu weiteren Annahmen der zu entwickelnden Theorie. — Zwischen dem an irgend einer Stelle (x, y, z) vorhandenem elektrischen Zustande $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und zwischen der daselbst augenblicklich vorhandenen elektrischen Strömung (u, v, w) soll nach Hertz und Helmholtz eine gewisse einfache Beziehung stattfinden*). Um auf diese gegenseitige Beziehung näher einzugehen, empfiehlt es sich, gewissermassen als Zwischenglied, die sogenannte elektromotorische Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ einzuschalten; der Art, dass der Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ zunächst eine gewisse elektromotorische Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ erzeugt, und dass sodann diese Kraft ihrerseits eine gewisse elektrische Strömung (u, v, w) hervorruft.

*) Diese Beziehung findet, wie wir sogleich sehen werden, ihren analytischen Ausdruck durch die drei Formeln $(\gamma.)$ Seite XXVII.



Nach den Vorstellungen von Hertz und Helmholtz soll nämlich der elektrische Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ an derjenigen Stelle, an welcher er vorhanden ist, *sua sponte* eine gewisse elektromotorische Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ hervorbringen; und zwar sollen die Componenten dieser Kraft zu den Componenten jenes Zustandes in der Beziehung stehen:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon},$$

wo ε den Dielektricitätscoefficienten bezeichnet. Zu Gunsten einer solchen Vorstellungsweise könnte etwa erinnert werden an die Theorie der Elasticität. Denn die sogenannte elastische Kraft ist ja ebenfalls nur abhängig von dem augenblicklichen Zustande der Substanz an der betrachteten Stelle.

Uebrigens bedürfen die vorstehenden drei Relationen zwischen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ noch einer gewissen Ergänzung. Die Hertz-Helmholtz'sche Theorie macht nämlich keinen Anspruch darauf, über *alle* überhaupt möglichen elektromotorischen Kräfte Auskunft geben zu wollen. So z. B. bleiben die durch Anhomogenität der Substanz und durch thermische Processe hervorgerufenen elektromotorischen Kräfte *ausserhalb* des Rahmens dieser Theorie. Sind nun an der betrachteten Stelle solche der Theorie *fremden* elektromotorischen Kräfte vorhanden, und bezeichnet man dieselben mit (X^f, Y^f, Z^f), so sind statt der obigen drei Relationen folgende*) zu setzen [vgl. Seite 373 (4.)]:

$$(\alpha.) \qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X^f, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y^f, \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z^f.$$

Diese elektromotorische Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ soll nun ihrerseits an der betrachteten Stelle eine gewisse elektrische Strömung (u, v, w) erzeugen; der Art, dass zwischen den Componenten dieser Strömung und zwischen den Componenten jener Kraft die Beziehungen stattfinden [vgl. Seite 372 (1.)]:

$$(\beta.) \qquad u = \lambda\mathfrak{A}, \qquad v = \lambda\mathfrak{B}, \qquad w = \lambda\mathfrak{C},$$

wo λ die elektrische Leitungsfähigkeit bezeichnet. Diese Formeln $(\beta.)$ werden von Hertz und Helmholtz und ebenso auch von anderen Autoren kurzweg als *Ohm'sches Gesetz* bezeichnet.

---

*) Man möge hier die Unsymmetrie der Bezeichnung entschuldigen. An und für sich würde es gewiss besser gewesen sein, die der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte mit $(\mathfrak{A}^f, \mathfrak{B}^f, \mathfrak{C}^f)$ zu benennen. Wenn ich trotzdem die Buchstaben (X^f, Y^f, Z^f) gewählt habe, so ist das nur geschehen, um mich von der Hertz-Helmholtz'schen Bezeichnungsweise nicht gar zu weit zu entfernen.

Substituirt man nun schliesslich in (β.) für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Werthe (α.), so erhält man sofort [vgl. Seite 373 (5.)]:

$$(\gamma.)\qquad u = \frac{\lambda\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \lambda X', \qquad v = \frac{\lambda\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \lambda Y', \qquad w = \frac{\lambda\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + \lambda Z'.$$

Und diese Formeln (γ.) *repräsentiren alsdann ganz direct den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Zustande* ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) *und zwischen der elektrischen Strömung* (u, v, w).

Ebenso wie übrigens jene mit (X', Y', Z') bezeichneten *elektromotorischen* Kräfte ausserhalb des Rahmens der Helmholtz'schen Theorie liegen, ebenso giebt es auch *ponderomotorische* Kräfte, von denen genau dasselbe zu sagen ist. Zu diesen gehören z. B. die durch die Schwere, überhaupt durch irgend welche Gravitationen hervorgebrachten Fernkräfte. [Vgl. die Note auf Seite 451]. In seinem Vorwort zu den Ges. Werken von Hertz [daselbst Seite XVIII] sagt Helmholtz ausdrücklich, die Gravitation sei einstweilen noch ein *Räthsel*, und wir wären dieselbe folgerichtig noch nicht anders, denn als eine *reine Fernkraft*, zu erklären im Stande.

Dies im Allgemeinen vorangeschickt, dürfte es nun wohl zweckmässig sein, noch einige Worte hinzuzufügen über die betreffenden einzelnen Abschnitte.

Der funfzehnte Abschnitt enthält zunächst einige historische Notizen über die Abhandlungen von Hertz und Helmholtz. Sodann enthält derselbe einige zum Verständniss der Helmholtz'schen Arbeiten unentbehrliche Untersuchungen über *Variationen*. Dabei sei bemerkt, dass ich im vorliegenden Werk, weil das Zeichen δ schon für die convectiven Aenderungen eingeführt ist, die Variationen durchweg durch ein etwas andres Zeichen $\mathfrak{d}$ andeuten werde. Ich möchte bitten, dieses neue Zeichen $\mathfrak{d}$ als einen Nothbehelf zu entschuldigen, und dasselbe beim Lesen der Formeln als „Delta“ auszusprechen.

Ueberdies enthält der Abschnitt einige Betrachtungen und Formeln über die convectiven und endogenen Aenderungen der elektrischen und magnetischen Zustände, also Dinge von nur vorbereitender Bedeutung.

Sechzehnter Abschnitt: Das Helmholtz'sche Minimalprincip. — Seit langer Zeit haben die einzelnen Componenten Ξ, H, Z der *ponderomotorischen Kräfte* in den hauptsächlichsten Problemen der Mechanik ihren eigentlichen analytischen Mittelpunkt in einer einzigen Function, nämlich in dem sogenannten Potential gefunden.

Jene den unendlichen Weltraum erfüllende Substanz übt nun aber auf ihre einzelnen Elemente nicht nur gewisse ponderomotorische Kräfte (Ξ, H, Z) aus, sondern bringt in diesen einzelnen Elementen auch gewisse elektrische und magnetische Zustandsänderungen hervor. Es



fragt sich, ob man nicht vielleicht für all' diese Kräfte und Zustandsänderungen einen einzigen analytischen Mittelpunkt zu finden im Stande ist. Diese Frage ist nach Helmholtz bejahend zu beantworten. *In der That sollen nach Helmholtz all' jene Kräfte und Zustandsänderungen, mittelst des von ihm im Jahre 1892 aufgestellten Minimalprincips, ableitbar sein aus einem einzigen analytischen Ausdruck* Ψ.

Dieser Ausdruck Ψ ist für jedwede Stelle (x, y, z) abhängig von den Coefficienten ε, μ, ferner von den Zustandscomponenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, und endlich indirect auch noch abhängig von den Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ. Im Ganzen genommen sind aber die Vorstellungen über diesen Ausdruck Ψ und über seine Behandlung mittelst jenes Minimalprincips von so complicirter Art, dass ich mich hier darauf beschränken muss, auf die Seiten 382—385 des vorliegenden Werkes zu verweisen. Dort habe ich mich bemüht, diese Dinge in möglichst präciser und anschaulicher Gestalt zusammenzustellen.

Aus jenem Minimalprincip ergeben sich nun (durch Variation nach den im Ausdruck Ψ enthaltenen unbekannten Functionen) im Ganzen 9 Gleichungen, zu denen alsdann noch hinzuzufügen sind die 3 Gleichungen (H.) Seite XXIII. Aus diesen 12 Gleichungen ergeben sich, durch Elimination von $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, schliesslich 9 Gleichungen zur Bestimmung der 9 unbekannten Functionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$. *Und diese 9 Gleichungen repräsentiren die eigentlich gesuchten, zur Fourierschen Differentialgleichung* (F.) *oder* (FF.) *parallel stehenden Gleichungen; 6 derselben dienen zur Bestimmung der Functionen* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, *die 3 übrigen zur Bestimmung von* $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$.

Die 6 zur Bestimmung von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dienenden Gleichungen findet man angegeben in (A.), (Γ.) Seite 398—400. Diese Gleichungen (A.), (Γ.), *welche identisch sind mit den schon von Hertz aufgestellten Gleichungen,* werden nun, um ihnen eine für die Anwendung bequemere Form zu geben, einer gewissen Transformation oder Transfiguration unterworfen. [Seite 398—401]. Auch wird dabei [vgl. Seite 402] gezeigt werden, dass diese Gleichungen (A.), (Γ.) nur allein dann gültig sein können, wenn das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem ein *absolut ruhendes* ist; — was allerdings im Gegensatz steht zu einer Aeusserung von Hertz [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 261].

Was andererseits jene 3 zur Bestimmung von $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ dienenden Gleichungen betrifft, so findet man dieselben angegeben im Satze Seite 396. In jenem Satz ist jede dieser Kräfte $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ in *zwei Theile* zerlegt, z. B. $\Xi = \Xi_e + \Xi_m$ gesetzt, u. s. w. Die $\Xi_e, \mathsf{H}_e, \mathsf{Z}_e$ sind die ponderomotorischen Kräfte, mit denen die den Weltraum erfüllende

Substanz, vermöge ihres *elektrischen* Zustandes, auf ihre einzelnen Elemente einwirkt. Und ebenso sollen Ξ_m, H_m, Z_m diejenigen ponderomotorischen Kräfte vorstellen, mit denen diese Substanz, vermöge ihres *magnetischen* Zustandes, auf ihre einzelnen Elemente einwirkt. Noch sei bemerkt, dass die 3 für Ξ, H, Z geltenden Gleichungen einen wesentlichen Vorzug der Helmholtz'schen Theorie, gegenüber der früheren Hertz'schen Theorie, involviren. Denn jene 3 Gleichungen ergeben sich in der Helmholtz'schen Theorie, sobald die Prämissen dieser Theorie einmal acceptirt sind, ganz direct und mit voller Sicherheit, während ihre Ableitung bei Hertz eine mehr oder weniger bedenkliche sein dürfte. [Vgl. die Bemerkung Seite 378].

Im siebzehnten Abschnitt werden, im Sinne der Helmholtz'schen Theorie, die Begriffe der wahren und freien Elektricität, sowie auch die des wahren und freien Magnetismus besprochen. Sodann werden die Consequenzen der Helmholtz'schen Theorie für die *Elektrostatik* und andrerseits für das Problem der *magnetischen Vertheilung* entwickelt. Erstere sind mit den Formeln der *Poisson*'schen Theorie in befriedigendem Einklang, letztere aber *nicht*. [Vgl. Seite 423 und 435].

Endlich wird im achtzehnten Abschnitt die Helmholtz'sche Theorie in Anwendung gebracht auf die ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen *elektrischer Ströme*, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass diese Ströme annularer Natur sind [vgl. die Definition Seite VIII]. Hiebei ergeben sich für diese Wirkungen Werthe, die, unter gewissen Vernachlässigungen, mit den betreffenden Formeln von *Ampère* und *F. Neumann* übereinstimmen. Jene Vernachlässigungen aber sind im Allgemeinen wohl recht bedenklicher Natur. [Man vgl. die Resultate auf Seite 441, 446 und 449].

Beiläufig ist zu bemerken, dass das vorhin [Seite XXI] bei Besprechung der älteren Helmholtz'schen Arbeiten aufgestellte Theorem, *nach welchem die elektromotorischen Wirkungen eines gleichförmigen Magnetfeldes, trotz genauer Angabe seiner Richtung und Intensität, im Allgemeinen noch völlig unbekannt sein werden,* — dass dieses Theorem noch fortbesteht im Sinne der hier dargelegten neueren Helmholtz'schen Theorie. [Vgl. Seite 450 (37.)].

Schliesslich wird, im Anschluss an die letzte Helmholtz'sche elektrodynamische Abhandlung von 1893 [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 526], die Bewegung einer reibungslosen incompressiblen Flüssigkeit untersucht, unter Mitberücksichtigung ihrer elektrischen und magnetischen Zustände. Diese Untersuchung steht in enger Beziehung zu der von Helmholtz [a. a. O.] discutirten Frage über die relative Bewegung des



Aethers zur ponderablen Materie. Dabei ergiebt sich, dass diese Frage sehr verschieden zu beantworten sein wird, je nachdem man dem Aether Beharrungsvermögen zuschreibt oder nicht.

Schlussbemerkungen.

Die Frage, welche der beiden Theorieen die bessere sei, die ältere oder die neuere, scheint mir im Ganzen ziemlich müssig. Nach meiner (schon auf Seite V dargelegten) Ansicht dürften *beide* Wege weiter zu verfolgen, respective durch geeignete Abänderungen zu vervollkommnen sein. Denn dass beide Wege einstweilen noch im höchsten Grade *unbefriedigend* sind, tritt wohl deutlich genug zu Tage. Der *eine* Weg geht aus von gewissen allgemeinen Principien, Axiomen, Grundeigenschaften u. s. w., führt aber schliesslich nicht zu irgend welchen einfachen Vorstellungen, sondern nur zu mehr oder weniger complicirten Formeln, ausser etwa, wenn man $k = -1$ setzen wollte, wozu man einstweilen aber wohl noch nicht berechtigt ist; — und der *andere* Weg nimmt seinen Ausgang von gewissen, vorläufig ziemlich in der Luft schwebenden Fundamentalgesetzen [vgl. Seite XXV], und benutzt noch dazu von diesen Gesetzen aus bei seinem weiteren Fortgange eine Brücke von höchst verwickelter Bauart, nämlich das Helmholtz'sche Minimalprincip. Auch sind [wie bereits vorhin auf Seite XXIX dargelegt worden ist] die auf beiden Wegen sich ergebenden Resultate unter einander nur in *sehr mangelhafter* Uebereinstimmung; wodurch vielleicht zu neuen (theils theoretischen, theils experimentellen) Specialuntersuchungen Veranlassung gegeben werden dürfte.

Wie dem auch sei, — für den weiteren Fortschritt der Wissenschaft dürfte es doch wohl nöthig sein, von den bereits durchschrittenen Wegen eine deutliche Anschauung zu haben. Und das vorliegende Werk dürfte vielleicht dazu beitragen, die Erlangung einer solchen deutlichen Anschauung der bisherigen Wege ein wenig zu erleichtern.

Leipzig, 3. März 1898.

Carl Neumann.



Inhaltsregister des zweiten Theiles.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.





Achter Abschnitt.

Neunter Abschnitt.



Zehnter Abschnitt.

Eilfter Abschnitt.



Zwölfter Abschnitt.

Dreizehnter Abschnitt.

Vierzehnter Abschnitt.

Funfzehnter Abschnitt.



Sechzehnter Abschnitt.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip (1892—1894).

Siebzehnter Abschnitt.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip (1892—1894).



Achtzehnter Abschnitt.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip (1892—1894).

Anhang.

Verbesserungen.

Auf Seite 65 ist in der Formel (7 α.) der Buchstabe L durch $\mathfrak{L}$ zu ersetzen.

Auf Seite 310 in der zweiten Zeile ist unter K eine ganz *willkürlich* gegebene Constante zu verstehen.

Auf Seite 318 ist in der zweiten Zeile das δ zu ersetzen durch δ_1.



Erster Abschnitt.

Allgemeine Sätze über geschlossene Curven.

Für *geschlossene* Curven existiren gewisse allgemeine Sätze, die völlig unabhängig sind von der Gestalt und relativen Lage der Curven. Sind z. B. zwei solche Curven gegeben mit den Elementen Ds und Ds_1, und bezeichnet ε den Winkel, unter welchem Ds und Ds_1 gegen einander geneigt sind, so wird das über beide Curven ausgedehnte Integral

$$\iint \cos \varepsilon \cdot Ds Ds_1$$

stets $= 0$ sein. Dieser leicht zu beweisende Satz ist übrigens nur ein Specialfall eines viel allgemeineren Satzes, der folgendermassen lautet:

Es bezeichne r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente Ds und Ds_1, und es sei $f = f(r)$ irgend eine Function von r. Soll nun diese Function $f = f(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$\iint f(r) \cdot \cos \varepsilon \cdot Ds Ds_1$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, — so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene Function eine Constante ist.

Von derartigen Sätzen soll im gegenwärtigen Abschnitt die Rede sein. Allerdings werden wir uns dabei durchweg auf *stetige* Functionen beschränken; wie denn z. B. auch der soeben ausgesprochene Satz für den Fall *un*stetiger Functionen noch zweifelhaft sein dürfte. Dabei werden wir als Grundlage unserer Untersuchungen das *Stokes'sche Theorem* und das demselben sich anlehnende *Beltrami'sche Theorem* benutzen. Zuvor aber dürfte es zweckmässig sein, einige einfache Definitionen vorauszuschicken, oder vielmehr an dieselben zu erinnern.

Man denke sich drei von irgend einem Punkt O ausgehende Axen x, y, z, beschreibe um O (als Mittelpunkt) eine Kugel und bezeichne die Punkte, in denen die Oberfläche dieser Kugel von den Axen x, y, z



getroffen wird, respective mit A, B, C; so dass also auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreieck ABC entsteht, welches z. B. rechtwinklig sein wird, falls jene Axen gegen einander senkrecht sind. Endlich denke man sich die Kugel als ein Bild der Erdkugel, so dass man auf derselben stehen oder auch beliebig fortwandern kann.

Wenn man nun längs der Peripherie jenes sphärischen Dreiecks in der Richtung $ABCA$ fortwandert, so wird man während dieser Wanderung die Fläche des Dreiecks entweder fortdauernd zur Linken, oder aber fortdauernd zur Rechten haben. Im erstern Fall soll das gegebene Axensystem x, y, z positiv, im letztern negativ genannt werden.

Diese Definition dürfte nicht nur durch ihre Symmetrie, sondern namentlich auch in praktischer Beziehung durch grosse Bequemlichkeit sich auszeichnen. Leicht kann man aus ihr andere nicht weniger einfache, aber unsymmetrische Regeln ableiten. So z. B. wird man sagen können: Soll die x-Axe eines *positiven* Systems nach Osten und seine y-Axe nach Norden zeigen, so muss seine z-Axe nach dem Zenith gerichtet sein.

All' meinen bisherigen Publicationen liegt durchweg ein *positives* Axensystem zu Grunde, wenn allerdings auch die betreffende Definition zuweilen von mir etwas anders eingekleidet worden ist. (Vgl. z. B. den ersten Theil dieses Werkes, Seite 83). *Hieran festhaltend, werde ich auch im Folgenden stets ein positives Axensystem benutzen, und zwar in der Regel ein rechtwinkliges.*

Ein solches *positives* Axensystem findet man übrigens auch bei *Maxwell* (vgl. *Maxwell: Treatise on Electricity and Magnetism, 1873, Vol. 1, P. 25*), und ebenso auch in den kürzlich erschienenen *Helmholtz'schen Vorlesungen*, nicht aber in den Helmholtz'schen Abhandlungen. (Man vgl. den fünften Band jener Vorlesungen, Verlag von Voss, 1897, Seite VI).

Andrerseits findet man das *negative* Axensystem in den *Helmholtz-schen Abhandlungen*, und ebenso auch in den Schriften von *Hertz*. (Man vgl. Hertz' Ges. Werke, Bd. 2, Seite 214).

Wir haben ein Axensystem x, y, z positiv genannt, falls man bei jener Wanderung $ABCA$ das sphärische Dreieck ABC beständig zur *Linken* hat. In ähnlicher Weise pflegt man die linke Hand auch bei anderen Definitionen, gegenüber der rechten, zu bevorzugen.

Es sei z. B. s die Randcurve einer beliebig gegebenen (ebenen oder krummen) Fläche ω. Ferner sei von den beiden Seiten dieser Fläche ω die *eine* (gleichviel welche) als die *positive* Seite festgesetzt. Endlich nehme man an, dass man auf dieser positiven Seite, wie auf einem Fussboden, stehen oder auch beliebig fortschreiten kann.



Will man nun auf dieser positiven Seite der Fläche ω längs der Randcurve s in solcher Weise fortwandern, dass man während der Wanderung die gegebene Fläche ω stets zur Linken hat, so soll die hiebei einzuschlagende Richtung als die positive Richtung der Curve s bezeichnet werden.

So bestimmt sich also die positive Richtung der Curve, falls die positive Seite der Fläche gegeben ist. Auch übersieht man sofort, dass in solcher Weise auch umgekehrt die positive Seite der Fläche sich bestimmen wird, falls die positive Richtung der Curve gegeben sein sollte.

Leicht kann man die soeben ausgesprochene Definition z. B. auf das Zifferblatt einer Uhr anwenden. Nimmt man die *Vorderseite* dieses Zifferblatts zur positiven Seite, so wird offenbar die positive Richtung des Randes *entgegengesetzt* sein zur Bewegung des Uhrzeigers. Hingegen wird die positive Richtung des Randes mit der Bewegung des Uhrzeigers *übereinstimmend* sein, sobald man die *Rückseite* des Zifferblattes als positive Seite festsetzt.

Etwas umständlich erscheinen die *Boltzmann*'schen Angaben über das von ihm angewendete Axensystem. Boltzmann sagt nämlich (in seinen Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie, Leipzig, 1891, Theil 1, Seite 60): sein Axensystem solle so gewählt sein,

„dass die positive y-Axe durch eine *solche* Drehung auf kürzestem „Wege in die Lage der positiven z-Axe übergeht, wie sie eine „gewöhnliche rechtsläufige in der positiven x-Richtung in einer „fixen Mutter fortschreitende Schraube macht, also für ein auf „der positiven x-Seite befindliches Auge dem Sinne des Uhr-„zeigers *entgegen*. Dasselbe soll für die beiden andern Coordi-„natenaxen gelten, wenn x, y und z cyklisch vertauscht werden". (α.)

Er fährt sodann fort:

„Man erhält ein solches Coordinatensystem, wenn man die posi-„tive x-Axe *nach vorn*, die positive y-Axe nach rechts, und die „positive z-Axe nach oben zieht". (β.)

Die Richtung *„nach vorn"* bedarf hiebei doch wohl noch einer besondern Erklärung. Jedenfalls sind die beiden Definitionen (α.) und (β.) mit einander in Einklang, wenn man sich vorstellt, Boltzmann habe die beiden Axen y und z in seinem Auditorium auf der Tafel gezeichnet, und unter der Richtung *„nach vorn"* diejenige Richtung verstanden, welche von der Tafel aus in den Zuhörerraum hineingeht.

Diese Interpretation als richtig vorausgesetzt, ist das diesen Angaben (α.), (β.) entsprechende System, welches Boltzmann ein *Weincoordinatensystem* nennt, nichts anderes als unser *positives* System. Und andrerseits wird das Boltzmann'sche *Hopfencoordinatensystem* identisch

1*

sein mit unserm *negativen* System. (Man vgl. Boltzmann's Vorlesungen, Theil 2, Seite 102, 103).

Bei solchen Definitionen an Dinge wie Wein- und Hopfenranken oder an Bezeichnungen wie rechts- und linksläufige Schrauben sich anlehnen zu wollen, scheint mir übrigens etwas bedenklich, weil die mit diesen Dingen und Bezeichnungen verbundenen Vorstellungen den meisten Mathematikern wohl zu wenig geläufig sind.

§ 1.

Das Stokes'sche Theorem (1854).

Es sei s die Randcurve irgend einer (ebenen oder krummen) Fläche ω. Die positive Seite von ω sei in bestimmter Weise festgesetzt, wodurch alsdann [vgl. die Definition Seite 3] die positive Richtung der Curve s schon mitbestimmt ist.

Ferner seien (x, y, z) und $(x + Dx,\ y + Dy,\ z + Dz)$ zwei Nachbarpunkte der Curve s, auf einander folgend in der *positiven* Richtung von s. Ferner sei $D\omega$ irgend ein Element der Fläche ω. Ferner seien α, β, γ die Richtungscosinus der auf der *positiven* Seite von $D\omega$ errichteten Normale. Endlich seien

$$\text{(A.)} \qquad U = U(x, y, z), \quad V = V(x, y, z), \quad W = W(x, y, z)$$

drei beliebig gegebene stetige Functionen.

Alsdann besteht das berühmte *Stokes'sche Theorem* in folgender Formel:

$$\text{(B.)} \qquad \int (UDx + VDy + WDz)$$
$$= \int \left\{ \alpha \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} D\omega,$$

die Integrationen links und rechts ausgedehnt gedacht respective über alle Elemente (Dx, Dy, Dz) der Curve s, und über alle Elemente $D\omega$ der Fläche ω.

Beispielsweise kann man in dem Theorem (B.) die Functionen V und W beide $= 0$ machen. Alsdann reducirt sich die Formel (B.) auf:

$$(\alpha.) \qquad \int UDx = \int \left(\beta \frac{\partial U}{\partial z} - \gamma \frac{\partial U}{\partial y} \right) D\omega.$$

In ähnlicher Weise ergiebt sich aus (B.) auch folgende Formel:

$$(\beta.) \qquad \int VDy = \int \left(\gamma \frac{\partial V}{\partial x} - \alpha \frac{\partial V}{\partial z} \right) D\omega.$$

Und ebenso ergiebt sich endlich:

$$(\gamma.) \qquad \int WDz = \int \left(\alpha \frac{\partial W}{\partial y} - \beta \frac{\partial W}{\partial x} \right) D\omega.$$

Nimmt man statt der Fläche ω ein unendlich kleines Flächenelement $D\omega$, und versteht man also unter s die Randcurve dieses Elementes $D\omega$, so reducirt sich die Formel (B.) auf:

$$\text{(C.)} \quad \int (UDx + VDy + WDz)$$
$$= \left\{ \alpha \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\} D\omega.$$

Diese Formel (C.) ist von mir bereits bewiesen worden im ersten Theil des vorliegenden Werkes, Seite 88, 89. Und dass aus dieser Formel (C.) sofort auch die allgemeinere Formel (B.) sich ergiebt, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Bemerkung. — Dass das Theorem (B.) mit vollem Recht das *Stokes'sche Theorem* genannt wird, und von Stokes bereits im Jahre 1854 aufgestellt ist, ergiebt sich aus einer gelegentlichen Bemerkung Maxwell's. Man vgl. die Weinstein'sche Uebersetzung des Maxwell'schen Werkes, Berlin 1883, Bd. 1, Seite 28.

§ 2.

Die Ampère'schen Argumente $r, \vartheta, \vartheta_1, \varepsilon$ oder $R, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}$.

Auf einer *gegebenen Curve* sei ein bestimmter Punkt als Anfangspunkt markirt. Der zwischen diesem Anfangspunkt und irgend einem anderen Curvenpunkt (x, y, z) befindliche Curvenbogen sei (seiner Länge nach) mit s bezeichnet; so dass also x, y, z als Functionen von s angesehen werden können. Giebt man dem Bogen s einen unendlich kleinen Zuwachs Ds, und bezeichnet man die correspondirenden Zuwüchse von x, y, z mit Dx, Dy, Dz, so werden offenbar

$$\text{(a.)} \quad A = \frac{Dx}{Ds}, \quad B = \frac{Dy}{Ds}, \quad C = \frac{Dz}{Ds}$$

die Cosinus derjenigen Winkel sein, unter denen das unendlich kleine Bogenelement Ds gegen die drei Coordinatenaxen geneigt ist.

Ueberdies sei im Raume noch irgend eine *zweite Curve* gegeben, mit analogen Bezeichnungen: s_1, x_1, y_1, z_1, Ds_1, Dx_1, Dy_1, Dz_1, A_1, B_1, C_1; so dass also die Formeln zu notiren sind:

$$\text{(b.)} \quad A_1 = \frac{Dx_1}{Ds_1}, \quad B_1 = \frac{Dy_1}{Ds_1}, \quad C_1 = \frac{Dz_1}{Ds_1}.$$

Ferner seien r, ϑ, ϑ_1, ε die den beiden Elementen Ds, Ds_1 entsprechenden *Ampère'schen Argumente;* und zur Abkürzung mag gesetzt werden:

$$\text{(c.)} \quad R = r^2, \quad \Theta = \cos\vartheta, \quad \Theta_1 = \cos\vartheta_1, \quad \mathsf{E} = \cos\varepsilon.$$

Alsdann werden offenbar die Formeln stattfinden:



$$
\text{(f.)}\quad
\begin{aligned}
R &= \quad r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2,\\
\Theta &= \cos\vartheta = \frac{x-x_1}{r}A + \frac{y-y_1}{r}B + \frac{z-z_1}{r}C,\\
\Theta_1 &= \cos\vartheta_1 = \frac{x-x_1}{r}A_1 + \frac{y-y_1}{r}B_1 + \frac{z-z_1}{r}C_1,\\
\mathsf{E} &= \cos\varepsilon = AA_1 + BB_1 + CC_1.
\end{aligned}
$$

Differenzirt man die erste dieser Formeln (f.) nach s, respective nach s_1, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$
\frac{\partial R}{\partial s} = +\,2\left((x-x_1)\frac{\partial x}{\partial s} + (y-y_1)\frac{\partial y}{\partial s} + (z-z_1)\frac{\partial z}{\partial s}\right),
$$

$$
\frac{\partial R}{\partial s_1} = -\,2\left((x-x_1)\frac{\partial x_1}{\partial s_1} + (y-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial s_1} + (z-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial s_1}\right).
$$

Differenzirt man jetzt die letzte Gleichung von Neuem, und zwar nach s, so ergiebt sich sofort:

$$
\frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s_1} = -\,2\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y_1}{\partial s_1} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z_1}{\partial s_1}\right).
$$

Die in diesen drei Gleichungen enthaltenen Grössen $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial x_1}{\partial s_1}$, etc. sind offenbar identisch mit den in (a.), (b.) genannten Richtungscosinus $A = \frac{Dx}{Ds}$, $A_1 = \frac{Dx_1}{Ds_1}$, etc.; sodass man also erhält:

$$
\frac{\partial R}{\partial s} = +\,2r\left(\frac{x-x_1}{r}A + \frac{y-y_1}{r}B + \frac{z-z_1}{r}C\right),
$$

$$
\frac{\partial R}{\partial s_1} = -\,2r\left(\frac{x-x_1}{r}A_1 + \frac{y-y_1}{r}B_1 + \frac{z-z_1}{r}C_1\right),
$$

$$
\frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s_1} = -\,2(AA_1 + BB_1 + CC_1).
$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (f.) sofort:

$$
\text{(g.)}\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial s} &= +\,2r\Theta, &\qquad \frac{\partial R}{\partial s}\frac{\partial R}{\partial s_1} &= -\,4R\Theta\Theta_1,\\
\frac{\partial R}{\partial s_1} &= -\,2r\Theta_1, &\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s_1} &= -\,2\mathsf{E}.
\end{aligned}
$$

Uebrigens kann man diesen Formeln (g.), indem man an Stelle von $R = r^2$, die Entfernung r selber einführt, auch folgende Gestalt verleihen:

$$
\text{(h.)}\quad
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial s} &= +\,\Theta, &\qquad \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} &= -\,\Theta\Theta_1,\\
\frac{\partial r}{\partial s_1} &= -\,\Theta_1, &\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1} &= \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r};
\end{aligned}
$$

woraus z. B. sich ergiebt:

$$
\text{(j.)}\quad \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1} = -\,\mathsf{E}.
$$

Diese Formeln werden im Folgenden vielfach benutzt werden, bald in der Gestalt (g.), bald in der Gestalt (h.), (j.), wie es gerade in jedem Augenblick am bequemsten ist.

§ 3.

Das Beltrami'sche Theorem (1871).

Wir halten fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des vorigen Paragraphen. Nur wollen wir gegenwärtig annehmen, dass jede der beiden Curven s und s_1 *geschlossen* ist. Auch wollen wir im Raume irgend zwei Flächen ω und ω_1 uns denken, der Art, dass ω von s, und ω_1 von s_1 umgrenzt wird.

Die Anfangspunkte und die positiven Richtungen der Curven s und s_1 seien nach Belieben festgesetzt, wodurch alsdann die positiven Seiten der Flächen ω und ω_1 schon mitbestimmt sind [vgl. Seite 3]. Auch mögen die *Bogenlängen* s und s_1, von den festgesetzten Anfangspunkten aus, in den positiven Richtungen der Curven gerechnet werden.

Ferner seien $D\omega$ und $D\omega_1$ irgend zwei Elemente der Flächen ω und ω_1. Endlich seien

$$(1.)\qquad \nu(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{und} \quad \nu_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$$

die auf den Elementen $D\omega$ und $D\omega_1$, und zwar auf ihren positiven Seiten errichteten Normalen; der Art, dass ν und ν_1 die Richtungen der beiden Normalen, und α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Cosinus dieser Richtungen vorstellen sollen.

Es sei nun irgend eine stetige Function der drei Differenzen $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ gegeben:

$$(2.)\qquad f = f(x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

so dass also z. B. die Relationen stattfinden:

$$(2a.)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Alsdann gilt nach dem Stokes'schen Theorem [vgl. (α.) Seite 4] folgende Formel:

$$\int f Dx = \int \left[\beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right] D\omega.$$

Multiplicirt man diese Formel mit Dx_1, und integrirt man sodann über die ganze Curve s_1, so ergiebt sich sofort:

$$(3.)\qquad \iint f\, Dx\, Dx_1 = \int \left(\int \left[\beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right] Dx_1 \right) D\omega.$$

Das hier rechter Hand vorhandene *innere* Integral lautet:

$$\int F Dx_1, \quad \text{wo} \quad F = \beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Auf dieses innere Integral ist von Neuem das Stokes'sche Theorem [Formel (α.) Seite 4] anwendbar. Man erhält in solcher Weise:

$$\int F Dx_1 = \int \left(\beta_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} - \gamma_1 \frac{\partial F}{\partial y_1}\right) D\omega_1,$$

oder, falls man für F seine eigentliche Bedeutung substituirt:

$$\int \left[\beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right] Dx_1 = \int \left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[\beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right] - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right]\right) D\omega_1,$$

oder mit Rücksicht auf (2a.):

$$(4.)\quad \int \left[\beta \frac{\partial f}{\partial z} - \gamma \frac{\partial f}{\partial y}\right] Dx_1 = \int \left((\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \beta\beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \gamma\gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) D\omega_1.$$

Substituirt man diesen Werth (4.) in der rechten Seite der Formel (3.), so ergiebt sich die erste Gleichung folgenden Systems:

$$(5.)\quad \begin{cases} \iiint f Dx\, Dx_1 = \iint \left((\beta\gamma_1 + \beta_1\gamma) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \beta\beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \gamma\gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) D\omega\, D\omega_1, \\ \iiint f Dy\, Dy_1 = \iint \left((\gamma\alpha_1 + \gamma_1\alpha) \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \gamma\gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) D\omega\, D\omega_1, \\ \iiint f Dz\, Dz_1 = \iint \left((\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \alpha\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \beta\beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) D\omega\, D\omega_1, \end{cases}$$

dessen übrige Gleichungen in analoger Weise zu erhalten sind.

Versteht man nun, wie allgemein üblich ist, unter Δf den Laplaceschen Differentialausdruck:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

so ist identisch:

$$(6.)\quad \iint \Delta f \cdot (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) D\omega\, D\omega_1$$
$$= \iint (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) D\omega\, D\omega_1.$$

Addirt man jetzt die *vier* Gleichungen (5.), (6.), und beachtet man dabei die [aus (a.), (b.), (f.) Seite 5, 6 entspringende] Relation:

$$Dx\, Dx_1 + Dy\, Dy_1 + Dz\, Dz_1 = \mathsf{E}\, Ds\, Ds_1,$$

so erhält man sofort:

$$(7.)\quad \iiint f \mathsf{E} \cdot Ds\, Ds_1 + \iint \Delta f \cdot (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) \cdot D\omega\, D\omega_1 =$$
$$= \iint \left\{ \begin{array}{l} + \alpha \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) \\ + \beta \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) \\ + \gamma \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \gamma_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \end{array} \right\} D\omega\, D\omega_1;$$

und dies ist das Beltrami'sche Theorem, allerdings noch nicht in seiner einfachsten Gestalt.

Zur weiteren Vereinfachung sei bemerkt, dass der hier in den geschweiften Klammern stehende Ausdruck identisch ist mit folgendem Ausdruck:

$$\left\{\begin{array}{l} -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) \\ -\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) \\ -\gamma\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) \end{array}\right\},$$

wie sich solches aus (2a.) sofort ergiebt. Dieser Ausdruck aber kann, mit Rücksicht auf die aus (1.) entspringende allgemein bekannte Formel $\frac{\partial}{\partial \nu_1}=\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial}{\partial z_1}$, auch so geschrieben werden:

$$-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \nu_1}-\beta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial \nu_1}-\gamma\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \nu_1}.$$

Folglich wird dieser Ausdruck, mit Rücksicht auf die aus (1.) sich ergebende Formel $\frac{\partial}{\partial \nu}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}$, schliesslich übergehen in:

$$-\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{\partial f}{\partial \nu_1}.$$

Die Beltrami'sche Formel (7.) gewinnt somit folgende Gestalt:

$$(8.)\quad \iint f\mathsf{E}\cdot Ds\,Ds_1+\iint\Delta f\cdot(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)\,D\omega\,D\omega_1=-\iint\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu_1}\,D\omega\,D\omega_1;$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$(9.)\quad \iint f\mathsf{E}\cdot Ds\,Ds_1=-\iint\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\nu_1}+\Delta f\cdot(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)\right)D\omega\,D\omega_1.$$

Dieses in (7.), (8.), (9.) *in drei verschiedenen Gestalten angegebene Beltrami'sche Theorem gilt* [*vgl.* (2.)] *für jedwede Function*

$$(10.)\qquad f=f(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),$$

die von $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$ *in stetiger Weise abhängt.*

Folglich werden diese Beltrami'schen Formeln (7.), (8.), (9.) *z. B. auch gültig bleiben, wenn man in ihnen* f *durch* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *ersetzt. Man gelangt somit zu der Einsicht, dass diese Beltrami'schen Formeln* (7.), (8.), (9.), *unbeschadet ihrer Gültigkeit, unter den Integralzeichen beliebig oft nach*

$$(11.)\qquad x,\ y,\ z$$

differenzirt werden dürfen, falls man nur bei Ausführung solcher Differentiationen alle übrigen in den Formeln enthaltenen Grössen, wie z. B. α, β, γ *und* α_1, β_1, γ_1 *als Constanten ansieht.* [*Vgl. die zweite Bemerkung, Seite 21*].

Bemerkung. — Man findet die in Rede stehenden Formeln, namentlich z. B. die Formel (9.), in der höchst schätzbaren *Beltrami*'schen Monographie: *Sui principii fondamentali della idrodinamica razionale, Bologna 1871, Pag. 45.*

§ 4.

Specialisirung des Beltrami'schen Theorems.

Das Beltrami'sche Theorem (7.), (8.), (9.) gilt für jedwede Function der Gestalt (10.): $f = f(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$, und wird also z. B. auch gelten für eine Function:

$$f = f(R), \tag{12.}$$

vorausgesetzt, dass man unter R [ebenso wie in (f.) Seite 6] folgenden Ausdruck versteht:

$$R = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \tag{13.}$$

Für eine solche Function $f = f(R)$ ist aber:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - x_1)\frac{df}{dR},$$

mithin:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{df}{dR} + 4(x - x_1)^2\frac{d^2 f}{dR^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(x - x_1)(y - y_1)\frac{d^2 f}{dR^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4(x - x_1)(z - z_1)\frac{d^2 f}{dR^2}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$\Delta f = 6\frac{df}{dR} + 4R\frac{d^2 f}{dR^2}, \tag{k.}$$

und ferner:

$$\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \gamma_1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2\alpha_1\frac{df}{dR} + 4(x - x_1)[(x - x_1)\alpha_1 + \cdots]\frac{d^2 f}{dR^2}. \tag{l.}$$

Analog der letzten Gleichung wird sich offenbar ergeben:

$$\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \gamma_1\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2\beta_1\frac{df}{dR} + 4(y - y_1)[(x - x_1)\alpha_1 + \cdots]\frac{d^2 f}{dR^2}, \tag{m.}$$

und ebenso:

$$\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \beta_1\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \gamma_1\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\gamma_1\frac{df}{dR} + 4(z - z_1)[(x - x_1)\alpha_1 + \cdots]\frac{d^2 f}{dR^2}. \tag{n.}$$

Substituirt man diese Werthe (k.), (l.), (m.), (n.) in der Beltrami'schen Formel (7.), so erhält man:

$$\iint f\mathsf{E} \cdot Ds\, Ds_1 + \iint\left(6\frac{df}{dR} + 4R\frac{d^2 f}{dR^2}\right)(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)\, D\omega\, D\omega_1 = \tag{14.}$$

$$= \iint\left\{2\frac{df}{dR}(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) + 4\frac{d^2 f}{dR^2}[(x - x_1)\alpha + \cdots][(x - x_1)\alpha_1 + \cdots]\right\} D\omega\, D\omega_1$$

Wirft man hier den zweiten Theil der linken Seite auf die rechte Seite, so gelangt man zu folgendem Satz.

Erster Satz. — *Sind zwei geschlossene Curven s, s_1 und die von ihnen umgrenzten Flächen ω, ω_1 gegeben, so gilt, die erforderliche Stetigkeit vorausgesetzt, für jedwede Function $f = f(R)$ die Formel:*

$$(15.)\qquad \iint f\,\mathsf{E}\cdot Ds\,Ds_1 =$$

$$= 4\iint\left\{\begin{array}{c}\frac{d^2f}{dR^2}[(x-x_1)\alpha+(y-y_1)\beta+(z-z_1)\gamma][(x-x_1)\alpha_1+(y-y_1)\beta_1+(z-z_1)\gamma_1] \\ -\left(\frac{df}{dR}+R\frac{d^2f}{dR^2}\right)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)\end{array}\right\}D\omega\,D\omega_1.$$

Hier sind die Integrationen links über beide Curven hinerstreckt zu denken in ihren positiven Richtungen. Andrerseits sind, was den Ausdruck rechter Hand betrifft, die Normalen

$$(15a.)\qquad \nu(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\quad \textit{und}\quad \nu_1(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)$$

errichtet zu denken auf den positiven Seiten der Flächen ω und ω_1 [*vgl.* (1.)]. *Ueberdies haben R und E die in* (f.) *Seite 6 angegebenen Bedeutungen.*

In (15.) können (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) bezeichnet werden als die Fusspunkte der auf $D\omega$ und $D\omega_1$ errichteten Normalen $\nu(\alpha, \beta, \gamma)$ und $\nu_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Zu den *ersten Elementen* $D\nu$ und $D\nu_1$ dieser beiden Normalen stehen in einfacher Beziehung folgende Ausdrücke:

$$(16.)\qquad \begin{aligned} R = r^2 &= (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2, \\ \cos\tau &= \frac{x-x_1}{r}\alpha+\frac{y-y_1}{r}\beta+\frac{z-z_1}{r}\gamma, \\ \cos\tau_1 &= \frac{x-x_1}{r}\alpha_1+\frac{y-y_1}{r}\beta_1+\frac{z-z_1}{r}\gamma_1, \\ \cos\sigma &= \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1. \end{aligned}$$

In der That werden R, r, τ, τ_1, σ bezeichnet werden können als die *Ampère'schen Argumente* jener beiden Elemente $D\nu$, $D\nu_1$. Durch Anwendung der Relationen (16.) erlangt nun unsere Formel (15.) folgende Gestalt:

$$(17.)\qquad \iint f\,\mathsf{E}\,Ds\,Ds_1 = 4\iint\left\{R\frac{d^2f}{dR^2}\cos\tau\cos\tau_1-\left(\frac{df}{dR}+R\frac{d^2f}{dR^2}\right)\cos\sigma\right\}D\omega\,D\omega_1.$$

Wir kehren zurück zur Formel (15.). Diese Formel ist, zufolge einer früher in (11.) gemachten Bemerkung, unter dem Integralzeichen nach x differenzirbar. In solcher Weise erhält man:

$$\iint \frac{df}{dR} 2(x-x_1)\,\mathsf{E}\cdot Ds Ds_1 =$$

$$= 4\iint \left\{ \begin{array}{l} + \frac{d^2f}{dR^2}\left(\alpha[(x-x_1)\alpha_1+\cdots]+\alpha_1[(x-x_1)\alpha+\cdots]\right) \\ + \frac{d^3f}{dR^3}\cdot 2(x-x_1)[(x-x_1)\alpha+\cdots][(x-x_1)\alpha_1+\cdots] \\ - \left(2\frac{d^2f}{dR^2}+R\frac{d^3f}{dR^3}\right)\cdot 2(x-x_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1) \end{array} \right\} D\omega D\omega_1.$$

Dividirt man aber diese Formel durch 2, und setzt man überdies

$$\frac{df(R)}{dR} = F(R) = F,$$

so gelangt man zu folgendem Resultat:

Zweiter Satz. — *Sind zwei geschlossene Curven s, s_1 und die von ihnen umgrenzten Flächen ω, ω_1 gegeben, so gilt, die erforderliche Stetigkeit vorausgesetzt, für jedwede Function $F = F(R)$ die Formel:*

$$(18.)\qquad \iint F(x-x_1)\,\mathsf{E}\cdot Ds Ds_1 =$$

$$= 4\iint \left\{ \begin{array}{l} + \frac{dF}{dR}\,\frac{\alpha[(x-x_1)\alpha_1+\cdots]+\alpha_1[(x-x_1)\alpha+\cdots]}{2} \\ + \frac{d^2F}{dR^2}(x-x_1)[(x-x_1)\alpha+\cdots][(x-x_1)\alpha_1+\cdots] \\ - \left(\frac{dF}{dR}+\frac{R}{2}\frac{d^2F}{dR^2}\right) 2(x-x_1)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1) \end{array} \right\} D\omega D\omega_1.$$

Dabei sind die Vorstellungen und Bezeichnungen genau dieselben wie im vorigen Satz (15.).

Bedient man sich der in (16.) eingeführten Ampère'schen Argumente, so ist diese Formel (18.) auch so darstellbar:

$$(19.)\qquad \iint F(x-x_1)\,\mathsf{E}\cdot Ds Ds_1 = 4\iint \left\{ \begin{array}{l} + \frac{dF}{dR}\,\frac{r(\alpha\cos\tau_1+\alpha_1\cos\tau)}{2} \\ + R\frac{d^2F}{dR^2}(x-x_1)\cos\tau\cos\tau_1 \\ - \left(\frac{dF}{dR}+\frac{R}{2}\frac{d^2F}{dR^2}\right) 2(x-x_1)\cos\sigma \end{array} \right\} D\omega D\omega_1.$$

§ 5.

Drei Theoreme über das Verschwinden von Curvenintegralen.

Für zwei geschlossene Curven s, s_1 und für irgend eine Function $f = f(R)$ sei das Integral gebildet:

$$(20.)\qquad \iint f\,\mathsf{E}\cdot Ds Ds_1,$$

wo R und E die bekannten Bedeutungen haben sollen [Seite 6 (f.)]. Wir legen uns die Frage vor: *Von welcher Beschaffenheit muss die*

Function $f = f(R)$ sein, damit dieses Integral für ganz beliebige geschlossene Curven stets $= 0$ ist?

Nach (17.) ist das Integral (20.) folgendermassen ausdrückbar:

$$(21.)\quad \iint f\,\mathsf{E}\,Ds\,Ds_1 = 4\iint\left\{R\frac{d^2f}{dR^2}\cos\tau\cos\tau_1 - \left(\frac{df}{dR} + R\frac{d^2f}{dR^2}\right)\cos\sigma\right\}D\omega\,D\omega_1.$$

Und dieser Ausdruck reducirt sich, falls die beiden geschlossenen Curven *unendlich klein* sind, auf den einfacheren Ausdruck:

$$(22.)\quad \iint f\,\mathsf{E}\,Ds\,Ds_1 = 4\left\{R\frac{d^2f}{dR^2}\cos\tau\cos\tau_1 - \left(\frac{df}{dR} + R\frac{d^2f}{dR^2}\right)\cos\sigma\right\}D\omega\,D\omega_1,$$

wo alsdann $D\omega$ und $D\omega_1$ die von den beiden unendlich kleinen geschlossenen Curven umgrenzten Flächenstücke repräsentiren.

Nehmen wir nun an, dass das Integral (20.) für *beliebige* geschlossene Curven, also z. B. auch für *unendlich kleine* geschlossene Curven stets $= 0$ ist, so folgt aus (22.) sofort, dass für beliebige Werthe von R

$$R\frac{d^2f}{dR^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{df}{dR} + R\frac{d^2f}{dR^2} = 0,$$

mithin auch

$$\frac{df}{dR} = 0$$

sein muss. Hieraus folgt weiter, dass f eine *Constante* sein muss.

Umgekehrt wird, falls f eine Constante ist, das vorgelegte Integral (20.) für ganz beliebige geschlossene Curven stets $= 0$ sein, wie solches aus der Transformation (21.) sich sofort ergiebt. — Demgemäss gelangen wir zu folgendem Satz.

Erstes Theorem. — *Soll eine noch unbekannte Function $f = f(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$(23.)\quad J = \iint f\,\mathsf{E}\cdot Ds\,Ds_1$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene Function f eine Constante ist. Dies ist derjenige Satz, von welchem schon zu Anfang dieses Abschnittes (Seite 1) die Rede war.

Bezeichnet $F = F(R)$ eine *ganz beliebige* Function von R, so ist offenbar:

$$(\alpha.)\quad \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{dF}{dR}\frac{\partial R}{\partial s},$$

$$(\beta.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{d^2F}{dR^2}\frac{\partial R}{\partial s}\frac{\partial R}{\partial s_1} + \frac{dF}{dR}\frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s_1},$$

also mit Rücksicht auf (g.) Seite 6:

$$(\gamma.)\quad \frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial s_1} = -2\left(2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1 + \frac{dF}{dR}\,\mathsf{E}\right).$$

Nun ist offenbar das über eine geschlossene Curve hinerstreckte Integral

$$(\delta.)\qquad \int \frac{\partial F}{\partial s}\, Ds \text{ stets } = 0.$$

Somit folgt aus (γ.), dass das über zwei geschlossene Curven s, s_1 ausgedehnte Integral

$$(\varepsilon.)\qquad \iint \left\{2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1 + \frac{dF}{dR}\mathsf{E}\right\} Ds Ds_1 \text{ ebenfalls stets } = 0$$

sein wird, welche Beschaffenheit die Function $F = F(R)$ auch immer besitzen mag.

Addirt man diese stets geltende Gleichung (ε.) zur Formel (23.), so erhält man sofort:

$$(24.)\qquad J = \iint \left\{2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1 + \left(\frac{dF}{dR} + f\right)\mathsf{E}\right\} Ds Ds_1;$$

so dass man also jenes Theorem (23.), falls es beliebt, in folgender Ausdrucksweise wiederholen kann:

Sollen zwei noch unbekannte Functionen $f = f(R)$ und $F = F(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$(25.)\qquad J = \iint \left\{2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1 + \left(\frac{dF}{dR} + f\right)\mathsf{E}\right\} Ds Ds_1$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass die Function f eine Constante ist.

Führt man nun, statt f, F, die Bezeichnungen φ, ψ ein, indem man setzt:

$$\varphi = 2R\frac{d^2F}{dR^2},$$

$$\psi = \frac{dF}{dR} + f,$$

so ist offenbar:

$$2R\frac{d\psi}{dR} - \varphi = 2R\frac{df}{dR};$$

so dass also jene Bedingung $f =$ Const. sich verwandelt in

$$2R\frac{d\psi}{dR} - \varphi = 0.$$

Somit kann man dem Satze (25.) folgende Gestalt geben:

Zweites Theorem. — *Sollen zwei noch unbekannte Functionen $\varphi = \varphi(R)$ und $\psi = \psi(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$(26.)\qquad \iint (\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}) Ds Ds_1$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets ver-

schwindet, so ist hiezu **erforderlich und ausreichend**, *dass zwischen jenen beiden Functionen φ und ψ die Relation stattfindet:*

$$\varphi = 2R\frac{d\psi}{dR}, \tag{27.}$$

d. i. die Relation:

$$\varphi = r\frac{d\psi}{dr}. \tag{27a.}$$

Es geht nämlich (27.) *in* (27a.) *über, falls man nur beachtet, dass nach unseren Festsetzungen $R = r^2$ ist.*

Für $\psi = 0$ reducirt sich die Relation (27.) oder (27a.) auf $\varphi = 0$, so dass man also sagen kann:

Specialfall. — *Soll eine Function $\varphi = \varphi(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$\iint \varphi \Theta \Theta_1 \cdot Ds Ds_1 \tag{28.}$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, so ist hiezu **erforderlich und ausreichend**, *dass jene Function φ identisch $= 0$ ist.*

Man kann andrerseits das Theorem (26.) auf den Specialfall $\varphi = 0$ anwenden. Alsdann verwandelt sich die Relation (27.) oder (27a.) in $\psi = \text{Const.}$; so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Anderer Specialfall. — *Soll eine Function $\psi = \psi(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$\iint \psi \mathsf{E} \cdot Ds Ds_1 \tag{29.}$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, so ist hiezu **erforderlich und ausreichend**, *dass jene Function ψ eine* **Constante** *ist.* Dieser Satz (29.) ist offenbar nichts Andres als unser erstes Theorem (23.).

Bemerkung. — Jene Bedingung (27.) oder (27a.) wird offenbar erfüllt sein, wenn man

$$\varphi = +\frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \psi = -\frac{1}{r}$$

setzt. Aus dem Theorem (26.) folgt somit, dass für zwei geschlossene Curven stets die Gleichung stattfindet:

$$\iint \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r} Ds Ds_1 = 0.$$

Von dieser Gleichung, die man auch so schreiben kann:

$$\iint \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1 - \cos\varepsilon}{r} Ds Ds_1 = 0$$

wird weiterhin Gebrauch zu machen sein.



Es sei gegeben erstens eine *geschlossene Curve* s, und zweitens irgend ein *einzelnes Linienelement* Ds_1. Für diese beiden Objecte s und Ds_1 sei der Ausdruck gebildet:

$$J = Ds_1 \cdot \int (\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}) Ds; \tag{30.}$$

so dass also dieser Ausdruck J dasjenige Integral vorstellt, auf welches unser früheres Integral (26.) sich reduciren würde, falls man daselbst die geschlossene Curve s_1 auf ein einzelnes Element Ds_1 reduciren wollte.

Nehmen wir nun an, die Functionen $\varphi = \varphi(R)$ und $\psi = \psi(R)$ seien von solcher Beschaffenheit, dass der Ausdruck J (30.) für beliebige Lagen und Gestalten jener beiden Objecte s und Ds_1 stets verschwindet; — alsdann folgt hieraus (durch Summation), dass das Integral

$$\int \left\{ Ds_1 \cdot \int (\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}) Ds \right\}$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets $= 0$ ist. Und hieraus folgt weiter, mittelst des Theorems (26.), dass zwischen φ und ψ die Relation stattfindet:

$$\varphi = 2R \frac{d\psi}{dR} \quad \text{oder} \quad \varphi = r \frac{d\psi}{dr}. \tag{31.}$$

Und umgekehrt wird, falls diese Relation (31.) erfüllt ist, der vorgelegte Ausdruck J (30.) für beliebige Lagen und Gestalten der beiden Objecte s und Ds_1 stets verschwinden. In der That ist jener Ausdruck J (30.), mittelst der Relation (31.), in die Gestalt versetzbar:

$$J = Ds_1 \cdot \int \left(2R \frac{d\psi}{dR} \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E} \right) Ds.$$

Hieraus folgt mittelst der Gleichungen (g.) Seite 6:

$$J = -\frac{Ds_1}{2} \int \left(\frac{d\psi}{dR} \frac{\partial R}{\partial s} \frac{\partial R}{\partial s_1} + \psi \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s_1} \right) Ds,$$

oder was dasselbe ist:

$$J = -\frac{Ds_1}{2} \int \frac{\partial}{\partial s} \left(\psi \frac{\partial R}{\partial s_1} \right) Ds.$$

Und hieraus endlich folgt: $J = 0$. — *Q. e. d.*

Alles zusammengefasst, gelangen wir also durch unsere Betrachtungen zu folgendem Resultat:

Drittes Theorem. — *Sollen zwei Functionen* $\varphi = \varphi(R)$ *und* $\psi = \psi(R)$ *von solcher Beschaffenheit sein, dass der Ausdruck*

$$Ds_1 \cdot \int (\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}) Ds \tag{32.}$$

für eine geschlossene Curve s *und für ein einzelnes Linienelement* Ds_1, *welche Lagen und Gestalten diese beiden Objecte auch haben mögen, stets*



verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass zwischen jenen beiden Functionen φ und ψ die Relation stattfindet:

(33.) $$\varphi = 2R\frac{d\psi}{dR},$$

d. i. die Relation:

(33a.) $$\varphi = r\frac{d\psi}{dr}.$$

Bemerkung. — Diese Relation (33.) oder (33a.) wird z. B. erfüllt sein, wenn man

$$\varphi = +\frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \psi = -\frac{1}{r}$$

macht. Aus dem Theorem (32.) ergiebt sich also die Formel:

(f.) $$Ds_1 \cdot \int \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r} Ds = 0.$$

Und zwar gelangt man, auf Grund jenes Theorems, zu der Einsicht, dass die Formel (f.) gültig ist für eine geschlossene Curve s und für ein einzelnes Linienelement Ds_1, welche Lagen und Gestalten diese beiden Objecte auch immer besitzen mögen.

§ 6.

Ein viertes Theorem über das Verschwinden von Curvenintegralen.

Für zwei geschlossene Curven s, s_1 und für irgend eine Function $f = f(R)$ sei das Integral gebildet:

(34.) $$\iint f\,\mathsf{E}\,(x - x_1)\,Ds\,Ds_1;$$

dabei sollen x und x_1 die x-Coordinaten der Elemente Ds und Ds_1 sein; während R und E die in (f.) Seite 6 angegebenen Bedeutungen haben mögen. Wir legen uns die Frage vor: *Von welcher Beschaffenheit muss die Function $f = f(R)$ sein, damit dieses Integral* (34.) *für ganz beliebige geschlossene Curven stets* $= 0$ *ist?*

Nach (19.) ist das Integral (34.) folgendermassen ausdrückbar:

(35.)
$$\iint f\,\mathsf{E}(x-x_1)\,Ds\,Ds_1 = 4\iint \left\{ \begin{aligned} &+\frac{df}{dR}\,\frac{r(\alpha\cos\tau_1 + \alpha_1\cos\tau)}{2} \\ &+R\frac{d^2f}{dR^2}(x - x_1)\cos\tau\cos\tau_1 \\ &-\left(\frac{df}{dR} + \frac{R}{2}\,\frac{d^2f}{dR^2}\right)2(x-x_1)\cos\sigma \end{aligned} \right\} D\omega\,D\omega_1.$$

Nehmen wir nun an, dass das Integral (34.) für *beliebige* geschlossene Curven, mithin z. B. auch für *unendlich kleine* geschlossene Curven stets verschwindet, so folgt aus (35.), dass das daselbst in den geschweiften Klammern enthaltene Trinom für zwei Flächenelemente $D\omega, D\omega_1$ von beliebiger Lage und Gestalt stets $= 0$ ist, dass mithin

dieses Trinom z. B. auch $= 0$ ist für $x = x_1$ (also für den Fall, dass die beiden Elemente $D\omega$ und $D\omega_1$ gleich weit von der yz-Ebene entfernt sind). Hieraus folgt weiter, dass der Ausdruck

$$\frac{df}{dR} \frac{r(\alpha \cos \tau_1 + \alpha_1 \cos \tau)}{2} = 0$$

sein muss. Und hieraus endlich folgt, dass

$$\frac{df}{dR} = 0,$$

mithin f selber *constant* sein muss.

Umgekehrt wird, falls f eine Constante ist, das vorgelegte Integral (34.) für geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwinden; wie solches aus der Transformation (35.) sofort sich ergiebt. Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Viertes Theorem. — *Soll eine Function $f = f(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$\iint f \, \mathsf{E}(x - x_1) \, Ds \, Ds_1 \tag{36.}$$

für geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene Function f eine Constante ist.

Kaum bedarf es der Bemerkung, dass diesem Theorem (36.) zwei analoge Theoreme zur Seite stehen, in denen der Factor $(x - x_1)$ durch $(y - y_1)$, respective durch $(z - z_1)$ vertreten ist.

§ 7.

Ein fünftes Theorem über das Verschwinden von Curvenintegralen.

Es seien s, s_1 zwei geschlossene Curven, und ω, ω_1 die von ihnen umgrenzten Flächen. Ferner bezeichne [ebenso wie auf Seite 7]

$$f = f(x - x_1, \, y - y_1, \, z - z_1) \tag{1.}$$

irgend eine von den drei Differenzen $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ abhängende Function; so dass also die Relationen stattfinden:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1a.}$$

Nach dem Stokes'schen Theorem ist bekanntlich [vgl. (β.) Seite 4]:

$$\int f \, Dy = \int \left[\gamma \frac{\partial f}{\partial x} - \alpha \frac{\partial f}{\partial z} \right] D\omega,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über die Curve s, respective über die von s begrenzte Fläche ω. Multiplicirt man diese Formel mit Dz_1, und integrirt man sodann über alle Elemente der Curve s_1, so erhält man sofort:

$$(2.)\qquad \iint f\,Dy\,Dz_1 = \int\left(\int\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\right]Dz_1\right)D\omega.$$

Auf das hier rechter Hand vorhandene *innere* Integral ist von Neuem das Stokes'sche Theorem anwendbar. Man erhält in solcher Weise [nach dem Schema der Formel (γ.) Seite 4]:

$$\int\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\right]Dz_1 = \int\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\right] - \beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\right]\right)D\omega_1,$$

oder mit Rücksicht auf (1a.):

$$\int\left[\gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial z}\right]Dz_1 =$$

$$= \int\left\{\alpha\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \left(\beta_1\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha_1\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \beta_1\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\right\}D\omega_1.$$

Dies in (2.) substituirt, erhält man:

$$(3.)\quad \iint f\,Dy\,Dz_1 = \iint\left\{\alpha\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \left(\beta_1\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha_1\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \beta_1\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\right\}D\omega\,D\omega_1.$$

Und in analoger Art wird sich, wie leicht zu übersehen ist, auch folgende Gleichung ergeben*):

$$(4.)\quad \iint f\,Dz\,Dy_1 = \iint\left\{\alpha\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \left(\gamma_1\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \gamma_1\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \alpha_1\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)\right\}D\omega\,D\omega_1.$$

Diese im Ganzen wenig angenehmen und etwas undurchsichtigen Formeln (3.) und (4.) liefern durch Subtraction folgende *völlig symmetrische* Formel:

$$(5.)\quad \iint f(Dy\,Dz_1 - Dz\,Dy_1) = \iint\left(\mathsf{A}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathsf{B}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \Gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)D\omega\,D\omega_1,$$

in welcher A, B, Γ die Bedeutungen haben:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \beta_1\gamma - \beta\gamma_1,\\ \mathsf{B} &= \gamma_1\alpha - \gamma\alpha_1,\\ \Gamma &= \alpha_1\beta - \alpha\beta_1. \end{aligned}$$

Nimmt man nun für f (1.) eine nur von R abhängende Function:

$$(7.)\qquad f = f(R),$$

wo R seine gewöhnliche Bedeutung haben soll:

$$(8.)\qquad R = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

so ergiebt sich sofort:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - x_1)\frac{df}{dR},$$

und ferner:

---

*) Man erhält nämlich (4.) aus (3.) dadurch, dass man die Buchstaben y und z, mithin auch die Buchstaben β und γ mit einander vertauscht.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\frac{df}{dR} + 4(x - x_1)^2 \frac{d^2 f}{dR^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(x - x_1)(y - y_1)\frac{d^2 f}{dR^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 4(x - x_1)(z - z_1)\frac{d^2 f}{dR^2};$$

so dass also in diesem Fall die Formel (5.) übergeht in:

$$(9.)\qquad \iint f(DyDz_1 - DzDy_1) =$$
$$= \iint \left\{ 2\frac{df}{dR}\mathsf{A} + 4\frac{d^2 f}{dR^2}(x - x_1)[(x - x_1)\mathsf{A} + (y - y_1)\mathsf{B} + (z - z_1)\Gamma] \right\} D\omega D\omega_1.$$

Diese Formel (9.), *in welcher* A, B, Γ *die Bedeutungen* (6.) *haben, wird uns nun leicht zu unserm eigentlichen Ziele führen.*

Nehmen wir nämlich an, dass das Integral

$$(10.)\qquad \iint f(DyDz_1 - DzDy_1)$$

für zwei *beliebige* geschlossene Curven, mithin z. B. auch für zwei *unendlich kleine* geschlossene Curven stets verschwindet, so folgt aus der Formel (9.), dass das daselbst in den geschweiften Klammern enthaltene Binom für zwei Flächenelemente $D\omega$, $D\omega_1$ von beliebiger Lage und Gestalt stets $= 0$ ist, dass also dieses Binom z. B. auch $= 0$ sein muss für den Fall $x = x_1$ (d. i. für den Fall, dass jene Elemente $D\omega$ und $D\omega_1$ gleich weit von der yz-Ebene entfernt sind). Hieraus aber folgt weiter, dass

$$2\frac{df}{dR}\mathsf{A} = 0$$

sein muss. Und hieraus endlich folgt, dass f selber eine *Constante* sein muss.

Umgekehrt wird, falls f eine Constante ist, das vorgelegte Integral (10.) für geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwinden; wie solches aus der Transformation (9.) sofort sich ergiebt. Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Fünftes Theorem. — *Soll eine Function $f = f(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$(11.)\qquad \iint f(DyDz_1 - DzDy_1)$$

für zwei geschlossene Curven von beliebiger Lage und Gestalt stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene Function f eine Constante ist.

Selbstverständlich stehen diesem Theorem zwei analoge Theoreme zur Seite, in denen $(DyDz_1 - DzDy_1)$ durch $(DzDx_1 - DxDz_1)$, respective durch $(DxDy_1 - DyDx_1)$ ersetzt ist.

Bemerkung. — Bei allen Untersuchungen dieses Abschnittes ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass immer nur von solchen geschlossenen Curven die Rede sein soll, die einander weder berühren, noch schneiden, noch auch gegenseitig umschlingen. Desgleichen ist, meistentheils nur stillschweigend, vorausgesetzt worden, dass alle in Betracht kommenden Functionen *stetig* sind.

Auch in den folgenden Abschnitten wird an diesen Voraussetzungen durchweg festgehalten werden. In der That würde es für unsere eigentlichen Zwecke ganz überflüssig sein, nach diesen Seiten hin eine grössere Allgemeinheit anstreben zu wollen.

Zweite Bemerkung. — Ueber die Differentiationen, von denen in (11.) Seite 9 die Rede war, kann man sich am Bequemsten und Anschaulichsten *geometrisch* ausdrücken.

So z. B. gilt die Beltrami'sche Formel (7.) Seite 8 ganz allgemein für zwei geschlossene Curven von beliebiger Gestalt und Lage. Folglich wird sie z. B. in Gültigkeit bleiben, wenn man die eine dieser Curven, sich selber parallel, in der Richtung der x-Axe verschiebt U. s. w.

Zweiter Abschnitt.

Ueber geschlossene Curven, die in beliebiger Bewegung und Gestaltsveränderung begriffen sind.

Wir gehen über zu etwas complicirteren Aufgaben. Es seien nämlich gegeben zwei *geschlossene Curven,* die in beliebigen *Bewegungen und Gestaltsveränderungen* begriffen sind. Und es sei, unter Anwendung irgend welcher stetiger Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$, folgendes Integral gebildet:

$$\text{(I.)} \qquad \iint[\varphi(r)\Theta\Theta_1 + \psi(r)\mathsf{E}]\, dr \cdot Ds Ds_1,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds der einen, und über alle Elemente Ds_1 der andern Curve. Dabei sollen $r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}$ die den Elementen Ds, Ds_1 entsprechenden Ampère'schen Argumente sein [vgl. Seite 5 (c.)]. Und zwar sollen r, Θ, Θ_1, E die Werthe dieser Argumente im Augenblick t vorstellen, während dr den Zuwachs von r während des nächstfolgenden Zeitelementes dt bezeichnet.

Es soll nun untersucht werden, von welcher Beschaffenheit jene Functionen $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ sein müssen, damit das Integral (I.) bei beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen der beiden Curven stets *verschwindet.* Doch wird dabei, was die Gestaltsveränderungen betrifft, vorausgesetzt werden, dass die Curven *inextensibel* seien; so dass man also die Curven als zwei *vollkommen biegsame,* aber *unausdehnbare* lineare Ringe sich vorzustellen hat.

Uebrigens werden wir, ausser dem Integral (I.), auch folgendes viel allgemeinere Integral in Betracht ziehen:

$$\text{(II.)} \iint\Big\{[\varphi(r)\Theta\Theta_1 + \psi(r)\mathsf{E}]dr + f(r)\Theta_1 d\Theta + g(r)\Theta d\Theta_1 + h(r)d\mathsf{E}\Big\} Ds\, Ds_1,$$

wo dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ die Zuwüchse von r, Θ, Θ_1, E während der Zeit dt vorstellen sollen. Dabei kommen alsdann im Ganzen fünf unbekannte Functionen $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$ in Betracht. Und es handelt sich dabei wiederum um die Frage, von welcher Beschaffenheit diese fünf Functionen sein müssen, damit das Integral (II.) bei beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen jener beiden inextensiblen Curven stets *gleich Null* ist.



§ 1.

Einige einfache Hülfsformeln.

Wir halten fest an unseren bisherigen Vorstellungen und Bezeichnungen [vgl. Seite 5], und denken uns irgend zwei Functionen gegeben:

$$(\text{p.})\qquad \begin{aligned} f &= f(x, y, z, x_1, y_1, z_1), \\ F &= F(x, y, z, x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Alsdann ist offenbar identisch:

$$f\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s_1} - F\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left(f\frac{\partial F}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(F\frac{\partial f}{\partial s}\right),$$

und folglich:

$$(\text{q.})\qquad \iint\left(f\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s_1} - F\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s_1}\right) Ds Ds_1 = 0,$$

vorausgesetzt, dass jede der betrachteten beiden Curven eine *geschlossene* ist. Aus (q.) ergiebt sich z. B. für $f = 1$ die Formel:

$$(\text{A.})\qquad \iint \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s_1} Ds Ds_1 = 0.$$

Setzt man ferner in (q.) die Function $f = x - x_1$, mithin

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{Dx}{Ds} = A$$

[vgl. Seite 5], mithin $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s_1} = 0$, so folgt:

$$(\text{B.})\qquad \iint (x - x_1)\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s_1} Ds Ds_1 = 0.$$

Setzt man endlich in (q.) die Function $f = yz_1 - zy_1$, mithin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s_1} = BC_1 - CB_1$$

[vgl. Seite 5], so erhält man:

$$(\text{C.})\qquad \iint\left\{(yz_1 - zy_1)\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s_1} - F(BC_1 - CB_1)\right\} Ds Ds_1 = 0.$$

Diese Formeln (A.), (B.), (C.) wollen wir jetzt einer noch weiteren Specialisirung unterwerfen, indem wir $F = F(R)$ setzen, wo R seine bekannte Bedeutung haben soll:

$$R = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Alsdann ist offenbar [vgl. Seite 13 (γ.)]:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial s_1} = -4R\frac{d^2 F}{dR^2}\Theta\Theta_1 - 2\frac{dF}{dR}\mathsf{E};$$

so dass also in diesem Fall die Formeln (A.), (B.), (C.) folgende Gestalt erhalten:

(a.) $$\iint\left(2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1+\frac{dF}{dR}\,\mathsf{E}\right)DsDs_1=0,$$

(b.) $$\iint(x-x_1)\left(2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1+\frac{dF}{dR}\,\mathsf{E}\right)DsDs_1=0,$$

(c.) $$\iint\left\{(yz_1-zy_1)\left(2R\frac{d^2F}{dR^2}\,\Theta\Theta_1+\frac{dF}{dR}\,\mathsf{E}\right)+F\left(\frac{BC_1-CB_1}{2}\right)\right\}DsDs_1=0,$$

wo überall $F=F(R)$.

Setzt man endlich diese Function F geradezu $=R$, so gewinnen die Formeln (a.), (b.), (c.) folgende einfachere Gestalt:

(α.) $$\iint\mathsf{E}\,DsDs_1=0,$$

(β.) $$\iint(x-x_1)\,\mathsf{E}\,DsDs_1=0,$$

(γ.) $$\iint\left\{(yz_1-zy_1)\,\mathsf{E}+R\left(\frac{BC_1-CB_1}{2}\right)\right\}DsDs_1=0.$$

Von diesen neun Formeln (A.), (B.), (C.), (a.), (b.), (c.), (α.), (β.), (γ.) ist weiterhin Gebrauch zu machen.

§ 2.

Ueber das Verschwinden eines mit dem zeitlichen Zuwachs dr behafteten Integrals.

Es sei vorgelegt ein über zwei geschlossene Curven s und s_1 ausgedehntes Integral:

(1.) $$J=\iint(f\,\Theta\Theta_1+g\,\mathsf{E})\,dR\cdot DsDs_1,$$

in welchem $f=f(R)$ und $g=g(R)$ ist. Dieses Integral soll völlig analog gedacht werden dem schon besprochenen Integrale (I.) Seite 22, nur mit dem Unterschiede, dass, an Stelle von r, die Grösse $R=r^2$ eingeführt ist. Die geschlossenen Curven s und s_1 sollen also angesehen werden als zwei *unausdehnbare*, *biegsame* lineare Ringe, die *in irgend welchen Bewegungen begriffen* sind, und die daher im Laufe dieser Bewegungen im Allgemeinen auch irgend welche Gestaltsveränderungen erleiden werden.

Wir wollen nun *annehmen*, dass das Integral J (1.) für *beliebige Gestalten* und *beliebige Bewegungen* dieser beiden Ringe stets $=0$ ist, und die aus dieser Annahme für die Functionen $f=f(R)$ und $g=g(R)$ entspringenden Consequenzen zu entwickeln suchen.

Aus dieser Annahme folgt, dass J z. B. auch dann $=0$ bleibt, wenn man die beiden Ringe wie *zwei starre Körper* sich bewegen lässt, und ebenso auch dann, wenn man *einen* von diesen beiden starren Körpern als *unbeweglich* sich denkt. Mit andern Worten: Aus unserer



Annahme folgt, dass $J = 0$ sein wird, wenn man irgend einen speciellen Punkt des Ringes s mit (x_0, y_0, z_0) bezeichnet, und sodann während der Zeit dt sämmtlichen Punkten (x, y, z) des Ringes s und sämmtlichen Punkten (x_1, y_1, z_1) des Ringes s_1 folgende Verschiebungen zuertheilt:

$$\begin{cases} dx = dx_0 + (z - z_0)d\mathfrak{b} - (y - y_0)d\mathfrak{c}, \\ dy = dy_0 + (x - x_0)d\mathfrak{c} - (z - z_0)d\mathfrak{a}, \\ dz = dz_0 + (y - y_0)d\mathfrak{a} - (x - x_0)d\mathfrak{b}, \end{cases} \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dy_1 = 0, \\ dz_1 = 0. \end{cases}$$

Hier*) bezeichnen alsdann dx_0, dy_0, dz_0 die der Zeit dt entsprechenden Verschiebungen jenes speciellen Punktes (x_0, y_0, z), und $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ diejenigen kleinen Drehungen, welche der (als starr betrachtete) Ring s während der Zeit dt erleidet um die Coordinatenaxen x, y, z, respective im Sinne yz, zx, xy.

Es handelt sich für uns vorläufig nur um die Bewegung vom Augenblick t bis zum Augenblick $t + dt$, und wir können daher die vorstehenden Formeln dadurch vereinfachen, dass wir der Betrachtung ein Axensystem zu Grunde legen, dessen Anfangspunkt *im Augenblick* t mit jenem speciellen Punkte (x_0, y_0, z_0) des Ringes s zusammenfällt. Alsdann sind x_0, y_0, z_0 in jenem Augenblick t alle drei $= 0$; so dass also dann die vorstehenden Formeln folgende einfachere Gestalt gewinnen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} dx = dx_0 + z d\mathfrak{b} - y d\mathfrak{c}, \\ dy = dy_0 + x d\mathfrak{c} - z d\mathfrak{a}, \\ dz = dz_0 + y d\mathfrak{a} - x d\mathfrak{b}, \end{cases} \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dy_1 = 0, \\ dz_1 = 0. \end{cases}$$

Nun ist $R = r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$; so dass also der in (1.) enthaltene, dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs dR den Werth hat:

$$dR = 2[(x - x_1)(dx - dx_1) + (y - y_1)(dy - dy_1) + (z - z_1)(dz - dz_1)].$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (2.) sofort:

$$dR = 2[(x - x_1)\,dx_0 + (y - y_1)\,dy_0 + (z - z_1)\,dz_0] \\ + 2\Big[\big(y(z - z_1) - z(y - y_1)\big)\,d\mathfrak{a} + \cdots\Big],$$

oder was dasselbe ist:

$$dR = 2[(x - x_1)\,dx_0 + (y - y_1)\,dy_0 + (z - z_1)\,dz_0] \\ - 2[yz_1 - zy_1)\,d\mathfrak{a} + (zx_1 - xz_1)\,d\mathfrak{b} + (xy_1 - yx_1)\,d\mathfrak{c}].$$

Dies in (1.) substituirt giebt:

$$(3.) \quad J = 2(U_0 dx_0 + V_0 dy_0 + W_0 dz_0) - 2(U d\mathfrak{a} + V d\mathfrak{b} + W d\mathfrak{c}),$$

*) Näheres über diese Formeln findet man weiterhin in § 2 des siebenten Abschnittes.

wo alsdann z. B. U_0 und U folgende Bedeutungen haben:

$$U_0 = \iint (f\Theta\Theta_1 + g\mathsf{E})(x - x_1)\,Ds\,Ds_1,$$

$$U = \iint (f\Theta\Theta_1 + g\mathsf{E})(yz_1 - zy_1)\,Ds\,Ds_1.$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke mag, an Stelle von $f = f(R)$, eine neue Function $F = F(R)$ eingeführt werden, mittelst der Substitution

$$f = 2R\frac{d^2F}{dR^2}. \tag{4.}$$

Alsdann ergiebt sich:

$$U_0 = \iint \left(2R\frac{d^2F}{dR^2}\Theta\Theta_1 + g\mathsf{E}\right)(x - x_1)\,Ds\,Ds_1,$$

$$U = \iint \left(2R\frac{d^2F}{dR^2}\Theta\Theta_1 + g\mathsf{E}\right)(yz_1 - zy_1)\,Ds\,Ds_1.$$

Diese Formeln aber gewinnen, mittelst der allgemeinen Gleichungen (b.), (c.) Seite 24, die einfachere Gestalt:

$$U_0 = \iint \left(g - \frac{dF}{dR}\right)\mathsf{E}(x - x_1)\,Ds\,Ds_1, \tag{5.}$$

$$U = \iint \left(g - \frac{dF}{dR}\right)\mathsf{E}(yz_1 - zy_1)\,Ds\,Ds_1 - \iint F\left(\frac{BC_1 - CB_1}{2}\right)Ds\,Ds_1. \tag{6.}$$

Zufolge unserer Annahme muss nun das Integral J für ganz beliebige Werthe der Verschiebungen dx_0, dy_0, dz_0 und der Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ stets $= 0$ sein. Somit folgt aus (3.), dass die dortigen Coefficienten U_0, V_0, W_0, U, V, W einzeln $= 0$ sind.

Solches constatirt ergiebt sich aus (5.), mittelst des Theorems Seite 18 (36.), dass $\left(g - \frac{dF}{dR}\right)$ eine *Constante* sein muss*); so dass man also schreiben kann:

$$g - \frac{dF}{dR} = K, \tag{7.}$$

wo K eine unbekannte Constante bezeichnet. Hiedurch aber erhält die Formel (6.) die Gestalt:

$$U = K\iint \mathsf{E}(yz_1 - zy_1)\,Ds\,Ds_1 - \iint F\left(\frac{BC_1 - CB_1}{2}\right)Ds\,Ds_1;$$

und hieraus ergiebt sich unter Anwendung der allgemeinen Gleichung (γ.) Seite 24 sofort:

---

*) Die Anwendbarkeit jenes Theorems kann hier keinem Zweifel unterliegen. Es ist nämlich im Auge zu behalten, dass das Integral J nach unserer Annahme für *beliebige* und *in beliebiger Bewegung begriffene* inextensible Ringe stets verschwindet. Ein solches Verschwinden wird daher, nach dieser Annahme, auch dann stattfinden, wenn man die beiden in beliebigen Bewegungen begriffenen Ringe mit irgend zwei andern solchen Ringen vertauscht, die ebenfalls in beliebigen Bewegungen begriffen sind.

$$U = -\iint (KR + F) \left(\frac{BC_1 - CB_1}{2}\right) Ds Ds_1,$$

oder, falls man für B, C, B_1, C_1 ihre bekannten Werthe (a.), (b.) Seite 5 einsetzt:

(8.) $$U = -\tfrac{1}{2} \iint (KR + F)(Dy Dz_1 - Dz Dy_1).$$

Nun ist aber U, wie vorhin constatirt wurde, stets $= 0$. Somit folgt aus der Formel (8.), unter Anwendung des Theorems Seite 20 (11.), dass der Ausdruck $(KR + F)$ eine *Constante* sein muss*). Bezeichnet man diese neue (ebenfalls unbekannte) Constante mit K', so wird also sein:

(9.) $$KR + F = K'.$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$K + \frac{dF}{dR} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 F}{dR^2} = 0,$$

also mit Hinblick auf (7.) und (4.):

(10.) $$g = 0 \quad \text{und} \quad f = 0.$$

Diese Formeln (10.) repräsentiren also die schliesslichen Consequenzen jener von uns gemachten Annahme; und wir können daher sagen:

Sollen die Functionen $f = f(R)$ und $g = g(R)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

(11.) $$\iint (f \Theta \Theta_1 + g \mathsf{E})\, dR \cdot Ds Ds_1$$

für zwei *beliebige* und *in beliebiger Bewegung begriffene* inextensible Ringe stets $= 0$ ist, so müssen jene Functionen f und g nothwendiger Weise beide $= 0$ sein. Selbstverständlich gilt auch der umgekehrte Satz. Denn wenn f und g beide $= 0$ sind, so wird offenbar das Integral ebenfalls $= 0$ sein.

Nun kann man r statt R einführen. Es ist $R = r^2$, mithin $dR = 2r\,dr$. Setzt man also $2rf = \varphi$ und $2rg = \psi$, so gelangt man zu folgendem Theorem:

Theorem. — *Sollen die Functionen $\varphi = \varphi(r)$ und $\psi = \psi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

(12.) $$\iint (\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E})\, dr \cdot Ds Ds_1$$

für zwei beliebige und in beliebiger Bewegung begriffene inextensible Ringe stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene Functionen φ und ψ beide identisch $= 0$ sind.

---

*) Was die Anwendbarkeit jenes Theorems auf den hier vorliegenden Fall betrifft, so ist von Neuem hinzuweisen auf die vorhergehende Note.

Nach (h.), (j.) Seite 6 ist:

$$\Theta\Theta_1 = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} \quad \text{und} \quad \mathsf{E} = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right).$$

Das in (12.) in den Klammern enthaltene Binom ist daher auch so darstellbar:

$$-\left((\varphi + \psi)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + r\psi\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right).$$

Setzt man also $\varphi + \psi = \Phi$ und $r\psi = \Psi$, so kann man das Theorem auch so aussprechen:

Dasselbe Theorem in etwas anderer Gestalt. — *Sollen zwei Functionen $\Phi = \Phi(r)$ und $\Psi = \Psi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral*

$$(13.) \qquad \iint\left(\Phi\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + \Psi\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right) dr \cdot Ds Ds_1$$

für zwei beliebige und in beliebiger Bewegung begriffene inextensible Ringe stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene Functionen Φ und Ψ beide identisch $= 0$ sind.

Bemerkung. — Man übersieht leicht, dass dieses Theorem (12.), (13.) auch noch gilt für *extensible,* also während der Bewegung nicht blos sich biegende sondern auch sich ausdehnende Ringe. Wenn ich trotzdem bei Aufstellung und Aussprache des Theorems auf *inextensible* Ringe mich beschränkt habe, so ist das geschehen erstens, weil das Theorem in dieser Beschränkung unseren Bedürfnissen bereits genügt, dann aber zweitens auch der grösseren Gleichförmigkeit willen. In der That wird bei den folgenden Untersuchungen (wie z. B. bei denen des nächsten Paragraphs) hin und wieder eine Beschränkung auf inextensible Ringe wirklich geboten sein.

§ 3.

Transformation eines gewissen Differentialausdrucks.

Auf zwei gegebenen Curven mögen zwei Punkte markirt sein respective mit den Bogenlängen s und s_1. Alsdann werden die zugehörigen Ampère'schen Argumente

$$(1.) \qquad r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E}$$

Functionen sein von s und s_1. Sind die beiden Curven aber in irgend welchen Bewegungen und Gestaltsveränderungen begriffen, so werden diese Ampère'schen Argumente nicht blos von s, s_1, sondern überdies auch noch von der Zeit t abhängen.

Wir werden nun im Folgenden die beiden Curven als *inextensibel* voraussetzen. Alsdann sind s und s_1 unabhängig von t; so dass man also s, s_1, t kurzweg als *independente Variable* zu bezeichnen hat.



Für die partiellen Ableitungen von r nach s und s_1 gelten bekanntlich die Formeln [vgl. Seite 6 (h.), (j.)]:

$$(2.)\qquad \frac{\partial r}{\partial s} = \Theta, \quad \frac{\partial r}{\partial s_1} = -\Theta_1, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} = \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r};$$

woraus durch Umkehrung folgt:

$$(3.)\qquad \Theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \Theta_1 = -\frac{\partial r}{\partial s_1}, \quad \mathsf{E} = -\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right).$$

Andererseits mag, was die partiellen Ableitungen nach t betrifft, in voller Uebereinstimmung mit unserer bisherigen Bezeichnungsweise gesetzt werden:

$$(4.)\qquad \frac{\partial r}{\partial t}dt = dr, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t}dt = d\Theta, \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial t}dt = d\Theta_1, \quad \frac{\partial \mathsf{E}}{\partial t}dt = d\mathsf{E}.$$

Denkt man sich also z. B. die Curven materiell, etwa als zwei dünne Drähte, und auf diesen Drähten die Punkte mit den Bogenlängen s und s_1 durch bestimmte *Marken* (etwa durch feine Einschnitte in die Drahtoberfläche) kenntlich gemacht, so wird das in (4.) angegebene dr denjenigen Zuwachs repräsentiren, den die gegenseitige Entfernung r dieser beiden Marken während der Zeit dt erfährt.

Es seien nun fünf Functionen von r gegeben:

$$\varphi = \varphi(r), \quad \psi = \psi(r), \quad f = f(r), \quad g = g(r), \quad h = h(r).$$

Wir stellen uns die Aufgabe, den Differentialausdruck:

$$(5.)\qquad \Delta = (\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E})dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + hd\mathsf{E}$$

in folgende Form zu bringen:

$$\Delta = Edr + \frac{\partial(Fdr)}{\partial s} + \frac{\partial(Gdr)}{\partial s_1} + \frac{\partial^2(Hdr)}{\partial s \partial s_1},$$

wo E, F, G, H noch unbekannte Functionen von s, s_1, t vorstellen sollen.

Zu diesem Zwecke substituire man in (5.) die Werthe (3.). Hiedurch ergiebt sich sofort:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \Delta = &-\left[\varphi\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + \psi\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right)\right]dr \\ &- f\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial(dr)}{\partial s} - g\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial(dr)}{\partial s_1} \\ &- h\left\{\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial(dr)}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial(dr)}{\partial s_1} + \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}dr + r\frac{\partial^2(dr)}{\partial s \partial s_1}\right\}, \end{aligned}$$

oder besser geordnet:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \Delta = &-\left[(\varphi + \psi)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + (r\psi + h)\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right]dr \\ &- (f + h)\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial(dr)}{\partial s} - (g + h)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial(dr)}{\partial s_1} - rh\frac{\partial^2(dr)}{\partial s \partial s_1}. \end{aligned}$$

Es handelt sich nun also darum, diesen Ausdruck (7.) in jene verlangte Form, d. i. in die Form:

$$\Delta = \left(E + \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial s_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial s_1}\right) dr$$
$$+ \left(F + \frac{\partial H}{\partial s_1}\right) \frac{\partial (dr)}{\partial s} + \left(G + \frac{\partial H}{\partial s}\right) \frac{\partial (dr)}{\partial s_1} + H \frac{\partial^2 (dr)}{\partial s \partial s_1}$$

zu versetzen. Das aber wird offenbar erreicht werden, wenn man die Unbekannten E, F, G, H folgenden vier Bedingungen unterwirft:

$$(8.)\quad \begin{cases} H = -rh, \\ G + \dfrac{\partial H}{\partial s} = -(g+h)\dfrac{\partial r}{\partial s}, \\ F + \dfrac{\partial H}{\partial s_1} = -(f+h)\dfrac{\partial r}{\partial s_1}, \\ E + \dfrac{\partial F}{\partial s} + \dfrac{\partial G}{\partial s_1} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial s \partial s_1} = -\left[(\varphi + \psi)\dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial s_1} + (r\psi + h)\dfrac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\right]. \end{cases}$$

Aus diesen vier Gleichungen (8.) bestimmen sich nun der Reihe nach zuerst der Werth von H, sodann der von G, endlich die Werthe von F und E. Und durch Ausführung dieser ganz elementaren Rechnungen gelangt man alsdann schliesslich zu folgendem Resultat:

Transformation. — *Sind fünf Functionen:*

$$\varphi = \varphi(r), \quad \psi = \psi(r), \quad f = f(r), \quad g = g(r), \quad h = h(r)$$

in beliebiger Weise gegeben, so wird der Differentialausdruck

$$(9.)\qquad \Delta = [\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}]\, dr + f \Theta_1 d\Theta + g \Theta d\Theta_1 + h d\mathsf{E}$$

in folgende Form versetzbar sein:

$$(10.)\qquad \Delta = E dr + \frac{\partial (F dr)}{\partial s} + \frac{\partial (G dr)}{\partial s_1} + \frac{\partial^2 (H dr)}{\partial s \partial s_1},$$

wo E, F, G, H die Bedeutungen haben:

$$(11.)\quad \begin{cases} E = \left(\dfrac{d(f+g)}{dr} - r\dfrac{d^2 h}{dr^2} - (\varphi + \psi)\right)\dfrac{\partial r}{\partial s}\dfrac{\partial r}{\partial s_1} + \left((f+g) - r\dfrac{dh}{dr} - r\psi\right)\dfrac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}, \\ F = \left(r\dfrac{dh}{dr} - f\right)\dfrac{\partial r}{\partial s_1}, \\ G = \left(r\dfrac{dh}{dr} - g\right)\dfrac{\partial r}{\partial s}, \\ H = -rh. \end{cases}$$

In der ersten dieser vier Formeln (11.) bezeichne man die in den Klammern enthaltenen *Trinome* mit $(-L)$ und mit $(-M)$. Alsdann gewinnt jene erste Formel die Gestalt:

$$E = -L\,\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} - M\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}.$$

Dieser Werth von E ist mit Rücksicht auf (2.) auch so darstellbar: $E = L\Theta\Theta_1 - M\dfrac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r}$, oder auch so:

$$E = \left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}.$$

Gleichzeitig werden alsdann L und M folgende Bedeutungen haben:

$$L = (\varphi + \psi) + r\frac{d^2h}{dr^2} - \frac{d(f+g)}{dr},$$

$$M = r\psi + r\frac{dh}{dr} - (f+g);$$

woraus z. B. sich ergiebt:

$$L - \frac{dM}{dr} = \varphi - r\frac{d\psi}{dr} - \frac{dh}{dr}.$$

Demgemäss kann man den Satz (9.), (10.), was für seine Anwendung zuweilen bequemer sein wird, auch folgendermassen aussprechen:

Dieselbe Transformation in etwas anderer Gestalt. — *Sind fünf Functionen:*

$$\varphi = \varphi(r),\quad \psi = \psi(r),\quad f = f(r),\quad g = g(r),\quad h = h(r)$$

in beliebiger Weise gegeben, so wird der Differentialausdruck:

(12.) $$\Delta = [\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h d\mathsf{E}$$

in die Form versetzbar sein:

(13.) $$\Delta = \left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right]dr + \frac{\partial(F dr)}{\partial s} + \frac{\partial(G dr)}{\partial s_1} + \frac{\partial^2(H dr)}{\partial s\partial s_1}.$$

Dabei sind alsdann L, M und F, G, H definirt zu denken durch folgende Formeln:

(14.) $$\begin{cases} L = (\varphi + \psi) + r\dfrac{d^2h}{dr^2} - \dfrac{d(f+g)}{dr}, \\ M = r\psi + r\dfrac{dh}{dr} - (f+g), \\ L - \dfrac{dM}{dr} = \varphi - r\dfrac{d\psi}{dr} - \dfrac{dh}{dr}, \end{cases} \qquad \begin{cases} F = -\left(r\dfrac{dh}{dr} - f\right)\Theta_1, \\ G = +\left(r\dfrac{dh}{dr} - g\right)\Theta, \\ H = -rh; \end{cases}$$

so dass also z. B. L, M und H blosse Functionen von r sind.

Wir wollen uns nun die betrachteten beiden Curven *geschlossen* denken; so dass wir also zwei in beliebiger Bewegung begriffene *inextensible Ringe* vor uns haben. Alsdann wird das über diese beiden Ringe ausgedehnte, und auf irgend ein Zeitelement dt ihrer Bewegung sich beziehende Integral

$$J = \iint\left\{[\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h d\mathsf{E}\right\} Ds\, Ds_1,$$

auf Grund des Satzes (12.), (13.), in die Gestalt versetzbar sein:

$$J = \iint\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right]dr \cdot Ds\, Ds_1;$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Transformation. — *Sind fünf Functionen:*

$$\varphi = \varphi(r),\quad \psi = \psi(r),\quad f = f(r),\quad g = g(r),\quad h = h(r)$$

in beliebiger Weise gegeben, und sind überdies zwei in beliebiger Bewegung begriffene inextensible Ringe gegeben, so wird für jedes Zeitelement dt dieser Bewegung die Formel gelten:

$$(15.)\quad \iint\Big\{[\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h\,d\mathsf{E}\Big\}\,Ds\,Ds_1 = \\ = \iint\Big[\Big(L - \frac{M}{r}\Big)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\Big]\,dr\cdot Ds\,Ds_1,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds und Ds_1 der beiden Ringe.

Dabei bezeichnen L und M blosse Functionen von r. Es ist nämlich:

$$(16.)\quad \begin{cases} L = (\varphi + \psi) + r\,\dfrac{d^2h}{dr^2} - \dfrac{d(f+g)}{dr}, \\ M = r\psi + r\,\dfrac{dh}{dr} - (f+g), \end{cases}$$

und wie hieraus folgt:

$$(17.)\quad L - \frac{dM}{dr} = \varphi - r\,\frac{d\psi}{dr} - \frac{dh}{dr}.$$

Durch diese Transformation (15.) *wird, wie man sieht, ein mit den zeitlichen Zuwüchsen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ behaftetes Integral auf ein anderes Integral reducirt, welches nur noch mit einem dieser Zuwüchse, nämlich nur mit dr behaftet ist.*

§ 4.

Ueber das Verschwinden eines mit den zeitlichen Zuwüchsen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ behafteten Integrals.

Sollen nun die Functionen φ, ψ, f, g, h von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral (15.) für *beliebige* und *in beliebiger Bewegung begriffene* inextensible Ringe stets verschwindet, so ist dazu [nach dem Theorem Seite 27 (12.)] erforderlich und ausreichend, dass die Functionen

$$L - \frac{M}{r} \quad \text{und} \quad \frac{M}{r}$$

beide identisch $= 0$ sind. Diese Bedingung ist aber offenbar äquivalent mit der, dass L und M selber beide identisch $= 0$ sind; so dass man also, indem man für L und M ihre eigentlichen Bedeutungen (16.) substituirt, zu folgendem Theorem gelangt:

Erstes Theorem. — *Sollen die fünf Functionen*

$$\varphi = \varphi(r),\quad \psi = \psi(r),\quad f = f(r),\quad g = g(r),\quad h = h(r)$$

von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$(18.)\quad \iint\Big\{[\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h\,d\mathsf{E}\Big\}\,Ds\,Ds_1$$

für zwei beliebige und in beliebiger Bewegung begriffene inextensible Ringe stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass zwischen jenen fünf Functionen folgende beide Relationen stattfinden:

$$(19.)\quad \begin{cases} \varphi + \psi = \dfrac{d(f+g)}{dr} - r\,\dfrac{d^2h}{dr^2}, \\ r\psi = (f+g) - r\,\dfrac{dh}{dr}. \end{cases}$$

Man kann z. B. $g = h =$ Null machen, so dass also nur noch drei Functionen übrig bleiben:

$$\varphi = \varphi(r), \quad \psi = \psi(r), \quad f = f(r).$$

Alsdann lautet das Theorem folgendermassen: Sollen diese drei Functionen φ, ψ, f von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$(20.)\quad \iint \Big\{ [\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta \Big\}\, Ds\, Ds_1$$

für zwei beliebige und in beliebiger Bewegung begriffene inextensible Ringe stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass φ, ψ, f den beiden Relationen entsprechen:

$$(21.)\quad \begin{cases} \varphi + \psi = \dfrac{df}{dr}, \\ r\psi = f. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf unsere späteren Bedürfnisse wird es gut sein, in diesen einfachen Betrachtungen noch einen Schritt weiter zu gehen. Und zwar wollen wir denjenigen Ausdruck

$$J = Ds_1 \cdot \int \Big\{ [\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta \Big\}\, Ds$$

uns vorgelegt denken, in welchen das Integral (20.) sich verwandeln würde, wenn man daselbst den Ring s_1 auf ein einzelnes Linienelement Ds_1 reduciren wollte. Dieser Ausdruck bezieht sich also auf zwei Objecte, auf den inextensiblen Ring s und auf das Linienelement Ds_1.

Nimmt man nun an, dass der Ausdruck J bei *beliebiger Wahl* und bei *beliebiger Bewegung* dieser beiden Objecte stets verschwindet, so folgt hieraus (durch Summation) sofort, dass das über zwei inextensible Ringe ausgedehnte Integral

$$\iint \Big\{ [\varphi \Theta \Theta_1 + \psi \mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta \Big\}\, Ds\, Ds_1$$

bei beliebiger Wahl und bei beliebiger Bewegung dieser beiden Ringe ebenfalls stets $= 0$ ist. Und hieraus folgt alsdann weiter, auf Grund des Theoremes (20.), (21.), dass zwischen φ, ψ und f die Relationen stattfinden müssen:

(R.)
$$\begin{cases} \varphi + \psi = \frac{df}{dr}, \\ r\psi = f. \end{cases}$$

Und umgekehrt wird, falls diese Relationen (R.) erfüllt sind, der Ausdruck J stets verschwinden. Denn es ist jener Ausdruck J, mittelst der Transformation (12.), (13.), (14.), in die Gestalt versetzbar:

$$J = Ds_1 \cdot \int \left\{ \left[\left(L - \frac{M}{r} \right) \Theta\Theta_1 + \frac{M}{r} \mathsf{E} \right] dr + \frac{\partial (F\,dr)}{\partial s} \right\} Ds$$

wo L, M, F die Bedeutungen haben:

$$L = (\varphi + \psi) - \frac{df}{dr},$$
$$M = r\psi - f. \quad \text{und} \quad F = f\Theta_1.$$

Zufolge der Relationen (R.) sind aber diese Ausdrücke L, M beide $= 0$; so dass also der Ausdruck J den Werth:

$$J = Ds_1 \cdot \int \frac{\partial (F\,dr)}{\partial s} Ds$$

d. i. den Werth: $J = 0$ erhält. — *Q. e. d.*

Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Zweites Theorem. — *Sollen die Functionen:*

$$\varphi = \varphi(r), \quad \psi = \psi(r), \quad f = f(r)$$

von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

(22.)
$$Ds_1 \cdot \int \left\{ [\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]\, dr + f\Theta_1 d\Theta \right\} Ds$$

für einen inextensiblen Ring s und für ein einzelnes Linienelement Ds_1, bei beliebiger Wahl und beliebiger Bewegung dieser beiden Objecte, stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass jene drei Functionen miteinander verbunden sind durch die beiden Relationen:

(23.)
$$\begin{cases} \varphi + \psi = \frac{df}{dr}, \\ r\psi = f. \end{cases}$$

In genau derselben Weise wird offenbar das beständige Verschwinden des Integrals

(24.)
$$Ds \cdot \int \left\{ [\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]\, dr + g\Theta d\Theta_1 \right\} Ds_1$$

zusammenhängen mit den Relationen:

(25.)
$$\begin{cases} \varphi + \psi = \frac{dg}{dr}, \\ r\psi = g. \end{cases}$$

Bemerkung. — Die Relationen (23.) sind erfüllt, wenn $\varphi = \frac{2}{r^2}$, $\psi = -\frac{1}{r^2}$ und $f = -\frac{1}{r}$ gesetzt wird. Aus dem Satze (22.), (23.) ergiebt sich daher, dass

$$(\alpha.)\qquad Ds_1 \cdot \int \left(\frac{2\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r^2}\, dr - \frac{\Theta_1\, d\Theta}{r} \right) Ds \text{ stets } = 0$$

ist. — Desgleichen wird offenbar aus dem Satze (24.), (25.) sich ergeben:

$$(\beta.)\qquad Ds \cdot \int \left(\frac{2\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r^2}\, dr - \frac{\Theta\, d\Theta_1}{r} \right) Ds_1 = 0.$$

Leicht ist es, diese speciellen Formeln (α.), (β.) auf *directem* Wege abzuleiten.

Dritter Abschnitt.

Ausdehnung der angestellten Untersuchungen auf geschlossene Curven, die mit Gleitstellen behaftet sind.

Drei übereinander gelegte gerade Linien bilden im Allgemeinen ein Dreieck mit verlängerten Seiten. Diese Figur sei nun im Raume in beliebiger Bewegung begriffen, der Art, dass jene drei geraden Linien im Laufe der Zeit sich gegeneinander verschieben, auf einander *gleiten;* so dass man also jede Ecke des Dreiecks als *Gleitpunkt* oder *Gleitstelle* bezeichnen darf.

Diese einfachen Vorstellungen wollen wir jetzt in doppelter Weise verallgemeinern, indem wir einerseits die Zahl 3 durch eine beliebige ganze Zahl n, andrerseits aber die geraden Linien durch krumme biegsame Linien ersetzen.

Alsdann haben wir n Curven vor uns:

$$(\alpha.) \qquad S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ S_{n-1},\ S_n,$$

die in beliebigen Bewegungen und Gestaltsveränderungen begriffen sind, jedoch der Art, dass fortdauernd S_1 mit S_2, ferner S_2 mit S_3, u. s. w., endlich S_{n-1} mit S_n, und S_n mit S_1 in Contact bleibt. Die n Contactpunkte:

$$(\beta.) \quad (S_1,\ S_2),\ \ (S_2,\ S_3),\ \ (S_3,\ S_4),\ \ldots\ (S_{n-1},\ S_n),\ \ (S_n,\ S_1)$$

sind die sogenannten Gleitpunkte oder Gleitstellen. Dabei wird das in jedem Augenblicke von den n Curven gebildete n-Eck als eine geschlossene Curve, oder kürzer als ein *Ring* zu bezeichnen sein.

Jede der n Curven soll biegsam, jedoch inextensibel sein. Auch wird es gut sein, diese Curven als materiell, nämlich als dünne inextensible Drähte anzusehen, so dass man also von den einzelnen Molecülen oder Massenpunkten dieser Curven sprechen darf. Ohne eine solche materielle Vorstellung würde das Epitheton „inextensibel" ja wohl auch kaum einen Sinn haben*).

*) So würde es doch wohl z. B. kaum statthaft sein, von einer *inextensiblen* unendlich langen geraden Linie zu sprechen, falls man sich nicht diese Linie als materiell vorstellt.



Die durch die Aufeinanderfolge (α.) repräsentirte Umlaufsrichtung des Ringes mag die *positive* Richtung des Ringes heissen. Und die mit dieser übereinstimmenden Richtungen der einzelnen Curven mögen die *positiven* Richtungen der einzelnen Curven heissen.

Es sei A_1 ein bestimmtes Molecül der Curve S_1. Und die von A_1 aus auf dieser Curve in ihrer positiven Richtung gerechnete Bogenlänge sei bezeichnet mit s_1. Ist also z. B. J_1 ein auf S_1 gelegener Punkt, so wird die Bogenlänge $s_1 = (A_1 J_1)$ positiv oder negativ sein, je nachdem die Richtung $A_1 \rightarrow J_1$ mit der positiven Richtung der Curve S_1 identisch oder entgegengesetzt ist. Selbstverständlich sollen analoge Bezeichnungen für $S_2, S_3, \ldots S_n$ gelten; so dass also die Formeln zu notiren sind:

$$(1.) \quad s_1 = (A_1 J_1), \quad s_2 = (A_2 J_2), \quad s_3 = (A_3 J_3), \quad \ldots \quad s_n = (A_n J_n);$$

wofür als Collectivformel geschrieben werden kann:

$$(2.) \qquad s = (AJ).$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Untersuchungen des vorigen Abschnitts auszudehnen auf einen solchen mit Gleitstellen behafteten Ring, respective auf mehrere solche Ringe. Charakteristisch für einen derartigen Ring ist, dass während der Bewegung des Ringes im Allgemeinen neue Curvenelemente in denselben eintreten, und alte ausscheiden. Diese eintretenden und ausscheidenden Elemente mögen mit Δs bezeichnet werden, und zwar nach folgender Regel:

Regel. — *Ist von einem während der Zeit dt in den Ring eintretenden Element die Rede, so soll die wirkliche Länge dieses Elementes Δs genannt werden. Ist hingegen von einem ausscheidenden Element die Rede, so soll unter Δs die mit* (— 1) *multiplicirte Länge dieses Elementes verstanden werden.*

§ 1.

Die an den Gleitstellen vorhandenen Unstetigkeiten.

Je zwei aufeinanderfolgende Curven, wie z. B. S_1 und S_2, sind, abgesehen davon, dass sie fortdauernd in gegenseitigem Contact bleiben sollen, in ihren Bewegungen völlig unabhängig von einander; so dass z. B. die eine in Ruhe, und nur die andere in Bewegung sein kann. Dies überträgt sich auf die Elemente der Curven und z. B. auch auf ihre einzelnen Molecüle. Betrachtet man also die räumlichen Geschwindigkeiten der einzelnen Molecüle oder auch die räumlichen Verschiebungen dieser Molecüle während eines gegebenen Zeitelementes, so werden offenbar diese Geschwindigkeiten und Verschiebungen an der



Gleitstelle (S_1, S_2) im Allgemeinen *unstetig* sein, indem sie daselbst für die beideu Curven S_1 und S_2 ganz verschiedene Werthe haben können. Gleiches gilt offenbar von jedem Ausdruck, der von jenen Geschwindigkeiten und Verschiebungen in irgend welcher Weise abhängig ist.

Denkt man sich also z. B. im Raume einen in beliebiger Bewegung begriffenen Massenpunkt O, und überdies den gegebenen Ring, der ebenfalls in beliebiger Bewegung begriffen ist, und bezeichnet man mit r die Abstände des Punktes O von den einzelnen Molecülen der Curven $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$, und bezeichnet man endlich mit dr die Zuwüchse der r während eines gegebenen Zeitelementes dt, so werden allerdings die r längs des ganzen Ringes *stetig* sein. Hingegen werden die

$$dr \tag{3.}$$

längs des Ringes Werthe besitzen, die in den Gleitstellen *unstetig*, nämlich an jeder solchen Gleitstelle mit einem *plötzlichen Sprung* behaftet sind.

Uebrigens wird es bei derartigen Betrachtungen zweckmässig sein, die räumliche Configuration der Objecte

$$O \text{ und } S_1, S_2, S_3, \ldots S_n \tag{4.}$$

sich abhängig zu denken von irgend welchem Parameter p, der seinerseits eine Function der Zeit t ist.

Es sei S irgend eine der Curven $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$, ferner sei m irgend ein Molecül der Curve S, ferner sei s die Bogenlänge dieses Molecüls m [dieselbe gerechnet gedacht von A aus, wie in (1.), (2.) festgesetzt wurde], endlich sei $r = (Om)$ der geradlinige Abstand des Molecüls m vom Punkte O. Alsdann ist offenbar r eine Function von p und s:

$$r = f(p, s). \tag{5.}$$

Das Argument s ist aber eine Constante d. h. von der Zeit unabhängig, weil die Curve S inextensibel sein soll. Jener in (3.) genannte, dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs von r hat daher den Werth:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial p} dp, \tag{5α.}$$

wo dp den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs des Parameters p vorstellt.

Ganz anders gestalten sich die Dinge, wenn man, statt des Molecüls m, einen *idealen Punkt*, nämlich einen längs der Curve S nach irgend welchem Gesetz fortschreitenden Punkt J ins Auge fasst. Ist s die Bogenlänge von J, und setzt man $r = (OJ)$, so wird allerdings wiederum r eine Function von p und s sein:

$$r = F(p, s). \tag{6.}$$



Hingegen wird in diesem Fall der der Zeit dt entsprechende Zuwachs von r — er mag (dr) heissen — dargestellt sein durch die Formel:

$$(6\alpha.) \qquad (dr) = \frac{\partial r}{\partial p} dp + \frac{\partial r}{\partial s} ds,$$

wo dp und ds die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse von p und s vorstellen. Diese Formel $(6\alpha.)$ ist auch so darstellbar:

$$(6\beta.) \qquad (dr) = dr + \frac{\partial r}{\partial s} ds, \quad \text{wo alsdann: } dr = \frac{\partial r}{\partial p} dp.$$

In diesem Sinne sollen die Bezeichnungen (dr) und dr auch weiterhin angewendet werden.

Das in $(6\beta.)$ enthaltene dr kann übrigens aufgefasst werden als der der Zeit dt entsprechende Zuwachs der Entfernung $r = (Om)$, vorausgesetzt, dass man unter m dasjenige Molecül der Curve S versteht, in welchem jener ideale Punkt J zu *Anfang* der Zeit dt sich befindet.

§ 2.

Aufstellung gewisser Formeln für die Gleitstellen.

Statt *eines* idealen Punktes J, wollen wir jetzt *zwei* solche Punkte J_1 und J_2 uns vorstellen, die respective auf S_1 und auf S_2 mit irgend welchen Geschwindigkeiten fortschreiten. Ihre Bogenlängen seien s_1 und s_2. [Vgl. (1.)]. Ferner sei:

$$(7.) \qquad \begin{aligned} r_1 &= (OJ_1), \\ r_2 &= (OJ_2). \end{aligned}$$

Alsdann ist nach $(6\beta.)$:

$$(8.) \qquad \begin{aligned} (dr_1) &= dr_1 + \frac{\partial r_1}{\partial s_1} ds_1, \quad \text{wo} \quad dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial p} dp, \\ (dr_2) &= dr_2 + \frac{\partial r_2}{\partial s_2} ds_2, \quad \text{wo} \quad dr_2 = \frac{\partial r_2}{\partial p} dp. \end{aligned}$$

Ueber die Gesetze, nach denen die idealen Punkte J_1 und J_2 längs der Curven S_1 und S_2 fortschreiten, können wir nach Belieben disponiren. Hievon Gebrauch machend, wollen wir nun festsetzen, *die Bewegung der beiden Punkte J_1 und J_2 solle der Art sein, dass beide fortdauernd mit dem Gleitpunkt (S_1, S_2) coincidiren**).

Alsdann ist offenbar fortdauernd: $(OJ_1) = (OJ_2)$, d. i. $r_1 = r_2$, mithin auch $(dr_1) = (dr_2)$. Somit ergiebt sich aus (8.):

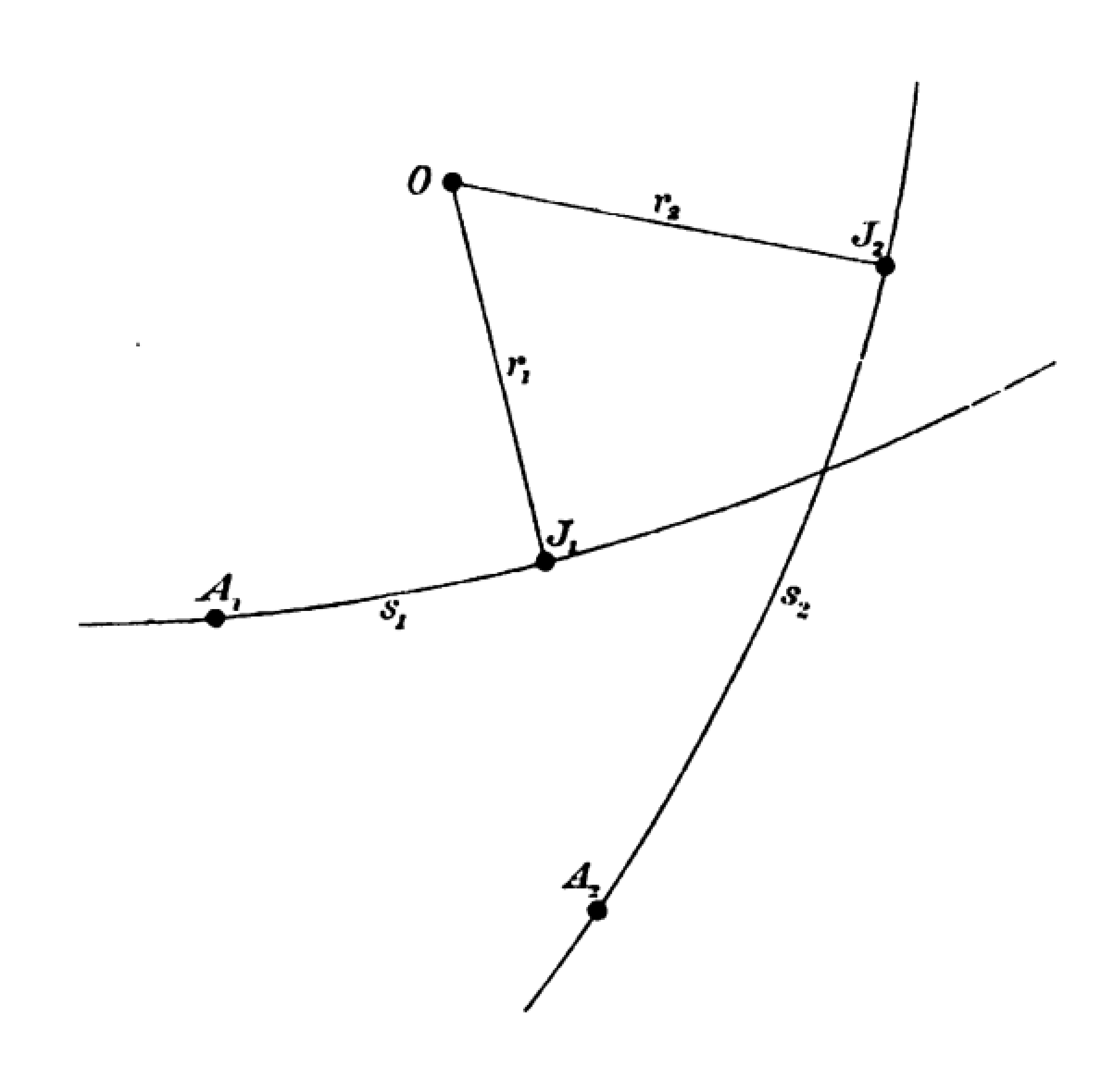
*) Betrachtet man die auf der folgenden Seite angegebene Figur, so wird offenbar der Gleitpunkt (S_1, S_2) derjenige Punkt sein, in welchem die beiden dort gezeichneten Curven S_1 und S_2 einander schneiden. Zugleich sei bemerkt, dass in dieser Figur s_1 und s_2 die *Bogenlängen* der Punkte J_1 und J_2 vorstellen, dass also $s_1 = (A_1 J_1)$ und $s_2 = (A_2 J_2)$ sein soll.

$$dr_1 + \frac{\partial r_1}{\partial s_1} ds_1 = dr_2 + \frac{\partial r_2}{\partial s_2} ds_2, \tag{9.}$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$dr_1 - dr_2 = -\left(\frac{\partial r_1}{\partial s_1} ds_1 - \frac{\partial r_2}{\partial s_2} ds_2\right). \tag{10.}$$

Die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse ds_1 und ds_2 besitzen sehr einfache geometrische Bedeutungen. Denken wir uns nämlich in die angegebene Vorstellung, nach welcher J_1 und J_2 fortdauernd mit



dem Punkte (S_1, S_2) coincidiren, wirklich hinein, und etwa auch die Figur dementsprechend abgeändert, so erkennen wir leicht, dass jeder von den Zuwüchsen ds_1 und ds_2 im Wesentlichen nichts anderes ist, als ein während jener Zeit dt an der Gleitstelle (S_1, S_2) in den Ring eintretendes oder aus ihm ausscheidendes Curvenelement.

Und zwar wird (wie unmittelbar aus der geometrischen Anschauung folgt) der Zuwachs ds_1, falls er *positiv* ist, die Länge eines *eintretenden* Curvenelementes sein, und falls er *negativ* ist, die mit (-1) multiplicirte Länge eines *ausscheidenden* Elementes vorstellen. Zufolge unserer Regel [Seite 37] ist daher im einen wie im andern Fall:

$$ds_1 = \Delta s_1. \tag{11.}$$

Umgekehrt liegen die Dinge bei ds_2. Dieser Zuwachs ds_2 wird nämlich (wie ebenfalls die geometrische Vorstellung sofort erkennen lässt), falls er *positiv* ist, die Länge eines *ausscheidenden* Elementes, und, falls er *negativ* ist, die mit (-1) multiplicirte Länge eines *ein-*



tretenden Elementes vorstellen. Zufolge unsrer Regel [Seite 37] ist daher im einen wie im andern Fall:

$$ds_2 = -\Delta s_2. \tag{12.}$$

Durch (11.), (12.), geht die Gleichung (10.) über in:

$$dr_1 - dr_2 = -\left(\frac{\partial r_1}{\partial s_1}\Delta s_1 + \frac{\partial r_2}{\partial s_2}\Delta s_2\right). \tag{13.}$$

Diese Formel giebt die Grösse des Sprunges an, von welchem in (3.) *die Rede war.* Sind nämlich m_1 und m_2 diejenigen Molecüle der Curven S_1 und S_2, welche zu *Anfang* der Zeit dt an der Stelle (S_1, S_2) sich befinden, so sind dr_1 und dr_2 diejenigen Zuwüchse, welche die Abstände $r_1 = (Om_1)$ und $r_2 = (Om_2)$ während der Zeit dt erfahren. [Vgl. den Schluss des vorigen Paragraphs].

Die Formel (13.) kann leicht verallgemeinert werden. Ist nämlich $\varphi(r)$ eine ganz beliebig gegebene stetige Function von r, so wird, analog mit (13.), offenbar auch folgende Formel gelten:

$$d\varphi(r_2) - d\varphi(r_1) = -\left(\frac{\partial\varphi(r_1)}{\partial s_1}\Delta s_1 + \frac{\partial\varphi(r_2)}{\partial s_2}\Delta s_2\right). \tag{14.}$$

Leicht aber bietet sich eine noch viel weiter gehende Verallgemeinerung dar, von der im folgenden Paragraph die Rede sein soll.

§ 3.

Verallgemeinerung der für die Gleitstellen gefundenen Formeln.

Statt *eines* Massenpunktes O wollen wir jetzt *beliebig viele* Massenpunkte $O, O', O'', \ldots$ uns denken, und zugleich annehmen, dass sämmtliche Objecte

$$S_1, S_2, S_3, \ldots S_n, \quad O, O', O'', \ldots \tag{15.}$$

in irgend welchen Bewegungen begriffen sind, selbstverständlich der Art, dass fortdauernd S_1 mit S_2, ferner S_2 mit S_3, u. s. w., endlich S_{n-1} mit S_n und S_n mit S_1 in Contact bleiben. Die räumliche Configuration all' dieser Objecte sei abhängig von irgend welchem Parameter p, der seinerseits eine Function der Zeit t ist.

Ueberdies sei gegeben eine von diesem Parameter p und von irgend einem Punkte (x, y, z) in stetiger Weise abhängende Function:

$$U = U(p, x, y, z). \tag{16.}$$

Nimmt man zum Punkte (x, y, z) der Reihe nach die längs der Curven $S_1, S_2, \ldots S_n$ in beliebiger Weise fortschreitenden idealen Punkte $J_1, J_2, \ldots J_n$, und bezeichnet man die in solcher Art für die Function U sich ergebenden Werthe der Reihe nach mit $U_1, U_2, \ldots U_n$, so ist offenbar:



$$
(17.)\qquad \begin{aligned} U_1 &= U(p, s_1), \\ U_2 &= U(p, s_2), \\ &\ldots\ldots \\ U_n &= U(p, s_n), \end{aligned}
$$

wofür als Collectivformel gesetzt werden kann:

$$
(18.)\qquad U = U(p, s).
$$

Dabei haben alsdann $s_1, s_2, \ldots s_n$ und s genau dieselben Bedeutungen wie früher in den Formeln (1.), (2.).

Sind nun $dp, ds_1, ds_2, \ldots ds_n$ die Zuwächse der Grössen $p, s_1, s_2, \ldots s_n$ während der Zeit dt, so werden z. B. U_1 und U_2 während dieser Zeit dt folgende Zuwächse erhalten:

$$
(19.)\qquad \begin{aligned} (dU_1) &= \frac{\partial U_1}{\partial p}\,dp + \frac{\partial U_1}{\partial s_1}\,ds_1, \\ (dU_2) &= \frac{\partial U_2}{\partial p}\,dp + \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\,ds_2, \end{aligned}
$$

wo die Klammern linker Hand in demselben Sinne gebraucht sind, wie früher z. B. in ($6\alpha, \beta$.). Diese Formeln (19.) sind auch so darstellbar:

$$
(20.)\qquad \begin{aligned} (dU_1) &= dU_1 + \frac{\partial U_1}{\partial s_1}\,ds_1, \quad \text{wo} \quad dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial p}\,dp, \\ (dU_2) &= dU_2 + \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\,ds_2, \quad \text{wo} \quad dU_2 = \frac{\partial U_2}{\partial p}\,dp. \end{aligned}
$$

Die Bogenlängen s_1, s_2 der beiden idealen Punkte J_1, J_2 wollen wir jetzt der Art wachsen lassen, dass J_1 und J_2 fortdauernd mit dem Gleitpunkt (S_1, S_2) coincidiren. Alsdann ist fortdauernd: $U_1 = U_2$, mithin auch: $(dU_1) = (dU_2)$. Diese Gleichung $(dU_1) = (dU_2)$ aber gewinnt durch Substitution der Werthe (20.) die Gestalt:

$$
(21.)\qquad dU_1 - dU_2 = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial s_1}\,ds_1 - \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\,ds_2\right).
$$

Hieraus endlich folgt mit Rücksicht auf (11.), (12.):

$$
(22.)\qquad dU_1 - dU_2 = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial s_1}\,\Delta s_1 + \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\,\Delta s_2\right),
$$

eine Formel, die anzusehen ist als eine Verallgemeinerung der früher gefundenen Formeln (13.) und (14.).

Ebenso wie die dr (3.) *in jeder Gleitstelle unstetig sind, ebenso sind auch die dU an der betrachteten Gleitstelle (S_1, S_2) mit einer Unstetigkeit, mit einem Sprunge behaftet; und die Formel* (22.) *giebt die Grösse dieses Sprunges an.* Will man von der Bedeutung der Grössen dU_1 und dU_2 eine deutliche Vorstellung haben, so hat man nur einen Blick auf die Formeln (20.) zu werfen. Aus diesen folgt, dass dU_1 und dU_2 diejenigen Werthe sind, welche (dU_1) und (dU_2) annehmen

würden, falls man s_1 und s_2 als constant bleibend sich denken wollte. U. s. w. Bezeichnet man also die zu *Anfang* der Zeit dt an der Gleitstelle (S_1, S_2) befindlichen Molecüle der Curven S_1 und S_2 respective mit m_1 und m_2, so sind dU_1, dU_2 diejenigen Zuwüchse, welche die diesen *Molecülen* m_1, m_2 zugehörigen Functionen U_1, U_2 während der Zeit dt erfahren.

§ 4.

Zwei allgemeine Integralsätze.

Ausser der Function U (16.), (17.), (18.):

$$U = U(p, s), \tag{23.}$$

sei noch eine andere derartige Function gegeben:

$$V = V(p, s). \tag{24.}$$

Die U, V sind längs des betrachteten Ringes *stetig*. Hingegen sind die dU, dV [vgl. den Schluss des vorigen Paragraphs] in den Gleitstellen *unstetig*. Folglich wird das in einem gegebenen Augenblick t über alle Elemente Ds des Ringes ausgedehnte Integral

$$\Omega = \int \frac{\partial (V dU)}{\partial s} Ds \tag{25.}$$

im Allgemeinen *nicht* $= 0$ sein. Wir stellen uns die Aufgabe, den Werth dieses Integrals näher zu bestimmen.

Offenbar wird man den Werth des Integrals Ω dadurch erhalten können, dass man successive über die einzelnen Curven (von einer Gleitstelle bis zur nächstfolgenden) integrirt, und sodann all' diese einzelnen Integrale zusammen addirt. Denkt man sich nun sämmtliche Gleitstellen mit α, β, γ, δ, ... bezeichnet, und zwar nach folgendem Schema:

$$\underline{\quad S_n \quad}\; \alpha \;\underline{\quad S_1 \quad}\; \beta \;\underline{\quad S_2 \quad}\; \gamma \;\underline{\quad S_3 \quad}\; \delta \;\underline{\quad S_4 \quad}\; \text{etc. etc.,} \tag{26.}$$

so erhält man mittelst dieses Verfahrens sofort:

$$\begin{aligned}\Omega = &+ (V_1 dU_1)_\beta - (V_1 dU_1)_\alpha \\ &+ (V_2 dU_2)_\gamma - (V_2 dU_2)_\beta \\ &+ (V_3 dU_3)_\delta - (V_3 dU_3)_\gamma \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot ,\end{aligned}$$

oder etwas anders geordnet:

$$\begin{aligned}\Omega = &+ (V_1 dU_1 - V_2 dU_2)_\beta \\ &+ (V_2 dU_2 - V_3 dU_3)_\gamma \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\end{aligned}$$

Nun sind aber längs des Ringes nur allein die dU, dV in den Gleitstellen *unstetig*, hingegen die U, V selber längs des ganzen Ringes *stetig*. Folglich haben z. B. V_1 und V_2 an der Gleitstelle β ein und denselben Werth, ebenso V_2 und V_3 an der Gleitstelle γ, u. s. w. Demgemäss kann man die letzte Formel auch so schreiben:

$$\Omega = + \, (V(dU_1 - dU_2))_\beta \\ + \, (V(dU_2 - dU_3))_\gamma \\ + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; ,$$

oder endlich, unter Anwendung eines Summenzeichens, auch so:

$$\Omega = \sum V(dU_1 - dU_2), \tag{27.}$$

die Summation ausgedehnt gedacht über sämmtliche Gleitstellen. Aus (27.) folgt nun, durch Anwendung der Formel (22.), sofort:

$$\Omega = - \sum V\left(\frac{\partial U_1}{\partial s_1} \Delta s_1 + \frac{\partial U_2}{\partial s_2} \Delta s_2\right), \tag{28.}$$

oder kürzer geschrieben:

$$\Omega = - \sum V \frac{\partial U}{\partial s} \Delta s; \tag{29.}$$

so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Erster Satz. — *In Betreff der gegebenen Objecte:*

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ S_n,\quad O,\ O',\ O'',\ \ldots \tag{30.}$$

halte man fest an den in (15.), (16.), ... (20.) *angegebenen Vorstellungen und Bezeichnungen. Auch denke man sich, ausser dem U, noch eine zweite derartige Function V gegeben; so dass also z. B. die Formeln zu notiren sind* [*vgl.* (18.) *und* (20.)]:

$$\begin{aligned} U &= U(p, s), \quad dU = \frac{\partial U}{\partial p} dp, \\ V &= V(p, s), \quad dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp, \end{aligned} \tag{31.}$$

wo p *und* $p + dp$ *die Werthe des Parameters* p *in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken* t *und* $t + dt$ *vorstellen.*

Alsdann wird das im Augenblick t *über alle Elemente* Ds *des Ringes ausgedehnte Integral*

$$\int \frac{\partial(VdU)}{\partial s} Ds$$

folgenden Werth besitzen:

$$\int \frac{\partial(VdU)}{\partial s} Ds = - \sum V \frac{\partial U}{\partial s} \Delta s, \tag{32.}$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle dem Zeitelement dt *entsprechenden* Δs. *Dabei hat* Δs *die früher festgesetzte Bedeutung.* [*Vgl. die Regel Seite 37*].

Bemerkung. — *Das in* (32.) *auf der linken Seite befindliche* dU *hat die in* (31.) *angegebene Bedeutung, und repräsentirt also denjenigen Zuwachs, welchen* U *während der Zeit* dt *bei* c o n s t a n t *erhaltenem* s *erleidet. Oder mit andern Worten: Denkt man sich den Ausdruck* U *gebildet für irgend ein* **Molecül** m *von der Bogenlänge* s*, so repräsentirt das* dU *denjenigen Zuwachs, welchen dieser dem* **Molecül** m *zugehörige Ausdruck* U *während der Zeit* dt *in Wirklichkeit erfährt.*

Wir bezeichnen den Abstand eines solchen Molecüls m vom Punkte O (30.) mit r:

$$r = (Om),$$

und wollen nun *beispielsweise* den Ausdrücken U, V folgende Werthe zuertheilen:

$$U = r,$$
$$V = \mathfrak{F}(r),$$

wo $\mathfrak{F}(r)$ eine beliebig gegebene stetige Function von r sein soll. Alsdann erhält offenbar unser Satz (32.) folgende Gestalt:

$$\int \frac{\partial[\mathfrak{F}(r) \cdot dr]}{\partial s} Ds = -\sum \mathfrak{F}(r) \frac{\partial r}{\partial s} \Delta s, \tag{33.}$$

wo dr denjenigen Zuwachs vorstellt, den das einem Molecül m zugehörige $r = (Om)$ während der Zeit dt in Wirklichkeit erfährt.

Wir wollen nun ferner, um den allgemeinen Satz (32.) auf ein *anderes Beispiel* anzuwenden,

$$r = (Om), \quad \text{und zugleich:} \quad \tau = (mOO')$$

setzen; so dass also τ den von den beiden geraden Linien Om und OO' gebildeten Winkel vorstellen soll. Ueberdies wollen wir gegenwärtig den Ausdrücken U, V folgende Werthe zuertheilen:

$$U = r,$$
$$V = \mathfrak{F}(r) \cdot \cos\tau.$$

Alsdann erhält unser Satz (32.) die Gestalt:

$$\int \frac{\partial[\mathfrak{F}(r) \cdot \cos\tau \, dr]}{\partial s} Ds = -\sum \mathfrak{F}(r) \cos\tau \frac{\partial r}{\partial s} \Delta s, \tag{34.}$$

wo wiederum das (auf der linken Seite befindliche) dr denjenigen Zuwachs vorstellt, welchen das einem Molecül m zugehörige $r = (Om)$ während der Zeit dt in Wirklichkeit erfährt.

Die hier erhaltenen Resultate (33.), (34.) sind für unsere weiteren Untersuchungen von ganz besonderer Wichtigkeit. Wir können diese Resultate (33.), (34.), bei denen nur *zwei* Punkte O, O' in Betracht kommen, zu folgendem Satz zusammenfassen:

Zweiter Satz. — *Die gegebenen inextensiblen Curven:*

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ \ldots \ S_{n-1}, \ S_n \tag{35.}$$

seien in beliebigen Bewegungen (mithin z. B. auch in beliebigen Gestaltsveränderungen) begriffen, selbstverständlich der Art, dass fortdauernd S_1 *mit* S_2, *ferner* S_2 *mit* S_3, *u. s. w., endlich* S_{n-1} *mit* S_n, *und* S_n *mit* S_1 *in Contact bleiben. Ueberdies denke man sich im Raume zwei ebenfalls in ganz beliebigen Bewegungen begriffene Massenpunkte:*

$$O,\; O'. \tag{36.}$$

Es sei nun S *irgend eine der Curven* (35.). *Ferner seien* m *und* m' *zwei aufeinanderfolgende Molecüle dieser Curve* S, *respective mit den Bogenlängen* s *und* $s + Ds$, [*die Bogenlängen gerechnet gedacht von* A *aus, wie in* (1.), (2.) *Seite 37 festgesetzt wurde*].

Die Entfernung (Om) *und den Werth des Winkels* (mOO') *bezeichne man mit* r *und* τ:

$$r = (Om), \quad \tau = (mOO'). \tag{37.}$$

Endlich verstehe man unter $\mathfrak{F}(r)$ *eine beliebig gegebene stetige Function von* r. *Alsdann gelten für zwei aufeinanderfolgende Augenblicke* t *und* $t + dt$ *folgende Formeln:*

$$\int \frac{\partial[\mathfrak{F}(r)\cdot dr]}{\partial s} Ds = -\sum \mathfrak{F}(r)\frac{\partial r}{\partial s}\Delta s, \tag{38.}$$

$$\int \frac{\partial[\mathfrak{F}(r)\cdot \cos\tau\, dr]}{\partial s} Ds = -\sum \mathfrak{F}(r)\cos\tau\frac{\partial r}{\partial s}\Delta s, \tag{39.}$$

wo das (linker Hand befindliche) dr *denjenigen Zuwachs vorstellt, den die Entfernung* $r = (Om)$ *während der Zeit* dt *in Wirklichkeit erfährt.*

In diesen Formeln sind die Integrationen linker Hand ausgedehnt über alle Elemente Ds *des im Augenblick* t *von den Curven* S_1, S_2, S_3, ... S_n *gebildeten Ringes. Andererseits sind die Summationen rechts ausgedehnt zu denken über alle der Zeit* dt *entsprechenden* Δs. [*Vgl. die Regel Seite 37*].

§ 5.

Andere Methode der Untersuchung.

Wir greifen zurück zu den in (15.), (16.), ... (20.) angegebenen allgemeinen Vorstellungen und Bezeichnungen, so dass also z. B. die Formeln zu notiren sind [vgl. (18.), (20.)]:

$$U = U(p, s), \quad dU = \frac{\partial U}{\partial p}dp. \tag{40.}$$

Ueberdies denken wir uns den Ausdruck $U = U(p, s)$ partiell nach s abgeleitet, und diese Ableitung mit $W(p, s)$ bezeichnet:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = W(p, s). \tag{41.}$$

Wir betrachten nun das im Augenblick t über alle Elemente Ds des Ringes ausgedehnte Integral:

$$\int W\,Ds = \int W(p, s)\,Ds. \tag{42.}$$

Während des nächstfolgenden Zeitelementes dt wird der Werth dieses Integrals aus doppeltem Grunde sich ändern, nämlich erstens deswegen, weil der in W enthaltene Parameter p während dieser Zeit dt um dp anwächst, zweitens aber auch deswegen, weil während der Zeit dt neue Curvenelemente in den Ring eintreten und alte ausscheiden. Der Zuwachs des Integralwerthes während der Zeit dt lautet daher folgendermassen:

$$d\left(\int W\,Ds\right) = \int \frac{\partial W}{\partial p}\,dp\cdot Ds + \sum W\,\Delta s, \tag{43.}$$

die Summation im letzten Gliede ausgedehnt gedacht über alle der Zeit dt entsprechenden Δs. Dabei hat Δs genau dieselbe Bedeutung, wie sie früher durch die Regel Seite 37 ein für alle Mal festgesetzt wurde.

Substituirt man in (43.) für W seine eigentliche Bedeutung (41.), so erhält man:

$$d\left(\int \frac{\partial U}{\partial s}\,Ds\right) = \int \frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial p}\,dp\cdot Ds + \sum \frac{\partial U}{\partial s}\,\Delta s. \tag{44.}$$

Nun ist aber offenbar:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s\,\partial p}\,dp = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial p}\,dp\right) = \frac{\partial (dU)}{\partial s}, \quad \text{[vgl. (40.)]}.$$

Somit folgt:

$$d\left(\int \frac{\partial U}{\partial s}\,Ds\right) = \int \frac{\partial (dU)}{\partial s}\,Ds + \sum \frac{\partial U}{\partial s}\,\Delta s. \tag{45.}$$

U selber ist, wie schon bemerkt wurde [Seite 44], längs des ganzen Ringes *stetig*. Das über den ganzen Ring ausgedehnte Integral

$$\int \frac{\partial U}{\partial s}\,Ds$$

ist daher $= 0$. Somit reducirt sich die Formel (45.) auf:

$$\int \frac{\partial (dU)}{\partial s}\,Ds = -\sum \frac{\partial U}{\partial s}\,\Delta s. \tag{46.}$$

Diese Formel (46.) aber ist offenbar nichts Anderes als der für $V = 1$ sich ergebende *Specialfall* des allgemeinen Satzes (32.).

Diese neue Methode der Untersuchung liefert also nur einen *Specialfall* jenes früher gefundenen allgemeinen Satzes, und sie steht daher, obwohl sie einfacher ist als unsere frühere Methode, doch in Betreff ihrer Ergiebigkeit hinter jener weit zurück. So z. B erkennt man leicht, dass sie allerdings ausreicht zur Begründung der Formel (38.), nicht aber zur Begründung der Formel (39.).

§ 6.

Ueber ein mit den zeitlichen Zuwüchsen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, dE behaftetes Integral.

Der bisher betrachtete mit Gleitstellen behaftete Ring mag kurzweg mit R bezeichnet werden. Ausserdem aber wollen wir uns jetzt noch einen zweiten Ring R_1 gegeben denken, der ebenfalls beliebig viele Gleitstellen besitzt. Beide Ringe mögen in beliebigen Bewegungen begriffen sein.

Es seien nun

$$(1.)\qquad \varphi = \varphi(r), \quad \psi = \psi(r), \quad f = f(r), \quad g = g(r), \quad h = h(r)$$

beliebig gegebene stetige Functionen von r; und es sei zur näheren Untersuchung vorgelegt folgendes über die beiden Ringe R und R_1 ausgedehnte Integral:

$$(2.)\qquad J = \iint \Big\{ [\varphi\Theta\Theta_1 + \psi E]\, dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h dE \Big\} Ds Ds_1.$$

Dabei sollen r, Θ, Θ_1, E die den beiden Elementen Ds, Ds_1 zugehörigen Ampère'schen Argumente, und dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, dE die Zuwüchse dieser Argumente während der Zeit dt sein.

Auf Grund des Satzes (12.), (13.) Seite 31 ist das Integral J zuvörderst in die Gestalt versetzbar:

$$(3.)\qquad J = \iint \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r} E\right] dr \\ + \frac{\partial(F dr)}{\partial s} + \frac{\partial(G dr)}{\partial s_1} + \frac{\partial^2(H dr)}{\partial s \partial s_1} \end{array} \right\} Ds Ds_1,$$

wo L, M, $\left(L - \frac{dM}{dr}\right)$, F, G, H die Bedeutungen haben:

$$(4.)\qquad \left\{ \begin{array}{l} L = (\varphi + \psi) + r\frac{d^2 h}{dr^2} - \frac{d(f+g)}{dr}, \\ M = r\psi + r\frac{dh}{dr} - (f+g), \\ L - \frac{dM}{dr} = \varphi - r\frac{d\psi}{dr} - \frac{dh}{dr}, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} F = -\left(r\frac{dh}{dr} - f\right)\Theta_1, \\ G = +\left(r\frac{dh}{dr} - g\right)\Theta, \\ H = -rh. \end{array} \right.$$

Es sei nun S irgend eine zum Ringe R gehörige Curve. Ferner seien m und m' zwei aufeinanderfolgende Molecüle dieser Curve S, respective mit den Bogenlängen s und $s + Ds$. Diese Bogenlängen sind gerechnet zu denken in der positiven Richtung der Curve S von einem auf ihr festgesetztem Anfangspunkte A aus. Und in analoger Weise mögen für den Ring R_1 die Bezeichnungen gebraucht werden: S_1, m_1, m_1', s_1, $s_1 + Ds_1$. Fasst man nun die den beiden Curvenelementen Ds und Ds_1 zugehörigen Ampère'schen Argumente

$$r, \quad \Theta = \cos\vartheta, \quad \Theta_1 = \cos\vartheta_1, \quad \mathsf{E} = \cos\varepsilon$$

ins Auge, so ist offenbar:

$$r = (mm_1) \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = (mm_1m_1').$$

Versteht man also unter $\mathfrak{F}(r)$ eine beliebig gegebene stetige Function r, so gilt nach Seite 46 (39.) folgende Formel:

$$\int \frac{\partial[\mathfrak{F}(r)\cos\vartheta_1 \cdot dr]}{\partial s} Ds = -\sum \mathfrak{F}(r)\cos\vartheta_1 \frac{\partial r}{\partial s}\Delta s.$$

In der That ist diese Formel mit der dortigen identisch, nur mit dem Unterschiede, dass die damaligen Punkte O, O' und der damalige Winkel τ gegenwärtig durch m_1, m_1' und ϑ_1 ersetzt sind.

Denken wir uns jetzt das Product $\mathfrak{F}(r)\cos\vartheta_1$ identisch mit dem in (4.) angegebenen Ausdruck F, so erhalten wir:

$$\int \frac{\partial(F dr)}{\partial s} Ds = -\sum F \frac{\partial r}{\partial s}\Delta s. \tag{5.}$$

Multipliciren wir diese Formel mit Ds_1, und integriren wir sodann dieselbe über alle Elemente Ds_1 des Ringes R_1, so ergiebt sich:

$$\iint \frac{\partial(F dr)}{\partial s} Ds\,Ds_1 = -\sum \int F \frac{\partial r}{\partial s}\Delta s\,Ds_1. \tag{6.}$$

Substituiren wir endlich auf der rechten Seite für F seine eigentliche Bedeutung (4.), und beachten wir zugleich, dass $\frac{\partial r}{\partial s} = \Theta$ ist [vgl. Seite 6 (h.)], so erhalten wir:

$$\iint \frac{\partial(F dr)}{\partial s} Ds\,Ds_1 = \sum \int \left(r\frac{dh}{dr} - f\right)\Theta\Theta_1\,\Delta s\,Ds_1. \tag{7.}$$

In analoger Weise wird nun, wie leicht zu übersehen ist, für den in (4.) angegebenen Ausdruck G folgende Formel sich ergeben:

$$\iint \frac{\partial(G dr)}{\partial s_1} Ds\,Ds_1 = \sum \int \left(r\frac{dh}{dr} - g\right)\Theta\Theta_1\,Ds\,\Delta s_1. \tag{8.}$$

Durch (7.), (8.) sind zwei Glieder des vorgelegten Integrales J (3.) berechnet, respective umgestaltet. Was das letzte Glied jenes Integrales J betrifft, so ist offenbar der in (4.) angegebene Ausdruck H eine blosse Function von r. Wir erhalten somit auf Grund des Satzes Seite 46 (38.) die Formel:

$$\int \frac{\partial(H dr)}{\partial s} Ds = -\sum H \frac{\partial r}{\partial s}\Delta s. \tag{9.}$$

Jener Ausdruck H (4.) ist eine blosse Function von r. Führt man nun an Stelle dieser Function eine neue Function $\Phi(r)$ ein, indem man setzt:

$$\Phi(r) = -\int H\,dr, \quad \text{mithin} \quad H = -\frac{d\Phi(r)}{dr},$$

so geht die Formel (9.) über in:

$$\int \frac{\partial (H dr)}{\partial s} Ds = \sum \frac{\partial \Phi(r)}{\partial s} \Delta s.$$

Hieraus folgt durch partielle Ableitung nach s_1:

$$\int \frac{\partial^2 (H dr)}{\partial s \partial s_1} Ds = \sum \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial s \partial s_1} \Delta s,$$

oder, falls man mit Ds_1 multiplicirt, und sodann über alle Elemente Ds_1 des Ringes R_1 integrirt:

$$\iint \frac{\partial^2 (H dr)}{\partial s \partial s_1} Ds\, Ds_1 = \sum \left(\int \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial s \partial s_1} Ds_1 \right) \Delta s.$$

Das hier auf der rechten Seite in den Klammern enthaltene Integral ist aber offenbar $= 0$; so dass man also schliesslich erhält:

$$\iint \frac{\partial^2 (H dr)}{\partial s \partial s_1} Ds\, Ds_1 = 0. \tag{10.}$$

Nunmehr reducirt sich die Formel (3.) durch Substitution der Werthe (7.), (8.) und (10.) auf:

$$\begin{aligned} J = & \iint \left[\left(L - \frac{M}{r} \right) \Theta\Theta_1 + \frac{M}{r} \mathsf{E} \right] dr \cdot Ds\, Ds_1 \\ & + \sum \int \left(r \frac{dh}{dr} - f \right) \Theta\Theta_1 \Delta s\, Ds_1 \\ & + \sum \int \left(r \frac{dh}{dr} - g \right) \Theta\Theta_1 Ds\, \Delta s_1. \end{aligned} \tag{11.}$$

Man gelangt daher, auf Grund der beiden Formeln (2.) und (11.) zu folgendem Resultat:

Transformation. — *Es seien fünf stetige Functionen von r in beliebiger Weise gegeben:*

$$\varphi = \varphi(r), \quad \psi = \psi(r), \quad f = f(r), \quad g = g(r), \quad h = h(r).$$

Ferner seien gegeben zwei mit beliebig vielen Gleitstellen versehene, aus irgend welchen inextensiblen Curven zusammengesetzte Ringe. Und diese beiden Ringe seien in beliebigen Bewegungen (mithin z. B. auch jene Curven in beliebigen Gestaltsveränderungen) begriffen.

Alsdann wird für jedes Zeitelement dt dieser Bewegung die Formel gelten:

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ [\varphi \Theta\Theta_1 + \psi \mathsf{E}] dr + f \Theta_1 d\Theta + g \Theta d\Theta_1 + h d\mathsf{E} \right\} Ds\, Ds_1 = \\ & = \iint \left[\left(L - \frac{M}{r} \right) \Theta\Theta_1 + \frac{M}{r} \mathsf{E} \right] dr \cdot Ds\, Ds_1 \\ & \quad + \sum \int \left(r \frac{dh}{dr} - f \right) \Theta\Theta_1 \Delta s\, Ds_1 \\ & \quad + \sum \int \left(r \frac{dh}{dr} - g \right) \Theta\, \Theta_1 Ds\, \Delta s_1. \end{aligned} \tag{12.}$$

Hier sind L und M blosse Functionen von r. Es ist nämlich:

$$(13.)\qquad L = (\varphi + \psi) + r\frac{d^2h}{dr^2} - \frac{d(f+g)}{dr},$$

$$M = r\psi + r\frac{dh}{dr} - (f+g);$$

woraus z. B. folgt:

$$(14.)\qquad L - \frac{dM}{dr} = \varphi - r\frac{d\psi}{dr} - \frac{dh}{dr}.$$

In den beiden letzten Zeilen der Formel (12.) *sind die Summationen ausgedehnt zu denken über alle Δs des einen, respective über alle Δs_1 des andern Ringes. Dabei hat Δs die früher [Regel Seite 37] festgesetzte Bedeutung für den einen Ring, und Δs_1 die analoge Bedeutung für den andern Ring.*

§ 7.

Ueber das Verschwinden des soeben betrachteten Integrals.

Wir wollen jetzt *annehmen*, dass das Integral

$$(15.)\quad J = \iint\Big\{[\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h\,d\mathsf{E}\Big\}DsDs_1$$

für *beliebige* mit Gleitstellen behaftete Ringe und für *ganz beliebige Bewegungen* derselben stets $= 0$ ist, und die aus dieser Annahme sich ergebenden Consequenzen entwickeln.

Nach unserer Annahme ist das Integral $J = 0$ für ganz beliebige Bewegungen der beiden Ringe, also z. B. auch dann, wenn bei diesen Bewegungen *gar kein Gleiten* erfolgt, mithin die Δs und Δs_1 alle $= 0$ sind. Solches beachtend, erkennen wir aus der Transformation (12.) sofort, dass der Ausdruck

$$\iint\Big[\Big(L - \frac{M}{r}\Big)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\Big]dr\cdot DsDs_1$$

für beliebige Ringe und für jene specielleren Bewegungen (bei denen alles Gleiten vermieden wird) stets $= 0$ sein muss. Und hieraus folgt, mittelst des Theorems Seite 27 (12.), sofort, dass

$$(16.)\qquad L = 0 \quad\text{und}\quad M = 0$$

sein muss; wodurch das zur Untersuchung vorgelegte Integral J (15.), unter Anwendung der Transformation (12.), sich reducirt auf

$$(17.)\quad J = \sum\int\Big(r\frac{dh}{dr} - f\Big)\Theta\Theta_1\Delta s\,Ds_1 + \sum\int\Big(r\frac{dh}{dr} - g\Big)\Theta\Theta_1 Ds\Delta s_1.$$

Nach unserer Annahme wird nun das Integral J für beliebige Bewegungen der beiden Ringe stets $= 0$ sein, also z. B. auch dann, wenn bei diesen Bewegungen die Δs, Δs_1 alle $= 0$ sind, mit Ausnahme

eines einzigen Δs_1. Somit ergiebt sich aus (17.), dass für beliebige Ringe und für die soeben charakterisirten specielleren Bewegungen der Ausdruck

$$\Delta s_1 \int \left(r \frac{dh}{dr} - g \right) \Theta \Theta_1 Ds$$

stets $= 0$ ist. Und hieraus folgt, mittelst des Theorems Seite 16 (32), sofort, dass

$$r \frac{dh}{dr} - g = 0 \tag{18.}$$

sein muss. In analoger Art ergiebt sich offenbar, dass auch

$$r \frac{dh}{dr} - f = 0 \tag{19.}$$

sein muss.

Aus unserer Annahme, dass J stets $= 0$ sei, hat sich also ergeben, dass folgende Bedingungen [vgl. (16.) und (18.), (19.)] erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} L &= 0, \qquad & r \frac{dh}{dr} - f &= 0, \\ M &= 0, \qquad & r \frac{dh}{dr} - g &= 0. \end{aligned} \tag{20.}$$

Umgekehrt aber: Sind diese vier Bedingungen (20.) erfüllt, so wird das vorgelegte Integral J (15.) für *beliebige* mit Gleitstellen behaftete Ringe und für *beliebige Bewegungen* derselben stets $= 0$ sein; wie solches aus der allgemeinen Transformation (12.) sofort ersichtlich ist. — Man kann also sagen:

Soll das vorgelegte Integral J (15.) für beliebige mit Gleitstellen behaftete Ringe und für beliebige Bewegungen derselben stets verschwinden, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass die vier Bedingungen (20.) erfüllt sind.

Um diese Bedingungen etwas bequemer zu gestalten, namentlich um die auxiliaren Grössen L und M aus ihnen zu eliminiren, sei zuvörderst bemerkt, dass aus (20.) sich ergiebt:

$$\begin{aligned} M &= 0, \qquad & f &= r \frac{dh}{dr}, \\ L - \frac{dM}{dr} &= 0, \qquad & g &= r \frac{dh}{dr}. \end{aligned} \tag{21.}$$

Hieraus folgt weiter mit Hinblick auf die in (13.), (14.) angegebenen Bedeutungen von L, M:

$$\begin{aligned} r\psi &= (f + g) - r \frac{dh}{dr}, \qquad & f &= r \frac{dh}{dr}, \\ r \frac{d\psi}{dr} &= \varphi - \frac{dh}{dr}, \qquad & g &= r \frac{dh}{dr}. \end{aligned} \tag{22.}$$

Hieraus folgt weiter, indem man links für f, g die rechts stehenden Werthe substituirt:

$$(23.)\qquad \begin{aligned} \psi &= \frac{dh}{dr}, & f &= r\frac{dh}{dr}, \\ r\frac{d^2h}{dr^2} &= \varphi - \frac{dh}{dr}, & g &= r\frac{dh}{dr}, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$(24.)\qquad \begin{aligned} \psi &= \frac{dh}{dr}, & f &= r\frac{dh}{dr}, \\ \varphi &= \frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right), & g &= r\frac{dh}{dr}. \end{aligned}$$

Leicht erkennt man, dass man auch rückwärts von (24.) aus zu (23.), dann zu (22.), dann zu (21.) und schliesslich zu (20.) gelangen kann. Kurz man erkennt, dass die Bedingungen (20.) völlig *äquivalent* sind mit den Bedingungen (24.), und gelangt somit zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Sollen fünf Functionen*

$$\varphi = \varphi(r),\quad \psi = \psi(r),\quad f = f(r),\quad g = g(r),\quad h = h(r)$$

von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$(25.)\qquad \iint \Big\{[\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E}]\,dr + f\Theta_1 d\Theta + g\Theta d\Theta_1 + h d\mathsf{E}]\Big\} Ds Ds_1$$

für beliebige mit Gleitstellen behaftete Ringe und für beliebige Bewegungen derselben stets verschwindet, so ist hiezu erforderlich und ausreichend, dass zwischen jenen fünf Functionen folgende vier Relationen stattfinden:

$$(26.)\qquad \begin{aligned} \varphi &= \frac{d}{dr}\left(r\frac{dh}{dr}\right), & f &= r\frac{dh}{dr}, \\ \psi &= \frac{dh}{dr}, & g &= r\frac{dh}{dr}. \end{aligned}$$

Uebrigens ist dieses Theorem hier nur abgeleitet, um unsern Untersuchungen eine gewisse Vollständigkeit und Abrundung zu verleihen. Was unsere wirklichen Bedürfnisse im Folgenden anbetrifft, so wird es bequemer sein, an Stelle dieses Theorems, die früher auf Seite 50 angegebene Transformation zu benutzen.

Vierter Abschnitt.

Das F. Neumann'sche Potential, und die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze.

In den bisherigen Abschnitten sind, als Vorbereitung für unsere eigentlichen Untersuchungen, gewisse rein mathematische Sätze entwickelt worden, die vermöge ihrer grossen Allgemeinheit auch wohl an und für sich einigermassen beachtenswerth sein dürften. Nach Absolvirung dieser Präliminarien gehen wir nun über zum eigentlichen Gegenstande des vorliegenden Werkes.

Es handelt sich um die nähere Erforschung der elektrodynamischen Fernwirkungen, oder (genauer ausgedrückt) um die Untersuchung derjenigen ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte, welche zwei elektrische Stromelemente gegenseitig auf einander ausüben.

Früher galt das Ampère'sche Gesetz. Ein halbes Jahrhundert hindurch galt dasselbe ganz allgemein, ohne dass je ein Widerspruch sich erhoben hätte, als das eigentliche *Elementargesetz der ponderomotorischen Kräfte;* während andererseits die Ansichten über das *Elementargesetz der elektromotorischen Kräfte* von jeher schwankend, unsicher und sehr getheilt gewesen sind.

Zu der Zeit, als ich den *ersten* Theil des vorliegenden Werkes verfasste, herrschte noch der Glaube an das Ampère'sche Gesetz. Und demgemäss hatte ich damals dieses Gesetz ohne Weiteres acceptirt, und dasselbe zu einem wichtigen Grundstein meiner damaligen Untersuchungen gemacht.

Inzwischen aber ist der Glaube an das Ampère'sche Gesetz, namentlich durch die Arbeiten von Helmholtz, Stefan und Clausius, mehr und mehr erschüttert worden. Und demgemäss sehe ich mich jetzt beim *zweiten* Theile meines Werkes genöthigt, *das Ampère'sche Gesetz ganz fallen zu lassen;* so dass also die Aufgabe dieses zweiten Theiles eine sehr viel schwierigere sein wird als die des ersten Theiles. *Denn es sind jetzt beide Elementargesetze, das ponderomotorische, wie auch das elektromotorische, als völlig unbekannt anzusehen. Und es handelt sich also um die Entdeckung beider Gesetze.*



Um möglichst sicher zu gehen, werde ich zur Grundlage meiner gegenwärtigen Untersuchungen nur solche Prämissen (Gesetze, Principien, Axiome, Vorstellungen) nehmen, die über allen Zweifel erhaben scheinen, und namentlich nur solche, in Bezug auf welche zwischen einem so hervorragenden Forscher wie Helmholtz und zwischen mir volle Uebereinstimmung stattfindet. Zu diesen Prämissen gehören z. B. die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze, ferner das Helmholtz'sche Princip der Erhaltung der Kraft, ferner gewisse Vorstellungen über die Proportionalität der ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte mit den elektrischen Stromstärken, respective mit den Aenderungen derselben, ferner jenes allgemeine Axiom, dass die inducirte elektromotorische Kraft von der Beschaffenheit des inducirten Körpers unabhängig sei, u. s. w.

Im gegenwärtigen Abschnitt wird speciell von den beiden *F. Neumann'schen Integralgesetzen* die Rede sein. Diese Gesetze sind in einfacher Weise angebbar unter Anwendung eines gewissen analytischen Ausdrucks, den man kurzweg als das *F. Neumann'sche Potential* bezeichnen kann. Demgemäss pflegt man diese beiden Gesetze häufig auch die *F. Neumann'schen Potentialgesetze* zu nennen.

Bekanntlich beziehen sich beide Gesetze, falls man innerhalb derjenigen Grenzen bleiben will, für welche dieselben von F. Neumann wirklich aufgestellt sind, nur auf *geschlossene lineare* elektrische Ströme. Auch ist, falls man innerhalb jener Grenzen bleiben will, bei Anwendung der beiden Gesetze vorauszusetzen, dass die ponderablen linearen Leiter, in denen die Ströme dahinfliessen, *inextensibel* sind, und dass überdies die Stromstärken *blosse Functionen der Zeit* sind.

Uebrigens hat *Helmholtz* in seinen Arbeiten von 1870—1875 die beiden F. Neumann'schen Gesetze auf einzelne Strom*elemente* auszudehnen versucht, und in solcher Weise eine Theorie geschaffen, welche man füglich als die Theorie des *elementaren* Potentials bezeichnen kann. Auf diese Helmholtz'schen Arbeiten, in denen gleichzeitig auch *extensible* Leiter, an Stelle der inextensiblen, in Betracht kommen, soll zu Ende des gegenwärtigen Abschnitts näher eingegangen werden.

§ 1.

Das F. Neumann'sche elektrodynamische Potential.

Ist die elektrische Materie in einem dünnen Drahte (aus irgend welchen Ursachen) in Bewegung begriffen, so wird die während der Zeit dt durch einen senkrechten Querschnitt q dieses Drahtes hindurchfliessende Elektricitätsmenge mit dt proportional sein, also zu bezeichnen sein mit

$$J\,dt. \tag{1.}$$

Der so definirte Factor J heisst bekanntlich die *Stromstärke.* Auch pflegt man

(2.) $$J = iq$$

zu setzen, und alsdann den Factor i die *Strömungsstärke*, oder kurzweg die *Strömung* zu nennen. Dabei bezeichnet q den *Flächeninhalt* des senkrechten Querschnittes.

Die *Strömung* i wird offenbar geometrisch darstellbar sein als eine gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge. Und die rechtwinkligen Componenten u, v, w dieser Linie i sind alsdann die sogenannten *Strömungscomponenten.*

Bemerkung. — Die Strömung i wird bekanntlich von Kirchhoff als „*Stromdichtigkeit*" bezeichnet. Doch dürfte dieses Wort wohl im Allgemeinen sich weniger empfehlen als das Wort: *Strömung*, namentlich was die Componenten betrifft. Denn die elektrischen *Strömungscomponenten* als „*Stromdichtigkeitscomponenten*" bezeichnen zu wollen, dürfte doch wohl etwas bedenklich sein.

Man denke sich den dünnen Draht M durch aufeinanderfolgende senkrechte Querschnitte in lauter unendlich kleine cylindrische Elemente DM zerlegt. Volumen und Länge eines solchen Elementes DM seien bezeichnet mit $D\tau$ und Ds; so dass also die Relation stattfindet:

(3.) $$D\tau = q Ds$$

wo q, ebenso wie in (2.), den senkrechten Querschnitt vorstellt.

Auch nehme man an, dass der Draht M ein *in sich zurücklaufender* sei, dass er also die Gestalt eines *Ringes* besitze. Ueberdies nehme man an, dass die in diesem Drahtringe M vorhandene Stromstärke J *eine blosse Function der Zeit* sei; so dass also die Stromstärke J in jedwedem Augenblick an allen Stellen des Ringes ein und denselben Werth hat.

Solches festgesetzt, denke man sich jetzt einen zweiten solchen Drahtring M_1, dessen Stromstärke J_1 ebenfalls eine *blosse Function der Zeit* ist. Auch seien die Bezeichnungen für diesen zweiten Ring völlig analog mit denen beim ersten Ringe; so dass also z. B. die Relation zu notiren ist:

(4.) $$D\tau_1 = q_1 Ds_1.$$

Alsdann wird das *F. Neumann'sche Potential* P der beiden Stromringe auf einander, seiner analytischen Definition nach, dargestellt sein durch den Ausdruck:

(5.) $$P = - A^2 J J_1 \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} Ds Ds_1,$$

oder auch durch folgenden Ausdruck:

(6.) $$P = -A^2 JJ_1 \int\int \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r} Ds Ds_1,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds des einen, und über alle Elemente Ds_1 des andern Ringes. Dabei bezeichnen r, ϑ, ϑ_1, ε die zwei solchen Elementen Ds, Ds_1 zugehörigen Ampère'schen Argumente [vgl. Seite 5 (c.)]. Ueberdies bezeichnet A^2 eine positive Constante, deren Werth lediglich abhängt von den der Betrachtung zu Grunde gelegten Maasseinheiten.

Dass die beiden Ausdrücke (5.) *und* (6.) *stets ein und denselben Werth haben, ergiebt sich sofort auf Grund eines bekannten Satzes* [*vgl. die Bemerkung Seite 15*]. Uebrigens kann man leicht für das Potential P noch andere Ausdrücke angeben. Multiplicirt man z. B. die beiden Formeln (5.) und (6.) respective mit $\frac{1+k}{2}$ und $\frac{1-k}{2}$, und addirt, so ergiebt sich sofort:

(7.) $$P = -A^2 JJ_1 \int\int \left(\frac{1+k}{2} \frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r}\right) Ds Ds_1,$$

wo k eine ganz beliebige Constante sein kann. Die Formeln (5.), (6.) sind identisch mit denen im ersten Theile dieses Werkes Seite 57.

Giebt man den Formeln (5.), (6.) die Gestalt:

(8.) $$P = JJ_1 Q,$$

versteht man also unter Q den Ausdruck:

(9.) $$Q = -A^2 \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds Ds_1 = -A^2 \int\int \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r} Ds Ds_1,$$

so wird offenbar P von den drei Grössen J, J_1, Q abhängen, während Q seinerseits nur noch von den *geometrischen* Verhältnissen (nämlich von der Gestalt und relativen Lage der beiden Ringe) abhängt.

P heisst schlechtweg das gegenseitige Potential der beiden Stromringe, während Q zu bezeichnen sein wird als der Werth des Potentials, bezogen auf die Stromeinheiten.

Sind die beiden Ringe in beliebigen Bewegungen, und zugleich die beiden Stromstärken in beliebigen Aenderungen begriffen, so ergiebt sich aus (8.) durch Differentiation:

(10.) $$dP = JJ_1 dQ + JQdJ_1 + J_1 QdJ,$$

eine Formel, die man z. B. auch so schreiben kann:

(11.) $$dP = Jd(J_1 Q) + J_1 QdJ.$$

Hier sind alsdann dP, dQ, dJ, dJ_1 die Zuwüchse von P, Q, J, J_1 während eines unendlich kleinen Zeitelementes dt.

Die in (10.), (11.) auf der rechten Seite befindlichen einzelnen Terme werden als *partielle* oder *virtuelle Zuwüchse* von P anzusehen sein. So z. B. kann in (10.) der Term

(12.) $$JJ_1 dQ$$

bezeichnet werden als derjenige Zuwachs, den das Potential P während der Zeit dt annehmen *würde*, falls man die beiden Stromstärken J und J_1 (die in Wirklichkeit Functionen der Zeit sind) während dieses Zeitelementes dt als constant ansehen wollte. Desgleichen wird in (10.) der Term

(13.) $$JQdJ_1$$

zu bezeichnen sein als derjenige Zuwachs, den das Potential P während der Zeit dt annehmen *würde*, falls man J und Q während dieser Zeit als constant ansehen wollte. U. s. w.

Bemerkung. — Ein Element DM des Ringes M kann, wie es uns beliebt, nach seiner *Masse*, oder nach seinem *Volumen*, oder endlich nach seiner *Länge* benannt werden. Und in der That sollen im Folgenden die Bezeichnungen DM, $D\tau$ und Ds ganz *promiscue* zur Anwendung kommen. Analoges soll für die Elemente des Ringes M_1 gelten.

§ 2.

Die ponderomotorischen Fundamentalgleichungen.

Bewegt sich ein ponderabler Massenpunkt $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss einer ponderomotorischen Kraft (A, B, C), so gelten für diese Bewegung die bekannten Gleichungen:

(1.) $$md\alpha = Adt, \quad md\beta = Bdt, \quad md\gamma = Cdt,$$

wo α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes vorstellen:

(1a.) $$\alpha = \frac{dx}{dt}, \quad \beta = \frac{dy}{dt}, \quad \gamma = \frac{dz}{dt}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (1.) mit den Gleichungen (1a.), und addirt, so erhält man sofort:

$$d\left(\frac{m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2}\right) = Adx + Bdy + Cdz,$$

oder etwas anders geschrieben:

(2.) $$dT = Adx + Bdy + Cdz,$$

wo alsdann T die Bedeutung hat:

(3.) $$T = \frac{m(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2};$$

so dass also dieses T die sogenannte *lebendige Kraft* des Punktes m vorstellt. Auch ist bekannt, dass man das in (2.) auf der rechten Seite stehende Trinom

(4.) $$Adx + Bdy + Cdz$$

zu bezeichnen pflegt als die während der Zeit dt auf den Punkt m ausgeübte *ponderomotorische Arbeit.*

Die vorstehenden Formeln bleiben auch dann noch in Gültigkeit, wenn auf den Punkt m beliebig viele ponderomotorische Kräfte (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), ... (A_n, B_n, C_n) einwirken. Nur werden alsdann in jenen Formeln die A, B, C durch

$$\sum_{h=1}^{n} A_h, \quad \sum_{h=1}^{n} B_h, \quad \sum_{h=1}^{n} C_h$$

zu ersetzen sein; so dass z. B. die Arbeit (4.) in diesem Fall aus n Theilen bestehen wird:

$$(5.) \qquad Adx + Bdy + Cdz = \sum_{h=1}^{n} (A_h dx + B_h dy + C_h dz).$$

Die Formeln (1.) *sind gültig für ein absolut ruhendes Coordinatensystem, und sind daher, wie aus ihnen selbst durch Transformation sich ergiebt, nicht mehr gültig für ein in Bewegung begriffenes Coordinatensystem. Solches überträgt sich auf die aus* (1.) *abgeleiteten Formeln.*

Im Folgenden wird die während der Zeit dt ausgeübte ponderomotorische Arbeit im Allgemeinen mit dL bezeichnet werden. Ist insbesondere von derjenigen Arbeit die Rede, welche ein gegebenes Object α während der Zeit dt auf ein anderes Object β ausübt, so soll diese Arbeit mit

$$(6.) \qquad (dL)_\beta^\alpha$$

bezeichnet werden.

§ 3.

Das F. Neumann'sche ponderomotorische Integralgesetz.

Wir halten fest an den zu Anfang dieses Abschnittes [Seite 55 (1.), (2.), ... (13.)] angegebenen Vorstellungen, denken uns aber die damals betrachteten Ringe M und M_1 in beliebigen Bewegungen begriffen, und zwar der Art, dass z. B. auch die Gestalt eines solchen Ringes im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick sich ändert. Dabei mögen indessen die beiden Ringe, wenn auch als vollkommen biegsam, so doch als *inextensibel* gedacht werden.

Nach wie vor seien DM und DM_1 irgend zwei Elemente der beiden Ringe. Bezeichnet man die von DM_1 auf DM während der Zeit dt ausgeübte ponderomotorische Arbeit [der allgemeinen Festsetzung (6.) entsprechend] mit

$$(dL)_{DM}^{DM_1},$$

so ist offenbar:



(7 α.) $$(dL)_{DM}^{DM_1} = Xdx + Ydy + Zdz,$$

wo X, Y, Z die Componenten der von DM_1 auf DM ausgeübten ponderomotorischen Kraft sind, während dx, dy, dz die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse der Coordinaten x, y, z des Elementes DM vorstellen.

Ferner wird die vom *ganzen* Ringe M_1 auf das Element DM während der Zeit dt ausgeübte ponderomotorische Arbeit

$$(dL)_{DM}^{M_1}$$

den Werth haben:

$$(dL)_{DM}^{M_1} = \left(\sum X\right) dx + \left(\sum Y\right) dy + \left(\sum Z\right) dz,$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM_1 des Ringes M_1. Hiefür mag zur Abkürzung geschrieben werden:

(7 β.) $$(dL)_{DM}^{M_1} = (X)dx + (Y)dy + (Z)dz;$$

wo alsdann die eingeklammerten Grössen

(7 γ.) $$(X) = \sum X, \quad (Y) = \sum Y, \quad (Z) = \sum Z$$

die Componenten derjenigen ponderomotorischen Kraft sind, welche der *ganze* Ring M_1 auf das einzelne Element DM ausübt.

Endlich wird die vom *ganzen* Ringe M_1 auf den *ganzen* Ring M während der Zeit dt ausgeübte ponderomotorische Arbeit

$$(dL)_M^{M_1}$$

folgenden Werth besitzen:

(7 δ.) $$(dL)_M^{M_1} = \sum[(X)dx + (Y)dy + (Z)dz],$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM des Ringes M.

Ebenso wie diese Formeln (7 α, β, γ, δ für die Einwirkung von M_1 auf M gelten, ebenso werden offenbar umgekehrt für die Einwirkung von M auf M_1 folgende analoge Formeln zu notiren sein:

(8 α.) $$(dL)_{DM_1}^{DM} = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1,$$

(8 β.) $$(dL)_{DM_1}^{M} = (X_1)dx_1 + (Y_1)dy_1 + (Z_1)dz_1,$$

(8 γ.) $$(X_1) = \sum X_1, \quad (Y_1) = \sum Y_1, \quad (Z_1) = \sum Z_1,$$

(8 δ.) $$(dL)_{M_1}^{M} = \sum[(X_1)dx_1 + (Y_1)dy_1 + (Z_1)dz_1].$$

Hier sind alsdann z. B. X_1, Y_1, Z_1 die Componenten der von DM auf DM_1 ausgeübten ponderomotorischen Kraft, und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Elementes DM_1. U. s. w.

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zu unserm eigentlichen Gegenstande. Das *Ampère'sche Gesetz* ist mehrfach bezweifelt worden, namentlich z. B. von *Helmholtz*. Hingegen ist bis jetzt niemals ein Zweifel laut geworden gegen das von *F. Neumann* aufgestellte Integralgesetz. Demgemäss wollen wir das Ampère'sche Gesetz ganz fallen lassen, und, an seiner Stelle, als einen wirklich zuverlässigen Stützpunkt für unsere Untersuchungen, dieses Integralgesetz acceptiren. Dasselbe lautet folgendermassen:

Das F. Neumann'sche ponderomotorische Integralgesetz. — *Sind die beiden inextensiblen Ringe M und M_1 in beliebigen Bewegungen begriffen, und sind die in ihnen vorhandenen Stromstärken J und J_1 blosse Functionen der Zeit, so wird die Summe*

$$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M$$

der von den beiden Ringen während der Zeit dt aufeinander ausgeübten ponderomotorischen Arbeiten stets gleich sein dem Negativen desjenigen Zuwachses, den das Potential

$$P = JJ_1 Q, \quad [\textit{vgl. Seite 57 (8.)}], \tag{9.}$$

während der Zeit dt erfahren würde, falls man bei Bildung dieses Zuwachses die beiden Stromstärken J und J_1 (die in Wirklichkeit Functionen der Zeit sind) als constant ansehen wollte.

Dieser virtuelle Zuwachs ist offenbar $= JJ_1 dQ$ [vgl. Seite 58 (12.)]; so dass also das F. Neumann'sche Gesetz ausdrückbar ist durch folgende Formel:

$$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -JJ_1 dQ, \tag{10.}$$

wo dQ den wirklichen Zuwachs von Q während der Zeit dt vorstellt.

Das Gesetz liefert also zunächst nur die *Summe* zweier Arbeiten. Um diese Arbeiten *einzeln* zu erhalten, sei Folgendes bemerkt:

Die Grösse Q hängt [vgl. Seite 57 (8.), (9.)] nur von den *geometrischen Verhältnissen* ab. Der Zuwachs dQ rührt somit nur her von den räumlichen Verschiebungen der beiden Ringe, und ist daher in zwei Theile zerlegbar:

$$dQ = d_M Q + d_{M_1} Q, \tag{11.}$$

der Art, dass $d_M Q$ nur von der Verschiebung des Ringes M, andrerseits $d_{M_1} Q$ nur von der des Ringes M_1 abhängt. Substituirt man den Ausdruck (11.) in (10.), so erhält man:

$$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -JJ_1(d_M Q + d_{M_1} Q). \tag{12.}$$

Ebenso wie nun rechter Hand $d_M Q$ nur von der Verschiebung des Ringes M, und $d_{M_1} Q$ nur von der des Ringes M_1 abhängt, ebenso gilt



Analoges linker Hand von den beiden Grössen $(dL)_M^{M_1}$ und $(dL)_{M_1}^M$; wie solches aus (7δ.) und (8δ.) sofort ersichtlich ist.

Jene Verschiebungen sind aber ganz beliebig. Folglich müssen in (12.) die von der Verschiebung des Ringes M abhängenden Glieder, für sich allein, einander gleich sein, und ebenso auch diejenigen Glieder, die von der Verschiebung des Ringes M_1 abhängen. Man gelangt somit zu folgenden beiden Gleichungen:

$$(dL)_M^{M_1} = -JJ_1 d_M Q, \tag{13.}$$

$$(dL)_{M_1}^M = -JJ_1 d_{M_1} Q. \tag{14.}$$

§ 4.

Die Conjectur ponderomotorischer elementarer Drehungsmomente.

Hin und wieder ist der Gedanke aufgetaucht, dass die ponderomotorische Einwirkung eines elektrischen Stromelementes DM_1 auf ein anderes solches Element DM nicht blos in *gewöhnlichen Kräften* X, Y, Z, sondern daneben vielleicht auch noch in irgend welchen von DM_1 auf DM ausgeübten Drehungsmomenten Δ^x, Δ^y, Δ^z bestehen könnte. Bei Annahme dieser Conjectur würden offenbar die Formeln (7α, β, γ, δ) zu ersetzen sein durch Formeln von folgender Gestalt:

$$(dL)_{DM}^{DM_1} = Xdx + Ydy + Zdz + \Delta^x d\mathfrak{a} + \Delta^y d\mathfrak{b} + \Delta^z d\mathfrak{c}, \tag{14α.}$$

$$(dL)_{DM}^{M_1} = (X)dx + (Y)dy + (Z)dz + (\Delta^x)d\mathfrak{a} + (\Delta^y)d\mathfrak{b} + (\Delta^z)d\mathfrak{c}, \tag{14β.}$$

$$\text{wo: } \begin{cases} (X) = \sum X, & (Y) = \sum Y, & (Z) = \sum Z, \\ (\Delta^x) = \sum \Delta^x, & (\Delta^y) = \sum \Delta^y, & (\Delta^z) = \sum \Delta^z, \end{cases} \tag{14γ.}$$

$$(dL)_M^{M_1} = \sum[(X)dx + (Y)dy + (Z)dz + (\Delta^x)d\mathfrak{a} + (\Delta^y)d\mathfrak{b} + (\Delta^z)d\mathfrak{c}]. \tag{14δ.}$$

Hier bezeichnen alsdann $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die kleinen Drehungen, welche das Element DM während der Zeit dt um die Coordinatenaxen x, y, z ausführt. Dabei sind diese kleinen Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, ebenso wie die betreffenden Drehungsmomente Δ^x, Δ^y, Δ^z, gerechnet zu denken respective im Sinne yz, zx, xy. U. s. w.

Die linke Seite des F. Neumann'schen Integralgesetzes (10.):

$$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -JJ_1 dQ \tag{15.}$$

wird also, bei Annahme der in Rede stehenden Conjectur, einen etwas andern analytischen Ausdruck erhalten. So z. B. wird der analytische

Ausdruck des Gliedes $(dL)_M^{M_1}$ alsdann nicht mehr durch (7δ.), sondern durch (14δ.) dargestellt sein. Trotzdem aber wird man, wie leicht zu übersehen ist, auch bei Annahme dieser Conjectur wieder hingelangen zu den beiden früher, in (13.), (14.) angegebenen Gleichungen.

Ob nun die in Rede stehende Conjectur wirklich zu acceptiren ist, oder ob sie vielleicht aus irgend welchen Gründen *a priori* zu verwerfen sei, — mag hier dahingestellt bleiben. Jedenfalls wird es der grösseren Allgemeinheit willen zweckmässig sein, dieselbe bei unseren Untersuchungen mit zu berücksichtigen.

§ 5.

Die elektromotorischen Fundamentalgleichungen.

Es sei M ein *Conductor von ganz beliebiger Gestalt.* Befindet sich nun die in diesem Körper M enthaltene Elektricität in Bewegung unter dem Einfluss irgend welcher elektromotorischen Kräfte, so gelten bekanntlich für die in irgend einem Punkt (x, y, z) des Körpers vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten u, v, w die Formeln:

$$u = \lambda\mathfrak{A}, \quad v = \lambda\mathfrak{B}, \quad w = \lambda\mathfrak{C}, \tag{1.}$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Componenten der an der Stelle (x, y, z) vorhandenen elektromotorischen Kraft vorstellen. Dabei bezeichnet λ eine der ponderablen Masse des Körpers eigenthümlich zugehörige Constante, nämlich die *elektrische Leitungsfähigkeit* des Körpers.

Multiplicirt man die Gleichungen (1.) mit u, v, w, und addirt, so erhält man:

$$u^2 + v^2 + w^2 = \lambda(\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w).$$

Es sei nun $D\tau$ ein innerhalb des Körpers M an der Stelle (x, y, z) abgegrenztes Volumelement. Und es mag die letzte Formel multiplicirt werden mit

$$\frac{D\tau \cdot dt}{\lambda},$$

wo dt ein auf den betrachteten Zeitaugenblick t unmittelbar folgendes unendlich kleines Zeitelement sein soll. Alsdann erhält man:

$$\frac{(u^2 + v^2 + w^2)D\tau \cdot dt}{\lambda} = (\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)D\tau \cdot dt,$$

oder etwas anders geschrieben:

$$dW = (\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)D\tau \cdot dt, \tag{2.}$$

wo alsdann dW die Bedeutung hat:

$$dW = \frac{(u^2 + v^2 + w^2)D\tau \cdot dt}{\lambda}. \tag{3.}$$

Dieser Ausdruck dW repräsentirt bekanntlich (nach dem *Joule*'schen Gesetz) die in Folge der elektrischen Strömung (u, v, w) im Elemente $D\tau$ während der Zeit dt sich entwickelnde *Wärmemenge*.

Wir wollen nun über die räumlichen, zeitlichen und elektrischen Maasseinheiten bei all' unsern Untersuchungen nur eine einzige Voraussetzung machen. Diese besteht darin, dass die für die elektrische Leitungsfähigkeit zu wählende Maasseinheit den übrigen Maasseinheiten in solcher Weise adjungirt sein soll, dass der in (3.) *für die Wärmemenge* dW *angegebene Werth diese Wärmemenge in mechanischem Maass darstellt, also diejenige lebendige Kraft repräsentirt, welche dieser Wärmemenge äquivalent ist.*

Solches festgesetzt, wird es in Anbetracht der Formel (2.) erlaubt sein, den daselbst auf der rechten Seite stehenden Ausdruck

$$(4.)\qquad (\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)D\tau \cdot dt$$

als die während der Zeit dt auf das Element $D\tau$ ausgeübte *elektromotorische Arbeit* zu bezeichnen*). Auch dürfte diese Bezeichnungsweise wohl identisch sein mit der von vielen Physikern schon seit langer Zeit benutzten.

Die vorstehenden Formeln bleiben gültig, wenn an der betrachteten Stelle (x, y, z) beliebig viele elektromotorische Kräfte $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1)$, $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2)$, ... $(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n)$ auf den Körper einwirken. Nur werden alsdann in jenen Formeln die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu ersetzen sein durch

$$\sum_{h=1}^{n} \mathfrak{A}_h, \quad \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{B}_h, \quad \sum_{h=1}^{n} \mathfrak{C}_h;$$

so dass also alsdann z. B. die *elektromotorische Arbeit* (4.) aus n Theilen bestehen wird:

$$(5.)\qquad (\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)D\tau \cdot dt = \sum_{h=1}^{n} (\mathfrak{A}_h u + \mathfrak{B}_h v + \mathfrak{C}_h w)D\tau \cdot dt.$$

Die Formeln (1.) sind gültig für ein mit der ponderablen Masse des Körpers M fest verbundenes Coordinatensystem, und sind daher (wie aus ihnen selbst durch Transformation sich ergiebt) auch noch gültig für ein Coordinatensystem, dessen relative Lage zum Körper M von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändert. Gleiches gilt selbstverständlich von den aus (1.) abgeleiteten Formeln. — *Von diesem Umstande abgesehen, zeigen die Formeln* (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) *eine unverkennbare Analogie mit den früher* [*auf Seite 58*] *angegebenen ponderomotorischen Formeln* (1.), (2.), (3.), (4.), (5.).

*) Besser würde man diese Arbeit wohl zu nennen haben: Die *innerhalb* des Volumelementes $D\tau$ während der Zeit dt verrichtete elektromotorische Arbeit.

Die während eines Zeitelementes dt ausgeübte elektromotorische Arbeit mag im Folgenden im Allgemeinen mit $d\mathfrak{L}$ bezeichnet werden. Ist insbesondere von derjenigen elektromotorischen Arbeit die Rede, welche ein gegebenes Object α während der Zeit dt auf ein anderes gegebenes Object β ausübt, so soll diese Arbeit mit

$$(d\mathfrak{L})_{\beta}^{\alpha} \tag{6.}$$

benannt werden.

§ 6.

Das F. Neumann'sche elektromotorische Integralgesetz.

Die beiden inextensiblen Ringe M und M_1 seien in beliebigen Bewegungen begriffen [ebenso wie in § 3 Seite 59]. Ferner seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten der vom Elemente DM_1 in irgend einem Punkt des Elementes DM hervorgebrachten *elektromotorischen Kraft*. Alsdann wird die von dieser Kraft $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ während der Zeit dt auf das Element DM ausgeübte *elektromotorische Arbeit* [nach der in (4.) gegebenen Definition] den Werth haben:

$$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w) D\tau\, dt,$$

wo $D\tau$ das Volumen des Elementes DM vorstellt, während u, v, w die Componenten der in DM vorhandenen elektrischen Strömung bezeichnen. Diese Arbeit kann kurzweg *die von DM_1 auf DM während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit* genannt, und als solche mit

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1}$$

bezeichnet werden, [vgl. (6.)]; so dass also die Formel zu notiren ist:

$$(dL)_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w) D\tau\, dt. \tag{7α.}$$

Demgemäss wird die vom *ganzen* Ringe M_1 während der Zeit dt auf das Element DM ausgeübte elektromotorische Arbeit

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{M_1}$$

den Werth haben:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{M_1} = \left[\left(\sum\mathfrak{X}\right)u + \left(\sum\mathfrak{Y}\right)v + \left(\sum\mathfrak{Z}\right)w\right] D\tau\, dt,$$

die Summationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente DM_1 des Ringes M_1. Hiefür mag zur Abkürzung geschrieben werden:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{M_1} = [(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w] D\tau\, dt. \tag{7β.}$$

Die hier eingeführten Grössen

$$(\mathfrak{X}) = \sum\mathfrak{X}, \quad (\mathfrak{Y}) = \sum\mathfrak{Y}, \quad (\mathfrak{Z}) = \sum\mathfrak{Z} \tag{7γ.}$$

repräsentiren alsdann die Componenten der vom *ganzen* Ringe M_1 in

einem Punkt des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft.

Endlich ergiebt sich aus (7β.) für die während der Zeit dt vom *ganzen* Ringe M_1 auf den *ganzen* Ring M ausgeübte elektromotorische Arbeit

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1}$$

folgende Formel:

$$(7\delta.)\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = (dt)\int[(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w]D\tau,$$

die Summation ausgedehnt gedacht über alle Elemente $DM(D\tau)$ des Ringes M.

Für das cylindrische Element DM gelten bekanntlich [vgl. Seite 56 (2.), (3.)] die Formeln:

$$(8.)\qquad i = \frac{J}{q} \quad \text{und} \quad D\tau = qDs;$$

woraus durch Multiplication sich ergiebt:

$$(9.)\qquad iD\tau = JDs.$$

Sind nun Dx, Dy, Dz die rechtwinkligen Componenten, und A, B, C die Richtungscosinus des Linienelementes Ds, so ist:

$$(10.)\qquad A = \frac{Dx}{Ds}, \quad B = \frac{Dy}{Ds}, \quad C = \frac{Dz}{Ds}.$$

Aus (9.) und (10.) folgt durch Multiplication sofort:

$$(11.)\qquad AiD\tau = JDx, \quad BiD\tau = JDy, \quad CiD\tau = JDz.$$

Die Strömung i besitzt aber die Richtung $Ds(A, B, C)$. Und die Producte Ai, Bi, Ci sind daher nichts Anderes als die Componenten u, v, w der Strömung i. Somit folgt aus (11.):

$$(12.)\qquad uD\tau = JDx, \quad vD\tau = JDy, \quad wD\tau = JDz.$$

Die Formeln (7$\alpha, \beta, \gamma, \delta$.) erhalten nun, durch Anwendung dieser Relationen (12.), folgende Gestalt:

$$(13\alpha.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = Jdt\cdot(\mathfrak{X}Dx + \mathfrak{Y}Dy + \mathfrak{Z}Dz),$$

$$(13\beta.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{M_1} = Jdt\cdot[(\mathfrak{X})Dx + (\mathfrak{Y})Dy + (\mathfrak{Z})Dz],$$

$$(13\gamma.)\qquad (\mathfrak{X}) = \sum\mathfrak{X}, \quad (\mathfrak{Y}) = \sum\mathfrak{Y}, \quad (\mathfrak{Z}) = \sum\mathfrak{Z},$$

$$(13\delta.)\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = Jdt\cdot\int[(\mathfrak{X})Dx + (\mathfrak{Y})Dy + (\mathfrak{Z})Dz],$$

wo in der letzten Formel die Integration ausgedehnt zu denken ist über alle Elemente $Ds(Dx, Dy, Dz)$ des Ringes M.

Dies vorangeschickt, gehen wir jetzt endlich über zu unserm eigentlichen Gegenstande, nämlich zur näheren Betrachtung der elektromotorischen Kräfte.

Als feste Basis zur Untersuchung der elektromotorischen Kräfte werden wir ohne Zweifel das bekannte *F. Neumann'sche allgemeine Princip* der inducirten Ströme benutzen können. Es mag gestattet sein, dieses Princip als das *elektromotorische Integralgesetz* zu bezeichnen. Dasselbe lautet folgendermassen:

Das F. Neumann'sche elektromotorische Integralgesetz. — *Sind die beiden inextensiblen Ringe M und M_1 in beliebigen Bewegungen begriffen, und sind überdies die in denselben vorhandenen Stromstärken J und J_1 blosse Functionen der Zeit, so wird die vom Ringe M_1 während der Zeit dt auf den Ring M ausgeübte elektromotorische Arbeit*

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1}$$

stets gleich sein demjenigen Zuwachs, den das Potential

$$P = JJ_1Q, \quad [\text{vgl. Seite 57 (8.)}], \tag{14.}$$

während der Zeit dt annehmen würde, falls man bei Bildung dieses Zuwachses die Stromstärke J (die in Wirklichkeit eine Function der Zeit ist) als constant ansehen wollte.

Dieser virtuelle Zuwachs ist offenbar $= Jd(J_1Q)$; so dass also das F. Neumann'sche Gesetz darstellbar ist durch folgende Formel:

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = Jd(J_1Q), \tag{15.}$$

wo $d(J_1Q)$ den wirklichen Zuwachs des Productes J_1Q während der Zeit dt vorstellt.

Analoges gilt selbstverständlich auch umgekehrt für die von M auf M_1 ausgeübte Wirkung; so dass also zu (15.) folgende Parallelformel hinzuzufügen ist:

$$(d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = J_1d(JQ), \tag{16.}$$

wo $d(JQ)$ den wirklichen Zuwachs von JQ vorstellt.

Bemerkung. — *Uebrigens ist dieses Gesetz von F. Neumann auch für den Fall als richtig constatirt worden, dass die beiden Ringe mit Gleitstellen versehen sind, immer vorausgesetzt, dass die linearen Leiter, aus denen ein solcher Ring besteht, jeder für sich allein betrachtet, inextensibel sind, und dass die Stromstärke in jedem der beiden Ringe eine blosse Function der Zeit ist.*

An die Formeln (14.), (15.), (16.) schliessen sich einige weitere Formeln an, auf die wir hier näher eingehen wollen. — Nach (14.) ist: $JJ_1Q = P$, und folglich:

$$Jd(J_1Q) = dP - (J_1Q)dJ,$$
$$J_1d(JQ) = dP - (JQ)dJ_1;$$

so dass man also die Formeln (15.), (16.) auch so schreiben kann:

$$(\alpha.)\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = dP - (J_1 Q)dJ,$$

$$(\beta.)\qquad (d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = dP - (JQ)dJ_1.$$

Andrerseits ist, was die *ponderomotorischen* Wirkungen betrifft, nach dem betreffenden F. Neumann'schen Gesetz [Seite 61 (10.)]:

$$(\gamma.)\qquad (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = -JJ_1 dQ.$$

Durch Addition dieser drei Formeln (α.), (β.), (γ.) ergiebt sich nun sofort:

$$(17.)\quad (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} + (d\mathfrak{L})_M^{M_1} + (d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = 2dP - d(JJ_1 Q),$$

$$\text{d. i.: } = 2dP - dP, \quad \text{[vgl. (14.)]},$$

$$\text{d. i.: } = dP;$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Sind die inextensiblen Ringe M und M_1 in beliebigen Bewegungen begriffen, und ihre Stromstärken beliebige Functionen der Zeit, so wird für jedes Zeitelement dt die Formel stattfinden:*

$$(18.)\qquad (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} + (d\mathfrak{L})_M^{M_1} + (d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = dP.$$

D. h. Die Summe aller während der Zeit dt von den beiden Ringen aufeinander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ist ein vollständiges Differential, nämlich $= dP$, wo P das gegenseitige Potential der beiden Ringe, und dP den Zuwachs desselben während der Zeit dt vorstellt.

§ 7.

Die Helmholtz'sche Theorie des elementaren Potentials.

Die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze (Seite 61 und 67) handeln beide vom Potential. Sie repräsentiren zusammengenommen die F. Neumann'sche Potentialtheorie. Und zwar bezieht sich diese Theorie, wie aus dem Inhalt jener beiden Gesetze hervorgeht, nur auf *geschlossene* lineare Ströme, und überdies auch nur auf solche, deren Stromstärken *blosse Functionen der Zeit* sind.

In seinen berühmten Arbeiten von 1870—75 hat nun Helmholtz diese F. Neumann'sche Theorie zu „erweitern", nämlich auf einzelne Strom-*Elemente* auszudehnen versucht*). So z. B. spricht er [in seinen Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 690] kurzweg von dem gegenseitigen Potential P zweier solcher Elemente.

*) Helmholtz selber hat das Wort „erweitern" gebraucht, und seine Arbeiten als eine „Erweiterung" der F. Neumann'schen Theorie bezeichnet. [Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 763 und Bd. 3, Seite 481].

Dass diese Vorstellung des *elementaren* Potentials eine völlig neue, eine mehr oder weniger hypothetische war, geht wohl schon daraus hervor, dass Helmholtz in einem späteren Aufsatz [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 712] das Bedürfnis fühlt, dieselbe näher zu motiviren. Helmholtz spricht nämlich daselbst zuvörderst von den einfachen *Eigenschaften*, welche die elektrodynamischen Kräfte nach der F. Neumann'schen Theorie besitzen sollen, und fährt dann fort [a. a. O. Seite 713]:

„Ich muss gestehen, dass es mir im höchsten Grade unwahrschein-„lich dünkt, dass Eigenschaften, wie diese, die am Entscheidensten für „den Charakter von Naturkräften sind, bei den uns bekannten elektro-„dynamischen Wirkungen nur durch einen gleichsam *zufälligen* Einfluss „der Summirung über eine geschlossene Bahn entstanden sein sollten, „während sie den einzelnen Summanden an und für sich nicht zukämen".

Aus dieser und anderen Stellen der Helmholtz'schen Arbeiten geht deutlich hervor, dass es sich hier wirklich um ein *Novum* handelt. Auch wird man beim Lesen der Helmholtz'schen Arbeiten besondere Mühe darauf zu verwenden haben, dass man dieses *Helmholtz'sche Novum* und das *F. Neumann'sche Antiquum* nicht mit einander confundire. Wenn z. B. in jenen Arbeiten kurzweg von der „Potentialtheorie" gesprochen wird, so ist darunter, je nach dem nähern Zusammenhange, bald das eine, bald das andere zu verstehen. Und zwar wird man bei derartigen Unterscheidungen folgende Merkmale im Auge zu behalten haben:

I. *Das F. Neumann'sche Antiquum (1847), d. i. der Inbegriff der beiden F. Neumann'schen Integralgesetze (Seite 61 und 67), betrifft lediglich das Potential geschlossener Ströme, d. i. das Potential von Strom-Ringen.*

II. *Demgegenüber ist das Helmholtz'sche Novum (1870) zu charakterisiren als die Theorie des Potentials von Strom-Elementen, oder, kürzer ausgedrückt, als die Theorie des elementaren Potentials.* Diese Idee des elementaren Potentials bildet den eigentlichen Nerv aller von Helmholtz in der Zeit von 1870—75 publicirten elektrodynamischen Arbeiten.

Uebrigens möchte ich Helmholtz aus der Vermischung dieser beiderlei Theorien I. und II. keinen Vorwurf machen. Wenn Helmholtz damals diese beiden Theorien nicht gehörig auseinanderhielt, vielmehr seine eignen Vorstellungen ohne Weiteres als einen Bestandtheil der F. Neumann'schen Theorie hinstellte, so dürfte das wohl nur als eine Art Bescheidenheit anzusehen sein. Er war damals offenbar der Ansicht, sein *Novum* habe zu jenem F. Neumann'schen *Antiquum* einen so engen und unmittelbaren Anschluss, dass eine bestimmte Grenzlinie dazwischen markiren zu wollen ganz überflüssig sei.



Dass solches aber *nicht* ganz überflüssig gewesen wäre, werden wir deutlich erkennen, wenn wir einen Blick werfen auf die weitere Entwicklung der Dinge und namentlich auf eine bestimmte Aeusserung von Helmholtz vom Jahre 1875, mit welcher diese Dinge einen gewissen Abschluss erreichten.

Im Jahre 1874 gelangte nämlich Helmholtz im Verlaufe seiner Arbeiten und auf Grund seiner wesentlich neuen Vorstellungen zu dem sehr merkwürdigen Resultat, dass die *Endpunkte* ungeschlossener elektrischer Ströme mit eigenthümlichen Kräften begabt sein müssten [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 723, 724]. Diese eigenthümlichen „*Endkräfte*" riefen mancherlei Einwände hervor*), und erregten wohl auch bei Helmholtz selber ernste Bedenken, so dass er sich zu sehr feinen und mühsamen experimentellen Untersuchungen über die Frage veranlasst sah, ob solche Endkräfte in Wirklichkeit existirten, oder nicht. So sagt er z. B. gelegentlich [a. a. O. Seite 787, Note], seine Theorie des *elementaren* Potentials**) sei zwar „*bisher*" von ihm gegen nichtige Einwände vertheidigt worden, aber doch immer nur als eine solche, über deren Richtigkeit endgültig nur neue Versuche entscheiden könnten. Die Punkte zu finden, wo das Experiment eingreifen könne, sei der ausgesprochene Zweck seiner früheren Arbeiten gewesen, u. s. w. Sodann aber äussert sich Helmholtz (a. a. O. Seite 787) über das Ergebniss der nach dieser Richtung hin von ihm angestellten Experimente folgendermassen:

*1875. „Es folgt nun hieraus, dass die Theorie des elementaren „Potentials***), wenn in ihr nur die elektrischen Bewegungen und deren „Fernwirkungen berücksichtigt werden, mit den (experimentellen) That„sachen in Widerspruch tritt."*

Helmholtz ist also der Meinung, dieser „*Widerspruch*" könne in Zukunft vielleicht dadurch beseitigt werden, dass man ausser den ge-

---

*) Das Wort „*Endkräfte*" ist von Helmholtz selber gebraucht worden. [Man vgl, seine Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 721, Note].

**) Helmholtz spricht an jener Stelle kurzweg vom „Potentialgesetz". Dass darunter aber das Helmholtz'sche *Novum*, nämlich die Theorie des *elementaren* Potentials zu verstehen ist, kann keinem Zweifel unterliegen. Ist doch gegen das F. Neumann'sche *Antiquum* niemals ein Bedenken geäussert worden, weder von Helmholtz selbst, noch von irgend einem andern Autor.

***) Helmholtz gebraucht an jener Stelle kurzweg das Wort „Potentialtheorie". Dass darunter aber das *Helmholtz'sche Novum*, nämlich die Theorie des *elementaren* Potentials zu verstehen sei, liegt auf der Hand. Wird doch auch an jener Stelle (a. a. O. Seite 787) von Helmholtz ausdrücklich hinzugefügt, dass die in Rede stehenden experimentellen Thatsachen sich „hinreichend gut" fügen unter die *F. Neumann'sche Theorie* d. i. unter das *F. Neumann'sche Antiquum.*

nannten Dingen (elektrische Bewegungen und Fernkräfte derselben) noch irgend welche andern (innerhalb der betrachteten Körper oder zwischen ihnen stattfindende) Vorgänge mitberücksichtigt. Auch bin ich meinerseits der Ansicht, dass diese von Helmholtz angedeutete Möglichkeit früher oder später sich realisiren werde, und dass man durch genauere Erforschung der Elementarvorgänge dereinst zu jenem Helmholtz'schen Ideal, nämlich zu einer Theorie des *elementaren* Potentials wirklich hingelangen werde. Und das würde ein Fortschritt von so eminenter Bedeutung sein, wie wohl nur wenige in der Geschichte der Wissenschaft zu verzeichnen sind.

Einstweilen aber müssen wir — angesichts jener vorhin citirten Helmholtz'schen Aeusserung von 1875 — auf die Vorstellung eines solchen elementaren Potentials leider Verzicht leisten. D. h. Wir werden, falls wir einen sicheren Boden unter uns behalten wollen, das Helmholtz'sche Novum aufgeben, und beim F. Neumann'schen Antiquum verbleiben müssen.

Somit zeigt sich also, wie wichtig es gewesen wäre, wenn Helmholtz in seinen Arbeiten gleich von Anfang an diese beiderlei Dinge (sein Novum und das F. Neumann'sche Antiquum) scharf auseinander gehalten hätte.

Uebrigens sind, was jenen vorhin erwähnten, im Jahre 1875 zu Tage getretenen *Widerspruch* zwischen der Theorie des elementaren Potentials und zwischen den experimentellen Thatsachen anbelangt, noch weitere Aeusserungen von Helmholtz beachtenswerth. So z. B. sagt derselbe (Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 788), dass jener Widerspruch gehoben, und die Theorie des elementaren Potentials den experimentellen Thatsachen entsprechend ergänzt oder abgeändert werden könne, — und zwar dadurch, dass man mit Faraday und Maxwell auch in den *Isolatoren* elektrische Bewegungen mit elektrodynamischer Wirksamkeit annehme. Nach der Faraday-Maxwell'schen Vorstellungsweise wären nämlich *un*geschlossene Ströme überhaupt nicht denkbar. Vielmehr müsse nach dieser Vorstellungsweise jede elektrische Bewegung in Leitern, die zu einer Anhäufung der Elektricität an ihrer Oberfläche führt, sich in den umgebenden Isolatoren als äquivalente Bewegung entstehender und vergehender diëlektrischer Polarisationen fortsetzen. Kurz, nach jener Faraday-Maxwell'schen Vorstellungsweise seien *un*geschlossene Ströme überhaupt nicht vorhanden. Und hiemit würden alsdann die Schwierigkeiten und Widersprüche, welche die *Endpunkte* elektrischer Ströme, und die von diesen Endpunkten ausgehenden Kräfte (die sogenannten „Endkräfte") mit sich bringen, beseitigt sein*).

*) Man vgl. eine spätere Aeusserung von Helmholtz in seinen Vorlesungen. [Helmholtz' Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 5, 1897, Ende des § 27, Seite 97].



Helmholtz fährt sodann fort (Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 788), er behalte sich vor, die *vollständige* Ausführung der Principien für die bei einer Bewegung von Leitern und Isolatoren eintretenden ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen, auf Grundlage jener Faraday-Maxwell'schen Vorstellungsweise, an einem andern Orte zu geben, und hiedurch die Verbindung zwischen der Theorie des elementaren Potentials und zwischen der Faraday-Maxwell'schen Theorie vollständig herzustellen. Dieser Vorsatz von Helmholtz ist indessen leider, so weit mir bekannt, nicht zur Ausführung gelangt.

Bemerkung. — Wenn es seit Helmholtz üblich geworden ist, den Ausdruck

$$\frac{Ds Ds_1 \cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r} \tag{1.}$$

als das *Weber*'sche elementare Potential, andrerseits aber den Ausdruck

$$\frac{Ds Ds_1 \cos\varepsilon}{r} \tag{2.}$$

als das *F. Neumann*'sche elementare Potential zu bezeichnen, so muss ich diese letztere Bezeichnungsweise als eine *durchaus unrichtige* und *durchaus unpassende* zurückweisen. Denn die F. Neumann'schen Untersuchungen beziehen sich im Wesentlichen nur auf *geschlossene* Ströme, wo eine Unterscheidung zwischen jenen beiden Ausdrücken überhaupt ganz überflüssig sein würde. Aber selbst an solchen Stellen, wo von einzelnen Strom*elementen* die Rede ist, hat F. Neumann (sowohl in seinen Abhandlungen, wie auch in seinen Vorlesungen) die beiden Ausdrücke (1.) und (2.) ganz *promiscue* angewendet, ohne bestimmte Entscheidung zu Gunsten des einen oder andern.

Charakteristisch dürfte in dieser Beziehung eine gewisse Stelle sein, die im § 4 des F. Neumann'schen „Allgemeinen Princips" sich vorfindet*). Dort nämlich sagt F. Neumann, *statt des Ausdruckes* (2.) *könne man auch den Ausdruck* (1.) *setzen,* und zwar *deswegen,* weil nach dem § 3 seiner Abhandlung die Formel**) gelte:

$$\iint \frac{Ds Ds_1 \cos\varepsilon}{r} = \iint \frac{Ds Ds_1 \cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r}, \tag{3.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über zwei geschlossene Curven. Es geht nämlich hieraus deutlich hervor, dass F. Neumann jene Ausdrücke (1.) und (2.) nicht an und für sich, sondern nur insofern betrachtet, als sie den Elementen *geschlossener* Ströme angehören.

Wenn ferner Helmholtz [in den Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 547, 548] sagt, F. Neumann habe aus dem Ampère'schen Gesetz den Ausdruck für das Potential zweier Strom*elemente* abgeleitet, so ist zu bemerken, dass F. Neumann

*) Die Ausdrücke (1.) und (2.) sind in jenem § 4 der F. Neumann'schen Abhandlung („Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme" Schriften der Berliner Ak. d. Wiss. 1848) respective mit (5.) und (3.) bezeichnet. Uebrigens findet man die in Rede stehende Stelle jener Abhandlung in Ostwald's Klassikern, Nr. 36, Seite 45.

**) Die Ableitung dieser Formel (3.) findet man im vorliegenden Bande in der Bemerkung auf Seite 15, und ebenso auch in der Bemerkung auf Seite 17.

aus jenem Gesetz nicht das Potential zweier Strom*elemente*, sondern vielmehr das Potential zweier *geschlossener* Ströme hergeleitet hat.

Ueberhaupt dürfte bei F. Neumann weder in seinen Abhandlungen noch auch in seinen Vorlesungen wohl schwerlich eine Stelle zu entdecken sein, in welcher von dem Potential zweier Strom*elemente* die Rede wäre. Ein solcher Begriff existirte für ihn schlechterdings nicht.

§ 8.

Die Helmholtz'sche Dilatationshypothese.

Wir haben uns die beiden linearen Ringe M und M_1 (vgl. die Gesetze Seite 62 und 67) in beliebigen Bewegungen und zugleich auch in beliebigen Gestaltsveränderungen begriffen gedacht. Wollen wir aber hiebei innerhalb desjenigen Spielraumes bleiben, für welchen die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze wirklich aufgestellt und constatirt sind, so müssen wir uns jeden solchen Ring, wenn auch als biegsam, so doch als *unausdehnbar*, als *inextensibel* vorstellen, der Art, dass die Bogenlänge zwischen zwei in die ponderable Masse des Ringes eingefügten senkrechten Querschnitten fortdauernd ein und denselben Werth behält. Und sollte der betrachtete Ring mit Gleitstellen behaftet sein, so müssen wir, um innerhalb jenes Spielraumes zu bleiben, den Ring uns zusammengesetzt denken aus linearen Leitern, deren jeder, für sich allein betrachtet, *inextensibel* ist.

Helmholtz hat bekanntlich auch nach dieser Richtung hin die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze zu erweitern versucht, nämlich angenommen, dass dieselben auch noch gültig seien für *extensible* Leiter, also z. B. für zwei elastische und im Laufe der Zeit sich dilatirende oder contrahirende Ringe.

Diese Helmholtz'sche Annahme werden wir, um mit möglichster Vorsicht zu verfahren, einstweilen von uns fern halten. Später aber (im elften und zwölften Abschnitt) soll eine solche Annahme versuchsweise eingeführt werden. Sie wird daselbst kurzweg als *Dilatationshypothese* bezeichnet werden.

Fünfter Abschnitt.

Die ponderomotorischen und elektromotorischen Einwirkungen linearer Ströme aufeinander. Aufsuchung der betreffenden Elementargesetze.

Die von den Strömen J und J_1 durchflossenen Drahtringe M und M_1 haben wir uns stets sehr dünn gedacht. Ihre Querschnitte sollen also ganz ausserordentlich klein sein. Demgemäss werden wir diese Ringe als *lineare* Ringe, und irgend zwei Elemente Ds und Ds_1 derselben als *lineare* Stromelemente bezeichnen können.

Es handelt sich nun um die ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen, welche zwei solche lineare Stromelemente Ds *und* Ds_1 *gegenseitig auf einander ausüben.*

Ob diese Wirkungen in Uebereinstimmung mit den Ansichten *Ampère*'s und *Weber*'s in die Verbindungslinie der beiden Elemente fallen, oder ob sie vielleicht irgend welche andre Richtungen besitzen, — darüber dürfte *a priori* mit wirklicher Sicherheit wohl schwerlich irgend etwas Bestimmtes zu sagen sein. Liegt doch überdies auch die Möglichkeit vor, dass die gegenseitigen ponderomotorischen Einwirkungen nicht blos in gewöhnlichen Kräften, sondern daneben vielleicht auch noch in gewissen Drehungsmomenten bestünden, mit denen die beiden Elemente gegenseitig einander zu drehen bestrebt sind.

Die in Rede stehenden ponderomotorischen und elektromotorischen Einwirkungen sind also *a priori* völlig unbekannt, bis auf gewisse ihnen zukommende *Grundeigenschaften*, die wohl über allen Zweifel erhaben sein dürften, und die im gegenwärtigen Abschnitt in bestimmter Formulirung angegeben werden sollen. Diese Grundeigenschaften werden uns als Basis dienen zur näheren Erforschung der in Rede stehenden Wirkungen. Zu gleichem Zwecke wird uns überdies auch dienen jenes bekannte *allgemeine Axiom*, dass die in irgend einem Punkt des inducirten Körpers durch gegebene Ursachen hervorgebrachte elektromotorische Kraft von der Gestalt und Beschaffenheit dieses Körpers völlig unabhängig ist.

Bevor wir uns aber in diese Dinge vertiefen, mag hier zuvörderst eine gewisse allgemeine Bemerkung vorangeschickt werden.



Schon in der gewöhnlichen Mechanik ist es von grosser Wichtigkeit zu unterscheiden, ob das der Betrachtung zu Grunde liegende rechtwinklige Axensystem in beliebiger Bewegung sich befindet, oder ob es, eingefügt in die ponderable Masse eines starren Körpers, an der Bewegung dieses letzteren Theil nimmt, oder ob es endlich ein absolut ruhendes sein soll. Noch wichtiger sind derartige Unterscheidungen in der Elektrodynamik.

Ein ganz beliebiges, also möglicher Weise in irgend welcher Bewegung begriffenes rechtwinkliges Axensystem soll im Folgenden angedeutet werden durch das Symbol

(I.) $$[x, y, z].$$

Andrerseits aber soll ein mit einem starren Körper M fest verbundenes (etwa in die ponderable Masse dieses Körpers M eingefügtes) rechtwinkliges Axensystem bezeichnet werden mit:

(II.) $$\boxed{M[x, y, z]};$$

wobei alsdann völlig dahingestellt bleibt, ob diese beiden fest mit einander verbundenen Objecte M und $[x, y, z]$ in Ruhe oder in Bewegung sind.

Ist überhaupt von irgend welchen Objecten α, β, γ, δ, ... die Rede, die starr miteinander verbunden sind, so soll solches angedeutet werden durch das Symbol:

(III.) $$\boxed{\alpha \beta \gamma \delta \ldots}.$$

Eine besondere Bezeichnung für ein absolut ruhendes Axensystem einführen zu wollen, dürfte, wenn auch berechtigt, doch für unsere Zwecke nicht erforderlich sein.

§ 1.

Allgemeines Axiom über die Wirkung der elektromotorischen Kräfte.

Man pflegt bekanntlich, was die elektromotorischen Wirkungen betrifft, das einwirkende Object den *Inducenten*, andererseits aber dasjenige Object, auf welches die Einwirkung stattfindet, den *inducirten Körper* zu nennen. Im Allgemeinen sind beide Objecte in beliebigen Bewegungen begriffen zu denken.

Der *Inducent* kann z. B. ein von elektrischen Strömen durchflossener Körper sein, oder auch ein geschlossener linearer Strom, oder auch ein Theil eines solches Stromes, oder auch ein einzelnes Stromelement.

Mit Bezug auf den *inducirten Körper* existirt ein sehr allgemeines Axiom, dessen Zuverlässigkeit wohl über allen Zweifel erhaben sein dürfte. Dasselbe lautet:

Allgemeines Axiom. — *Die durch einen gegebenen Inducenten in irgend einem Punkt des inducirten Körpers hervorgebrachte elektromotorische Kraft* $\mathfrak{R}$ *ist von der Grösse, Gestalt und Beschaffenheit dieses Körpers, sowie auch von seinem augenblicklichen Zustande völlig unabhängig.*

Es kann dieser inducirte Körper gross oder klein, homogen oder anhomogen, warm oder kalt sein; es kann derselbe durch mechanische Mittel comprimirt oder dilatirt sein; es können in ihm von Hause aus irgend welche elektrische Ladungen und Strömungen vorhanden sein; — stets wird, unter sonst gleichen Umständen, die in einem gegebenen Punkt des Körpers durch den gegebenen Inducenten hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ *ein und dieselbe* sein.

Ist insbesondere der inducirte Körper ein *linearer*, also dargestellt durch einen dünnen Draht, so wird von der Kraft $\mathfrak{R}$ nur die der Richtung des Drahtes entsprechende Componente zur Wirksamkeit gelangen. Diese Componente soll im Folgenden mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden.

§ 2.

Die Grundeigenschaften der elektromotorischen Kräfte.

Es seien gegeben zwei lineare Stromelemente Ds und Ds_1 mit den Stromstärken J und J_1. Ferner sei $\mathfrak{R}$ die vom Elemente Ds_1 in irgend einem Punkt des Elementes Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft. Endlich sei $\mathfrak{E}$ die Componente dieser Kraft $\mathfrak{R}$ nach der Richtung des Elementes Ds; so dass also

$$(\alpha.) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{R} \cos \mathrm{w}$$

ist, wo w den Winkel bezeichnet, unter welchem $\mathfrak{R}$ gegen Ds geneigt ist. Diese Formel $(\alpha.)$ kann offenbar auch so geschrieben werden:

$$(\beta.) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C,$$

wo alsdann $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten von $\mathfrak{R}$, und A, B, C die Richtungscosinus von Ds vorstellen.

Sind übrigens t und $t + dt$ zwei aufeinanderfolgende Zeitaugenblicke, und repräsentirt $\mathfrak{E}$ den Werth der Kraft $\mathfrak{E}$ im Augenblick t, so pflegt man das Product

$$(\gamma.) \qquad \mathfrak{E}dt$$

kurzweg als *die während des Zeitelementes dt im Elemente Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft* zu bezeichnen. Von dieser Ausdrucks-



weise (mag sie nun berechtigt sein oder nicht) soll im Folgenden, wenigstens vorübergehend, Gebrauch gemacht werden.

Wenn man nun von den Vorstellungen, die im Laufe unseres Jahrhunderts über die elektromotorischen Kräfte entstanden sind, alles Zweifelhafte abscheidet, so bleiben gewisse ganz allgemein anerkannte Grundvorstellungen übrig, die man folgendermassen zusammenstellen kann:

Erste Grundeigenschaft. — *Die linearen Stromelemente Ds und Ds_1 seien in beliebigen Bewegungen, und ihre Stromstärken in irgend welchen Aenderungen begriffen. Und zwar mögen die Werthe dieser Stromstärken im Augenblick t mit J und J_1, und im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ mit $J + dJ$ und $J_1 + dJ_1$ bezeichnet sein. Alsdann wird die vom Elemente Ds_1 während der Zeit dt im Elemente Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ [vgl. (γ.)] die Summe zweier Kräfte sein, welche respective proportional sind mit*

$$J_1 Ds_1 \quad \textit{und} \quad (dJ_1) Ds_1.$$

Zweite Grundeigenschaft. — *Die in Rede stehenden beiden Kräfte sind, abgesehen von den Factoren $J_1 Ds_1$ und $(dJ_1)Ds_1$, nur noch abhängig von der zwischen Ds und Ds_1 im Augenblick t vorhandenen relativen Lage, und von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage während der Zeit dt erleidet.*

Sind diese Aenderungen alle $= 0$, und ist überdies auch $dJ_1 = 0$, so sind jene beiden Kräfte ebenfalls $= 0$.

Dritte Grundeigenschaft. — *Man denke sich das Element Ds_1 in drei aufeinander senkrechte Componenten Dx_1, Dy_1, Dz_1 zerlegt, deren ponderable Massen mit der ponderablen Masse von Ds_1 starr verbunden sind. Alsdann wird jene elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ identisch sein mit der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche die Elemente Dx_1, Dy_1, Dz_1, einzeln genommen, während der Zeit dt in Ds hervorbringen würden.*

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Elemente Dx_1, Dy_1, Dz_1 hinsichtlich ihrer Stromstärken mit Ds_1 fortdauernd übereinstimmen.

Bemerkung. — Diese hier angegebenen Grundeigenschaften sind in voller Uebereinstimmung mit denen im ersten Theil dieses Werkes [Seite 112 (1.), (2.), (3.)]. Ebenso wie damals, ist auch gegenwärtig bei Aussprache der dritten Grundeigenschaft besonders betont, dass die ponderablen Massen der Componenten Dx_1, Dy_1, Dz_1 mit der ponderablen Masse des eigentlich gegebenen Elementes Ds_1 *starr verbunden* sein sollen.

Kurze Zeit nach dem Erscheinen des ersten Theiles dieses Werkes habe ich den behandelten Gegenstand von Neuem aufgenommen in einem Aufsatz, der 1873 im zehnten Bande der Abhandlungen der K. Sächs. Ges. d. Wiss. im Druck erschienen ist. In diesem Aufsatz (Seite 469, 470) habe ich, ohne



an der ersten und zweiten Grundeigenschaft etwas zu ändern, der dritten Grundeigenschaft eine etwas *erweiterte Fassung* gegeben, nämlich angenommen,

(E.) dass die auf einander senkrechten Axen x, y, z, nach denen die Componenten Dx_1, Dy_1, Dz_1 des Elementes Ds_1 zu nehmen sind, *ganz beliebig* sein dürfen, dass es also nicht darauf ankomme, ob die relative Lage dieser Axen zum Elemente Ds_1 eine constante, oder eine mit der Zeit sich ändernde ist.

Sind nun, im Falle einer solchen Aenderung, A_1, B_1, C_1 und $A_1 + dA_1$, $B_1 + dB_1$, $C_1 + dC_1$ die jenen Axen x, y, z entsprechenden Richtungscosinus des Elementes Ds_1 in den Augenblicken t und $t + dt$, so wird z. B. die Componente Dx_1 zu *Anfang* und zu *Ende* der Zeit dt die Längen

$$A_1 Ds_1 \quad \text{und} \quad (A_1 + dA_1) Ds_1$$

besitzen, mithin aufzufassen sein als ein Aggregat von *zwei* Stromelementen, von denen das eine die constant bleibende Länge $A_1 Ds_1$ und eine von J_1 auf $J_1 + dJ_1$ anwachsende Stromstärke besitzt, während das andere die constant bleibende Länge $(dA_1) Ds_1$ und eine von 0 auf $J_1 + dJ_1$ anwachsende Stromstärke hat. U. s. w. (Man vgl. den citirten Aufsatz Seite 481, 482).

Helmholtz hat sich im Jahre 1874 gegen die in Rede stehende Erweiterung (E.) *erklärt. Zugleich aber geht aus seinen damaligen Darlegungen deutlich hervor, dass er im Uebrigen mit den von mir den elektromotorischen Kräften beigelegten Grundeigenschaften in voller Uebereinstimmung sich befindet.* [*Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 710, 711*].

Selbstverständlich lege ich das allergrösste Gewicht darauf, mit einem so eminenten Forscher wie Helmholtz, hinsichtlich der eigentlichen Grundvorstellungen, in möglichst vollständigem Einklang zu sein. Demgemäss habe ich hier im gegenwärtigen Paragraph die Erweiterung (E.) ganz fallen lassen. Hiedurch dürfte nach meiner Ansicht erreicht sein, dass in Bezug auf jene drei Grundeigenschaften, was ihre gegenwärtige Formulirung auf Seite 77 betrifft, zwischen Helmholtz und mir *absolute* Uebereinstimmung stattfindet.

§ 3.

Das aus den Grundeigenschaften sich ergebende elektromotorische Elementargesetz.

Es seien r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente der beiden Stromelemente Ds, Ds_1, und zwar die Werthe derselben im Augenblick t. [Vgl. Seite 5]. Ferner seien dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ die Zuwüchse dieser Werthe während des nächstfolgenden Zeitelementes dt.

Die während der Zeit dt vom Elemente Ds_1 im Elemente Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ hat, nach der ersten Grundeigenschaft, einen Werth von folgender Form:

$$\mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 \cdot f + (dJ_1) Ds_1 \cdot F. \tag{1.}$$

Und die hier auftretenden Factoren f und F werden, zufolge der zweiten Grundeigenschaft, nur noch abhängen von der relativen Lage



der beiden Elemente Ds, Ds_1 zu einander im Augenblick t, sowie von derjenigen Aenderung, welche diese relative Lage während der Zeit dt erleidet. Demgemäss sind f und F nur abhängig von r, Θ, Θ_1, E und dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$; so dass man also schreiben kann:

$$(2.)\qquad \mathfrak{E}dt = +J_1 Ds_1 \cdot f(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}, dr, d\Theta, d\Theta_1, d\mathsf{E}) + (dJ_1)Ds_1 \cdot F(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}, dr, d\Theta, d\Theta_1, d\mathsf{E}).$$

Denkt man sich nun die rechte Seite dieser Formel nach den Potenzen der unendlich kleinen Grössen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ entwickelt, so ergiebt sich (weil die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung fortzulassen sind) folgende Gleichung:

$$(3.)\qquad \mathfrak{E}dt = +J_1 Ds_1 (H + Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}) + (dJ_1)Ds_1 (P + Qdr + Rd\Theta + Sd\Theta_1 + Td\mathsf{E}),$$

wo alsdann H, K, L, M, N, P, Q, R, S, T nur noch von den *vier* Argumenten r, Θ, Θ_1, E abhängen; was angedeutet sein mag durch folgende Notizen:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} H &= H(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ K &= K(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ L &= L(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

In der letzten Zeile der Formel (3.) sind von Neuem die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung [z. B. $(dJ_1)dr$, ferner $(dJ_1)d\Theta$, u. s. w.] fortzulassen; so dass man also erhält:

$$(5.)\qquad \mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 (H + Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}) + (dJ_1)Ds_1 P.$$

Nun muss, nach der zweiten Grundeigenschaft, die Kraft $\mathfrak{E}dt = 0$ werden, sobald man die Grössen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 alle $= 0$ sich denkt. Somit ergiebt sich aus (5.), dass die dortige Function H identisch $= 0$ sein muss. Man gelangt daher zu folgender Formel:

$$(6.)\qquad \mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 (Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}) + (dJ_1)Ds_1 P,$$

wo K, L, M, N, P nach wie vor blosse Functionen von r, Θ, Θ_1, E sind:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} K &= K(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ L &= L(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Diese einstweilen noch völlig unbekannten Functionen K, L, M, N, P sind, mittelst der dritten Grundeigenschaft, auf etwas einfachere Functionen reducirbar, nämlich auf solche, die nur noch von *zwei* Argumenten abhängen. Um näher hierauf einzugehen, benutzen wir ein mit dem Elemente Ds_1 starr verbundenes, also an der Bewegung dieses Elementes theilnehmendes rechtwinkliges Axensystem, welches

wir in Einklang mit unseren allgemeinen Festsetzungen [Seite 75 (II.)] bezeichnen mit:

$$(8.)\qquad \boxed{Ds_1[x, y, z]}.$$

Sind, mit Bezug auf dieses Axensystem (8.), A, B, C und A_1, B_1, C_1 die Richtungscosinus der Elemente Ds und Ds_1, und ferner a, b, c die Richtungscosinus der geraden Linie r ($Ds_1 \rightarrow Ds$), so ist offenbar:

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \Theta &= aA + bB + cC, \\ \Theta_1 &= aA_1 + bB_1 + cC_1, \\ \mathsf{E} &= AA_1 + BB_1 + CC_1. \end{aligned}$$

Die Elemente Ds und Ds_1 befinden sich in beliebigen Bewegungen; und an der Bewegung des Elementes Ds_1 betheiligt sich das mit demselben starr verbundene Axensystem $[x, y, z]$. Folglich sind A_1, B_1, C_1 Constanten, hingegen A, B, C und a, b, c Functionen der Zeit. Somit ergiebt sich aus (9.):

$$(9a.)\qquad \begin{aligned} d\Theta &= (Ada + Bdb + Cdc) + (adA + bdB + cdC), \\ d\Theta_1 &= (A_1da + B_1db + C_1dc), \\ d\mathsf{E} &= (A_1dA + B_1dB + C_1dC). \end{aligned}$$

Wir denken uns jetzt das Element Ds_1 nach den mit ihm starr verbundenen Axen x, y, z in drei Componenten Dx_1, Dy_1, Dz_1 zerlegt. Nach der dritten Grundeigenschaft wird alsdann das Element Ds_1, hinsichtlich seiner auf Ds ausgeübten elektromotorischen Wirkung, *äquivalent* sein mit den drei Elementen Dx_1, Dy_1, Dz_1. Es wird also folgende Formel gelten:

$$(10.)\qquad \mathfrak{E}dt = \mathfrak{E}'dt + \mathfrak{E}''dt + \mathfrak{E}'''dt,$$

wo $\mathfrak{E}dt$ nach wie vor die während der Zeit dt von Ds_1 in Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft vorstellt, während $\mathfrak{E}'dt$, $\mathfrak{E}''dt$ und $\mathfrak{E}'''dt$ analoge Bedeutungen haben sollen für Dx_1, Ds, für Dy_1, Ds und für Dz_1, Ds.

Offenbar sind bei unserer Betrachtung die fünf Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 völlig willkürlich zu denken. Folglich muss die vorstehende *Aequivalenzformel* (10.) z. B. gültig sein für den speciellen Fall, dass dr irgend welchen Werth hat, hingegen $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 alle $= 0$ sind. Ebenso muss sie gelten für den Fall, dass $d\Theta$ irgend welchen Werth hat, hingegen dr, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 alle $= 0$ sind. U. s. w. So ergeben sich aus der Aequivalenzformel (10.) im Ganzen *fünf* speciellere Formeln. Und diese specielleren Formeln werden wir der Reihe nach näher zu untersuchen haben.



Erster Specialfall: *Die Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ dJ_1 sind, mit alleiniger Ausnahme von dr, alle $= 0$.* — Alsdann nimmt die Aequivalenzformel (10.), wie aus (6.), (7.), (8.), (9.), (9a.) sich leicht ergiebt, die Gestalt an:

$$J_1 Ds_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ aA_1+bB_1+cC_1,\ AA_1+BB_1+CC_1)dr = \\ = \left\{\begin{matrix} + J_1 Dx_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ a,\ A)dr \\ + J_1 Dy_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ b,\ B)dr \\ + J_1 Dz_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ c,\ C)dr \end{matrix}\right\};$$

denn ebenso wie Ds_1 die Richtungscosinus A_1, B_1, C_1 besitzt, ebenso hat z. B. Dx_1 die Richtungscosinus 1, 0, 0, ferner Dy_1 die Richtungscosinus 0, 1, 0, und endlich Dz_1 die Richtungscosinus 0, 0, 1.

Dividirt man die vorstehende Formel durch $J_1 Ds_1$ und durch dr, und substituirt man dabei zugleich für Dx_1, Dy_1, Dz_1 die Werthe $Dx_1 = A_1 Ds_1$, $Dy_1 = B_1 Ds_1$, $Dz_1 = C_1 Ds_1$, so erhält man sofort:

$$K(r,\ aA+bB+cC,\ aA_1+bB_1+cC_1,\ AA_1+BB_1+CC_1) = \\ = \left\{\begin{matrix} + A_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ a,\ A) \\ + B_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ b,\ B) \\ + C_1 \cdot K(r,\ aA+bB+cC,\ c,\ C) \end{matrix}\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Formel ist offenbar eine *homogene lineare Function von A_1, B_1, C_1.* Gleiches muss daher auch gelten von ihrer linken Seite, d. i. von dem Ausdruck:

$$K(r,\ aA+bB+cC,\ \underline{aA_1+bB_1+cC_1},\ \underline{AA_1+BB_1+CC_1}).$$

Hieraus aber folgt, was die vier Argumente dieses Ausdruckes betrifft, sofort, dass die beiden letzten (unterstrichenen) Argumente in dem Ausdruck nur in homogener linearer Weise enthalten sein können.

Oder mit andern Worten und unter Anwendung der Abbreviaturen Θ, Θ_1, E: In dem Ausdrucke

$$K(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E})$$

können die beiden letzten Argumente Θ_1 und E nur in homogener linearer Weise vorkommen. Folglich wird dieser Ausdruck von folgender Gestalt sein:

$$K(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E}) = \Theta_1 \mathfrak{K}(r,\ \Theta) + \mathsf{E}\mathfrak{K}^*(r,\ \Theta), \tag{10a.}$$

wo $\mathfrak{K}(r, \Theta)$ und $\mathfrak{K}^*(r, \Theta)$ unbekannte Functionen von nur *zwei* Argumenten, nämlich von r und Θ vorstellen.

Zweiter Specialfall: *Die Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 sind, mit alleiniger Ausnahme von $d\Theta$, alle $= 0$.* — Alsdann nimmt die Aequiva-

lenzformel (10.), wie aus (6.), (7.), (8.), (9.). (9a.) ersichtlich ist, folgende Gestalt an:

$$J_1 Ds_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ aA_1 + bB_1 + cC_1,\ AA_1 + BB_1 + CC_1)d\Theta =$$
$$= \left\{\begin{array}{l} + J_1 Ds_1 A_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ a,\ A)d\Theta \\ + J_1 Ds_1 B_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ b,\ B)d\Theta \\ + J_1 Ds_1 C_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ c,\ C)d\Theta \end{array}\right\},$$

woraus durch Fortlassung der Factoren $J_1 Ds_1$ und $d\Theta$ sich ergiebt:

$$L(r,\ \Theta,\ aA_1 + bB_1 + cC_1,\ AA_1 + BB_1 + CC_1) =$$
$$= \left\{\begin{array}{l} + A_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ a,\ A) \\ + B_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ b,\ B) \\ + C_1 \cdot L(r,\ \Theta,\ c,\ C) \end{array}\right\}.$$

Hieraus aber erkennt man (ähnlich wie vorhin), dass in dem Ausdruck:

$$L(r,\ \Theta,\ \underline{aA_1 + bB_1 + cC_1},\ \underline{AA_1 + BB_1 + CC_1})$$

die beiden letzten (unterstrichenen) Argumente nur in homogener linearer Weise enthalten sein können. Diese beiden letzten Argumente aber sind nichts Anderes als Θ_1 und E. Und man gelangt also zu der Einsicht, dass der Ausdruck

$$L(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E})$$

von folgender Gestalt sein muss:

$$(10\beta.) \qquad L(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E}) = \Theta_1 \mathfrak{L}(r,\ \Theta) + \mathsf{E}\mathfrak{L}^*(r,\ \Theta),$$

wo $\mathfrak{L}(r,\ \Theta)$ und $\mathfrak{L}^*(r,\ \Theta)$ Functionen von nur *zwei* Argumenten, nämlich von r und Θ sind.

Dritter Specialfall: *Die Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 sind, mit alleiniger Ausnahme von $d\Theta_1$, alle* $= 0$. — Alsdann erhält die Aequivalenzformel (10.), mit Rücksicht auf (6.), (7.), (8.), (9.), (9a.), folgende Gestalt:

$$J_1 Ds_1 \cdot M(r, \Theta, aA_1 + bB_1 + cC_1, AA_1 + BB_1 + CC_1) \cdot (A_1 da + B_1 db + C_1 dc) =$$
$$= \left\{\begin{array}{l} + J_1 Ds_1 A_1 \cdot M(r,\ \Theta,\ a,\ A) \cdot da \\ + J_1 Ds_1 B_1 \,.\, M(r,\ \Theta,\ b,\ B) \cdot db \\ + J_1 Ds_1 C_1 \cdot M(r,\ \Theta,\ c,\ C) \cdot dc \end{array}\right\}.$$

Diese Formel zeigt, dass das Product

$$M(r,\ \Theta,\ aA_1 + bB_1 + cC_1,\ AA_1 + BB_1 + CC_1) \cdot (A_1 da + B_1 db + C_1 dc)$$

eine homogene lineare Function von A_1, B_1, C_1 sein muss. Und hieraus folgt weiter, dass der erste Factor dieses Productes von A_1, B_1, C_1 *unabhängig* sein muss. Somit gelangt man zu der Einsicht, dass dieser erste Factor

$$M(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E})$$

unabhängig ist von seinen beiden letzten Argumenten Θ_1, E, und gelangt also zu folgender Formel:

$$M(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}) = \mathfrak{M}(r, \Theta), \tag{10γ.}$$

wo $\mathfrak{M}(r, \Theta)$ eine unbekannte, nur allein von r und Θ abhängende Function vorstellt.

Vierter Specialfall: *Die Zuwüchse* dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 *sind, mit alleiniger Ausnahme von* $d\mathsf{E}$, *alle* $= 0$. — Alsdann geht die Aequivalenzformel (10.) über in:

$$J_1 Ds_1 \cdot N(r, \Theta, aA_1 + bB_1 + cC_1, AA_1 + BB_1 + CC_1) \cdot (A_1 dA + B_1 dB + C_1 dC) = \\ = \left\{ \begin{array}{l} + J_1 Ds_1 A_1 \cdot N(r, \Theta, a, A) \cdot dA \\ + J_1 Ds_1 B_1 \cdot N(r, \Theta, b, B) \cdot dB \\ + J_1 Ds_1 C_1 \cdot N(r, \Theta, c, C) \cdot dC \end{array} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass das Product

$$N(r, \Theta, aA_1 + bB_1 + cC_1, AA_1 + BB_1 + CC_1) \cdot (A_1 dA + B_1 dB + C_1 dC)$$

eine homogene lineare Function von A_1, B_1, C_1 sein muss. Kurz man gelangt (ebenso wie im vorhergehenden Specialfall) zu dem Resultat:

$$N(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}) = \mathfrak{N}(r, \Theta), \tag{10δ.}$$

wo $\mathfrak{N}(r, \Theta)$ eine neue unbekannte Function von r, Θ vorstellt.

Fünfter Specialfall: *Die Zuwüchse* dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 *sind, mit alleiniger Ausnahme von* dJ_1, *alle* $= 0$. — Alsdann geht die Aequivalenzformel (10.) über in:

$$(dJ_1) Ds_1 \cdot P(r, \Theta, aA_1 + bB_1 + cC_1, AA_1 + BB_1 + CC_1) = \\ = \left\{ \begin{array}{l} + (dJ_1) Ds_1 A_1 \cdot P(r, \Theta, a, A) \\ + (dJ_1) Ds_1 B_1 \cdot P(r, \Theta, b, B) \\ + (dJ_1) Ds_1 C_1 \cdot P(r, \Theta, c, C) \end{array} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass der Ausdruck

$$P(r, \Theta, aA_1 + bB_1 + cC_1, AA_1 + BB_1 + CC_1)$$

eine homogene lineare Function von A_1, B_1, C_1 ist. Kurz, man gelangt (ähnlich wie im ersten Specialfall) zu der Formel:

$$P(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}) = \Theta_1 \mathfrak{P}(r, \Theta) + \mathsf{E}\, \mathfrak{P}^*(r, \Theta), \tag{10ε.}$$

wo $\mathfrak{P}(r, \Theta)$ und $\mathfrak{P}^*(r, \Theta)$ unbekannte Functionen der beiden Argumente r, Θ vorstellen.

Schliessliches Resultat. — Für die während der Zeit dt vom Elemente Ds_1 im Elemente Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ haben wir in (6.) den Werth gefunden:

$$\mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 (K dr + L d\Theta + M d\Theta_1 + N d\mathsf{E}) + (dJ_1) Ds_1 P. \tag{11.}$$



Substituiren wir hier für K, L, M, N, P die in ($10\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$) erhaltenen Ausdrücke, so ergiebt sich:

$$(12.)\qquad \mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 \begin{Bmatrix} +[\Theta_1\mathfrak{K}(r,\Theta)+\mathsf{E}\mathfrak{K}^*(r,\Theta)]dr \\ +[\Theta_1\mathfrak{L}(r,\Theta)+\mathsf{E}\mathfrak{L}^*(r,\Theta)]d\Theta \\ +\mathfrak{M}(r,\Theta)\cdot d\Theta_1+\mathfrak{N}(r,\Theta)\cdot d\mathsf{E} \end{Bmatrix} + (dJ_1)Ds_1[\Theta_1\mathfrak{P}(r,\Theta)+\mathsf{E}\mathfrak{P}^*(r,\Theta)],$$

wo $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}^*, \mathfrak{L}, \mathfrak{L}^*; \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*$ noch völlig unbekannte Functionen der beigefügten beiden Argumente r, Θ vorstellen. Wir werden im folgenden Paragraph diese acht Functionen weiter vereinfachen, nämlich dieselben auf Functionen von nur *einem* Argument reduciren.

§ 4.

Vereinfachung des gefundenen Gesetzes.

Es seien gegeben unendlich viele Drahtelemente:

$$(13.)\qquad PQ,\ PQ',\ PQ'',\ PQ''',\ \ldots\ Px,\ Py,\ Pz;$$

und zwar mögen all' diese unendlich vielen Drahtelemente von ein und demselben Punkte P ausgehen, und in diesem Punkte P zusammengelöthet sein; so dass sie in ihrer Gesammtheit einen *einzigen starren Körper M* bilden. Die Elemente $PQ, PQ', PQ'', PQ''', \ldots$ seien der Reihe nach bezeichnet mit $Ds, Ds', Ds'', Ds''', \ldots$ Andrerseits mögen die drei letzten Drahtelemente Px, Py, Pz gegen einander senkrecht stehen, und kurzweg mit x, y, z bezeichnet werden. Dieser starre Körper

$$(14.)\qquad M = \boxed{Ds,\ Ds',\ Ds'',\ \ldots\ [x,\ y,\ z]}$$

sei im Raume in *beliebiger Bewegung* begriffen. Dabei sei bemerkt, dass die hier in (14.) angewendete Bezeichnungsweise in Einklang steht mit unsern allgemeinen Festsetzungen Seite 75 (III.). Auch bemerkt man, dass das hier in (14.) eingeführte Axensystem $[x, y, z]$ wesentlich verschieden ist von dem im vorigen Paragraph in (8.) angewendeten Axensystem.

Ueberdies sei gegeben ein lineares elektrisches Stromelement Ds_1 von der Stromstärke J_1, welches ebenfalls im Raume in ganz *beliebiger Bewegung* begriffen ist.

Sind nun, mit Bezug auf das in (14.) angegebene rechtwinklige Axensystem, $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', \ldots$ die Richtungscosinus der Elemente $Ds, Ds', Ds'', \ldots$, und sind ferner, mit Bezug auf jenes System, A_1, B_1, C_1 und a, b, c die Richtungscosinus des Elementes Ds_1 und der Linie $r(Ds_1 \rightarrow Ds)$, so werden offenbar A, B, C



$A', B', C', A'', B'', C'', \ldots$ lauter *Constanten* sein, während A_1, B_1, C_1 und r, a, b, c Functionen der Zeit sind. Setzt man also:

$$(15.)\quad \begin{aligned} \Theta &= A\,a + B\,b + C\,c, & \mathsf{E} &= A\,A_1 + B\,B_1 + C\,C_1, \\ \Theta' &= A'a + B'b + C'c, & \mathsf{E}' &= A'A_1 + B'B_1 + C'C_1, \\ \Theta'' &= A''a + B''b + C''c, & \mathsf{E}'' &= A''A_1 + B''B_1 + C''C_1, \\ &\text{etc. etc.,} & &\text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

so erhält man für die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse die Formeln:

$$(15a.)\quad \begin{aligned} d\Theta &= A\,da + B\,db + C\,dc, & d\mathsf{E} &= A\,dA_1 + B\,dB_1 + C\,dC_1, \\ d\Theta' &= A'da + B'db + C'dc, & d\mathsf{E}' &= A'dA_1 + B'dB_1 + C'dC_1, \\ d\Theta'' &= A''da + B''db + C''dc, & d\mathsf{E}'' &= A''dA_1 + B''dB_1 + C''dC_1, \\ &\text{etc. etc.,} & &\text{etc. etc.,} \end{aligned}$$

Und setzt man ferner:

$$(16.)\qquad \Theta_1 = A_1 a + B_1 b + C_1 c,$$

so ergiebt sich:

$$(16a.)\quad d\Theta_1 = (A_1 da + B_1 db + C_1 dc) + (a dA_1 + b dB_1 + c dC_1).$$

Es sei nun $\mathfrak{R}$ die vom Stromelemente Ds_1 im Körper M (14.), und zwar im Punkte P dieses Körpers M hervorgebrachte elektromotorische Kraft*). Ferner seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten dieser Kraft nach den in (14.) angegebenen Axen x, y, z. Alsdann werden offenbar die den Richtungen $Ds, Ds', Ds'', \ldots$ entsprechenden Componenten $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}', \mathfrak{E}'', \ldots$ der Kraft $\mathfrak{R}$ folgende Werthe haben:

$$(17.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= A\,\mathfrak{X} + B\,\mathfrak{Y} + C\,\mathfrak{Z}, \quad \text{[vgl. Seite 76 } (\beta.)], \\ \mathfrak{E}' &= A'\mathfrak{X} + B'\mathfrak{Y} + C'\mathfrak{Z}, \\ \mathfrak{E}'' &= A''\mathfrak{X} + B''\mathfrak{Y} + C''\mathfrak{Z}, \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Die Componente $\mathfrak{E}$ ist nichts Anderes, als die im vorigen Paragraph in (12.) berechnete Kraft. Substituirt man nun in jener Formel (12.) für $\mathfrak{E}$ das hier in (17.) angegebene Trinom, so erhält man sofort:

$$(18.)\quad (A\mathfrak{X} + B\mathfrak{Y} + C\mathfrak{Z})dt = \\ = Ds_1 \left\{ \begin{aligned} &+ J_1[\Theta_1\mathfrak{K}(r, \Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{K}^*(r, \Theta)]dr \\ &+ J_1[\Theta_1\mathfrak{L}(r, \Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{L}^*(r, \Theta)]d\Theta \\ &+ J_1\mathfrak{M}(r, \Theta)\cdot d\Theta_1 + J_1\mathfrak{N}(r, \Theta)\cdot d\mathsf{E} \\ &+ [\Theta_1\mathfrak{P}(r, \Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{P}^*(r, \Theta)]dJ_1 \end{aligned} \right\}.$$

*) P ist der gemeinschaftliche Ausgangspunkt der Elemente $Ds, Ds', Ds'', \ldots$, wie solches aus den ersten Zeilen dieses Paragraphs (13.)—(14.) sofort sich ergiebt.

Diese Formel (18.) wird offenbar nicht nur für das Element Ds, sondern ebenso auch für die Elemente Ds', Ds'', ... gelten. D. h. sie wird in Gültigkeit bleiben, wenn man in ihr A, B, C der Reihe nach mit A', B', C', mit A'', B'', C'', u. s. w. vertauscht; wobei die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ fortdauernd *ein und dieselben* bleiben. Die linke Seite der Formel (18.) ist also eine *homogene lineare Function von* A, B, C. Gleiches muss daher von ihrer rechten Seite gelten. Und dies überträgt sich, weil die Werthe der Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 sowohl von einander, wie auch von A, B, C völlig unabhängig sind, sofort auf die einzelnen Theile der rechten Seite, d. i. auf die fünf Ausdrücke:

$$(\alpha.)\qquad J_1[\Theta_1\mathfrak{K}(r, \Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{K}^*(r, \Theta)]dr,$$

$$(\beta.)\qquad J_1[\Theta_1\mathfrak{L}(r, \Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{L}^*(r, \Theta)]d\Theta,$$

$$(\gamma.)\qquad J_1\mathfrak{M}(r, \Theta)d\Theta_1,$$

$$(\delta.)\qquad J_1\mathfrak{N}(r, \Theta)d\mathsf{E},$$

$$(\varepsilon.)\qquad [\Theta_1\mathfrak{P}(r, \Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{P}^*(r, \Theta)]dJ_1.$$

Jeder dieser fünf Ausdrücke ist also eine homogene lineare Function von A, B, C. Nun gewinnen aber diese fünf Ausdrücke, falls man für Θ, E, $d\Theta$, $d\mathsf{E}$ und Θ_1, $d\Theta_1$ die Werthe (15.), (15a.) und (16.), (16a.) substituirt, und dabei zugleich auch unwesentliche Factoren (d. i. solche Factoren, die von A, B, C unabhängig sind) abscheidet, folgende Gestalt:

$$(\alpha.)\quad [(A_1a + \cdot\cdot)\mathfrak{K}(r, Aa + \cdot\cdot) + (AA_1 + \cdot\cdot)\mathfrak{K}^*(r, Aa + \cdot\cdot)],$$

$$(\beta.)\quad [(A_1a + \cdot\cdot)\mathfrak{L}(r, Aa + \cdot\cdot) + (AA_1 + \cdot\cdot)\mathfrak{L}^*(r, Aa + \cdot\cdot)](Ada + \cdot\cdot),$$

$$(\gamma.)\quad \mathfrak{M}(r, Aa + \cdot\cdot),$$

$$(\delta.)\quad \mathfrak{N}(r, Aa + \cdot\cdot)\cdot(AdA_1 + \cdot\cdot),$$

$$(\varepsilon.)\quad [(A_1a + \cdot\cdot)\mathfrak{P}(r, Aa + \cdot\cdot) + (AA_1 + \cdot\cdot)\mathfrak{P}^*(r, Aa + \cdot\cdot)].$$

Nun soll der Ausdruck (α.):

$$(A_1a + B_1b + C_1c)\mathfrak{K}(r, Aa + Bb + Cc) + (AA_1 + BB_1 + CC_1)\mathfrak{K}^*(r, Aa + Bb + Cc)$$

eine homogene lineare Function von A, B, C sein, und zwar unter allen Umständen, d. i. für beliebige Werthe der Grössen A_1, B_1, C_1 und a, b, c, r, also z. B. auch dann, wenn zwischen diesen Grössen die Relation stattfindet:

$$A_1a + B_1b + C_1c = 0.$$

Somit folgt, dass

$$(AA_1 + BB_1 + CC_1)\mathfrak{K}^*(r, Aa + Bb + Cc)$$

ebenfalls eine homogene lineare Function von A, B, C sein muss. Und hieraus folgt weiter, dass der Factor

$$\mathfrak{K}^*(r, Aa + Bb + Cc)$$

von A, B, C unabhängig sein muss; so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$\mathfrak{K}^*(r,\ Aa + Bb + Cc) = \varkappa^*(r),$$

wo $\varkappa^*(r)$ eine unbekannte, *nur allein von r abhängende* Function vorstellt.

Solches constatirt, verwandelt sich der Ausdruck (α.) in:

$$(A_1 a + B_1 b + C_1 c)\,\mathfrak{K}(r,\ Aa + Bb + Cc) + (AA_1 + BB_1 + CC_1)\,\varkappa^*(r).$$

Dieser Ausdruck (α.) soll aber unter allen Umständen eine homogene lineare Function von A, B, C sein. Somit ergiebt sich sofort, dass Gleiches auch gelten muss von

$$\mathfrak{K}(r,\ Aa + Bb + Cc);$$

so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$\mathfrak{K}(r,\ Aa + Bb + Cc) = (Aa + Bb + Cc)\,\varkappa(r),$$

wo $\varkappa(r)$ eine unbekannte, *nur allein von r abhängende* Function vorstellt.

Um die Hauptsache zu wiederholen: *Aus dem Umstande, dass der Ausdruck* (α.) *eine homogene lineare Function von A, B, C sein muss, hat sich ergeben, dass*

$$\mathfrak{K}^*(r,\ Aa + Bb + Cc) = \varkappa^*(r), \quad \textit{und}$$

$$\mathfrak{K}(r,\ Aa + Bb + Cc) = (Aa + Bb + Cc)\,\varkappa(r)$$

sein muss.

Nun wissen wir aber, dass die Ausdrücke (β.), (γ.), (δ.), (ε.) ebenfalls homogene lineare Functionen von A, B, C sein müssen. Und hieraus werden analoge Consequenzen zu ziehen sein. Man gelangt in solcher Weise, wie leicht zu übersehen ist, Alles zusammengenommen, zu folgenden Resultaten:

$$(\alpha'.)\quad \mathfrak{K}(r,\ Aa + \cdot\cdot) = (Aa + \cdot\cdot)\,\varkappa(r), \qquad \mathfrak{K}^*(r,\ Aa + \cdot\cdot) = \varkappa^*(r),$$

$$(\beta'.)\quad \mathfrak{L}(r,\ Aa + \cdot\cdot) = \lambda(r), \qquad \mathfrak{L}^*(r,\ Aa + \cdot\cdot) = \text{Null},$$

$$(\gamma'.)\quad \mathfrak{M}(r,\ Aa + \cdot\cdot) = (Aa + \cdot\cdot)\,\mu(r),$$

$$(\delta'.)\quad \mathfrak{N}(r,\ Aa + \cdot\cdot) = \nu(r),$$

$$(\varepsilon'.)\quad \mathfrak{P}(r,\ Aa + \cdot\cdot) = (Aa + \cdot\cdot)\,\pi(r), \qquad \mathfrak{P}^*(r,\ Aa + \cdot\cdot) = \pi^*(r),$$

wo $\varkappa(r)$, $\varkappa^*(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$, $\nu(r)$, $\pi(r)$, $\pi^*(r)$ unbekannte, *nur allein von r abhängende Functionen* vorstellen. Diesen Resultaten kann man, weil [vgl. (15.)]

$$Aa + Bb + Cc = \Theta$$

ist, schliesslich folgende Gestalt geben:

$$(\alpha''.)\qquad \mathfrak{K}(r,\ \Theta) = \Theta\,\varkappa(r), \qquad \mathfrak{K}^*(r,\ \Theta) = \varkappa^*(r),$$

$$(\beta''.)\qquad \mathfrak{L}(r,\ \Theta) = \lambda(r), \qquad \mathfrak{L}^*(r,\ \Theta) = \text{Null},$$

$$(\gamma''.)\qquad \mathfrak{M}(r,\ \Theta) = \Theta\,\mu(r),$$

$$(\delta''.)\qquad \mathfrak{N}(r,\ \Theta) = \nu(r),$$

$$(\varepsilon''.)\qquad \mathfrak{P}(r,\ \Theta) = \Theta\,\pi(r), \qquad \mathfrak{P}^*(r,\ \Theta) = \pi^*(r).$$

Substituirt man jetzt endlich diese Werthe (α''.), (β''.), (γ''.), (δ''.), (ε''.) in der Formel (12.), so erhält man:

$$(19.)\quad \mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 \left\{ [\varkappa \Theta\Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E}]dr + \lambda \Theta_1 d\Theta + \mu \Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} + (dJ_1) Ds_1 [\pi \Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}],$$

wo z. B. $\varkappa$ für $\varkappa(r)$ gesetzt ist, u. s. w. Somit gelangt man also, was das elektromotorische Elementargesetz betrifft, zu folgendem Resultat:

Satz. — *Zwei lineare elektrische Stromelemente Ds und Ds_1 seien in beliebigen Bewegungen, und ihre Stromstärken in beliebigen Aenderungen begriffen. Und zwar mögen diese Stromstärken in zwei aufeinander folgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$ mit J, J_1 und $J + dJ$, $J_1 + dJ_1$ bezeichnet sein. Alsdann wird die während der Zeit dt vom Elemente Ds_1 im Elemente Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft*

$$(20.)\quad \mathfrak{E}dt, \quad [\textit{vgl. die Definition Seite 76 } (\gamma.)]$$

folgenden Werth haben:

$$(21.)\quad \mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 \left\{ [\varkappa \Theta\Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E}]dr + \lambda \Theta_1 d\Theta + \mu \Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} + (dJ_1) Ds_1 [\pi \Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}].$$

Hier bezeichnen r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente der beiden Elemente im Augenblick t, und dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ die Zuwüchse derselben während der Zeit dt. Ferner bezeichnen $\varkappa$, $\varkappa^*$, λ, μ, ν, π, π^* sieben unbekannte, nur allein von r abhängende Functionen.

§ 5.

Ueber die elektromotorischen Arbeiten, welche zwei lineare Stromelemente gegenseitig auf einander ausüben.

Zwei elektrische Stromelemente Ds, Ds_1 können ganz nach Belieben entweder mit Ds, Ds_1, oder mit DM, DM_1, oder auch mit $D\tau$, $D\tau_1$ bezeichnet werden. [Vgl. die Bemerkung Seite 58]. Auch gelten z. B. für das Element Ds die Relationen [Seite 66 (12.)]:

$$(22.)\quad uD\tau = JDx, \quad vD\tau = JDy, \quad wD\tau = JDz,$$

d. i.

$$(23.)\quad uD\tau = JADs, \quad vD\tau = JBDs, \quad wD\tau = JCDs,$$

wo Dx, Dy, Dz die rechtwinkligen Componenten, und A, B, C die Richtungscosinus des Elementes Ds vorstellen. Ueberdies bezeichnet J die Stromstärke des Elementes Ds, während gleichzeitig u, v, w die in ihm vorhandenen Strömungscomponenten vorstellen.

Wir wollen uns nun, ebenso wie im vorigen Paragraph, die beiden Elemente $DM_1(Ds_1)$ und $DM(Ds)$ in beliebigen Bewegungen denken.

Auch mögen, ebenso wie damals, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten derjenigen elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$ sein, welche das Element $DM_1(Ds_1)$ in irgend einem Punkt des Elementes $DM(Ds)$ hervorbringt. Alsdann wird die während der Zeit dt von DM_1 auf DM ausgeübte *elektromotorische Arbeit* [nach Seite 65 (7 α.)] den Werth haben:

$$(24.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau\,dt.$$

Substituirt man hier für $uD\tau$, $vD\tau$, $wD\tau$ die Werthe (23.), so folgt:

$$(25.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = J(\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C)\,Ds\,dt.$$

Nun aber ist bekanntlich $\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C = \mathfrak{E}$, [vgl. (17.)]. Somit folgt:

$$(26.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = J\mathfrak{E}\,Ds\,dt.$$

Substituirt man endlich hier für $\mathfrak{E}dt$ den Werth (21.), so erhält man:

$$(27.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = JJ_1\,Ds\,Ds_1\Big\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]\,dr + \lambda\Theta_1\,d\Theta + \mu\Theta\,d\Theta_1 + \nu\,d\mathsf{E}\Big\} + J(dJ_1)\,Ds\,Ds_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}].$$

Dies also ist die während der Zeit dt von $DM_1(Ds_1)$ auf $DM(Ds)$ ausgeübte elektromotorische Arbeit.

In analoger Weise wird sich offenbar für die umgekehrt von $DM(Ds)$ auf $DM_1(Ds_1)$ während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit folgender Ausdruck ergeben:

$$(28.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM} = JJ_1\,Ds\,Ds_1\Big\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]\,dr + \lambda\Theta\,d\Theta_1 + \mu\Theta_1\,d\Theta + \nu\,d\mathsf{E}\Big\} + J_1(dJ)\,Ds\,Ds_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}].$$

Bezeichnet man schliesslich die *Summe* dieser beiden Arbeiten kurzweg mit $d\mathfrak{L}$, setzt man also

$$(29.)\qquad d\mathfrak{L} = (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM},$$

so erhält man:

$$(30.)\qquad d\mathfrak{L} = JJ_1\,Ds\,Ds_1\Big\{2[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]\,dr + (\lambda + \mu)\,d(\Theta\Theta_1) + 2\nu\,d\mathsf{E}\Big\} + d(JJ_1)\cdot Ds\,Ds_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}].$$

Eine unserer wichtigsten Aufgaben besteht nun in der Bestimmung der sieben unbekannten Functionen $\varkappa = \varkappa(r)$, $\varkappa^* = \varkappa^*(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\nu = \nu(r)$, $\pi = \pi(r)$, und $\pi^* = \pi^*(r)$. Zur Inangriffnahme dieser Aufgabe aber wird es nothwendig sein, zuvor einen Blick zu werfen auf die *ponderomotorischen* Kräfte.

§ 6.

Die Grundeigenschaften der ponderomotorischen Kräfte.

Wenn auch hervorragende Physiker wie z. B. *F. Neumann* und *W. Weber* ihr ganzes Leben hindurch am *Ampère'schen Gesetz* festgehalten haben, so ist doch die Ansicht von *Helmholtz*, dass dieses Gesetz eine blosse Hypothese sei, nicht ohne Weiteres abzuweisen.

Helmholtz, und ebenso *Grassmann*, *Clausius*, *Stefan* sind der Meinung, dass die ponderomotorischen Kräfte, mit denen zwei elektrische Stromelemente gegenseitig auf einander einwirken, nicht in die Verbindungslinie der beiden Elemente zu fallen brauchen, sondern dass sie möglicherweise irgend welche andere Richtungen besitzen könnten. Auch hat man wohl darauf aufmerksam gemacht, dass die ponderomotorische Einwirkung eines Stromelementes auf ein anderes möglicherweise nicht nur in einer gewöhnlichen Kraft, sondern daneben vielleicht auch noch in einem Drehungsmoment bestehen könnte, mit welchem das eine Element das andere zu drehen bestrebt ist.

So sagt z. B. *Helmholtz* gelegentlich von *Ampère*: „*He assumed* . . ., „*that between every pair of such elements there acts only one force, not a* „*couple of forces, and that the direction of this force is the straight line* „*joining the centres of the elements*". [*The Academy, a weeckly Review, London, 1874, Vol. V, P. 291*].

Will man alle Möglichkeiten, welche in dieser Beziehung denkbar sind, einigermassen zusammenfassen, so wird es zweckmässig sein, nicht geradezu die ponderomotorischen Wirkungen selber, sondern vielmehr die *Arbeiten* derselben ins Auge zu fassen.

Wir beschränken uns vorläufig wiederum auf zwei *lineare* elektrische Stromelemente. Diese Elemente seien in beliebigen Bewegungen begriffen. Sie seien bezeichnet mit Ds und Ds_1. Ferner sei die von ihnen während der Zeit dt auf einander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* bezeichnet mit

$$(\alpha.) \qquad dL = (dL)_{Ds}^{Ds_1} + (dL)_{Ds_1}^{Ds};$$

so dass also dieses dL die Summe zweier Arbeiten repräsentirt, nämlich derjenigen beiden Arbeiten, welche Ds_1 auf Ds und Ds auf Ds_1 ausübt.

Ohne Zweifel werden wir

$$(\beta.) \qquad dL = JJ_1 Ds Ds_1 \cdot f$$

setzen dürfen, wo J, J_1 die Stromstärken sind, während f einen Factor repräsentirt, der nur noch von der relativen Lage der beiden Elemente zu einander, so wie von derjenigen Aenderung abhängt, welche diese



relative Lage während der Zeit dt erleidet. Ueberhaupt werden wir mit allen von *Ampère*, *Helmholtz*, *Grassmann*, *Clausius*, *Stefan* und anderen Autoren geäusserten Ansichten uns in Einklang befinden, wenn wir jener ponderomotorischen Arbeit dL folgende drei Grundeigenschaften beilegen:

Erste Grundeigenschaft. — *Zwei lineare Stromelemente Ds und Ds_1 seien in beliebigen Bewegungen, und ihre Stromstärken in beliebigen Aenderungen begriffen. Und zwar seien die Werthe dieser Stromstärken im Augenblick t mit J und J_1, und im nächstfolgenden Augenblick $t + dt$ mit $J + dJ$ und $J_1 + dJ_1$ bezeichnet. Alsdann wird die von den beiden Elementen Ds und Ds_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit dL [vgl. (α.)] proportional sein mit*

$$JJ_1 Ds Ds_1.$$

Zweite Grundeigenschaft. — *Abgesehen von diesem Factor $JJ_1 Ds Ds_1$, wird die in Rede stehende Arbeit dL nur noch abhängig sein von der zwischen Ds und Ds_1 im Augenblick t vorhandenen relativen Lage und von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage während der Zeit dt erleidet.*

Sind diese Aenderungen alle $= 0$, so ist jene Arbeit dL ebenfalls $= 0$.

Dritte Grundeigenschaft. — *Man denke sich Ds_1 in drei aufeinander senkrechte Componenten Dx_1, Dy_1, Dz_1 zerlegt, deren ponderable Massen mit der ponderablen Masse von Ds_1 starr verbunden sind. Alsdann wird die in Rede stehende Arbeit dL identisch sein mit der Summe derjenigen ponderomotorischen Arbeiten, welche Ds und Dx_1, ferner Ds und Dy_1, endlich Ds und Dz_1 während der Zeit dt aufeinander ausüben würden.*

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Elemente Dx_1, Dy_1, Dz_1 hinsichtlich ihrer Stromstärken mit Ds_1 fortdauernd übereinstimmen.

§ 7.

Das aus den Grundeigenschaften sich ergebende ponderomotorische Elementargesetz.

Die von den beiden Stromelementen Ds und Ds_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit dL hat nach der ersten Grundeigenschaft einen Werth von der Form:

$$dL = JJ_1 Ds Ds_1 \cdot f.$$

Und der hier auftretende Factor f wird, zufolge der zweiten Grundeigenschaft, nur von der relativen Lage der beiden Elemente Ds, Ds_1 zu einander und von derjenigen Aenderung abhängen, welche diese



relative Lage während der Zeit dt erleidet. Demgemäss ist also f nur abhängig von r, Θ, Θ_1, E und dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$; so dass man also schreiben kann:

$$(1.)\qquad dL = JJ_1 Ds Ds_1 \cdot f(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}, dr, d\Theta, d\Theta_1, d\mathsf{E}),$$

wo dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ die Aenderungen von r, Θ, Θ_1, E während der Zeit dt vorstellen.

Denkt man sich nun die Function f nach den Potenzen der unendlich kleinen Grössen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ entwickelt, so ergiebt sich (weil die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung fortzulassen sind) die Formel:

$$(2.)\qquad dL = JJ_1 Ds Ds_1 (H + K dr + L d\Theta + M d\Theta_1 + N d\mathsf{E}),$$

wo alsdann H, K, L, M, N nur noch von r, Θ, Θ_1, E abhängen.

Nun muss nach der zweiten Grundeigenschaft die Arbeit $dL = 0$ sein, sobald man die Grössen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ alle $= 0$ sich denkt. Somit ergiebt sich aus (2.), dass die Function H identisch $= 0$ sein muss. Demgemäss erhält man:

$$(3.)\qquad dL = JJ_1 Ds Ds_1 (K dr + L d\Theta + M d\Theta_1 + N d\mathsf{E}),$$

wo K, L, M, N unbekannte Functionen von r, Θ, Θ_1, E vorstellen:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} K &= K(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ L &= L(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Zur näheren Bestimmung dieser unbekannten Functionen K, L, M, N benutzen wir nun ein mit Ds_1 starr verbundenes rechtwinkliges Axensystem:

$$(5.)\qquad \boxed{Ds_1 \boxed{x, y, z}},$$

und bezeichnen die diesem System entsprechenden Componenten des Elementes Ds_1 mit Dx_1, Dy_1, Dz_1. Zufolge der dritten Grundeigenschaft muss alsdann Ds_1 *äquivalent* sein mit Dx_1, Dy_1, Dz_1; so dass wir also zu folgender Formel gelangen:

$$(6.)\qquad dL = dL' + dL'' + dL''',$$

wo dL den Ausdruck (3.) vorstellt, während dL', dL'', dL''' diejenigen analogen Ausdrücke bezeichnen sollen, welche aus (3.) sich ergeben, sobald man daselbst, an Stelle des Elementes Ds_1, der Reihe nach die Elemente Dx_1, Dy_1, Dz_1 eintreten lässt.

Die Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ sind offenbar ganz beliebig und von einander völlig unabhängig. Folglich wird die Aequivalenzformel (6.) z. B. auch dann gelten, wenn man dem dr irgend welchen Werth zuertheilt, hingegen die $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ alle $= 0$ sich denkt. Ebenso wird



jene Aequivalenzformel (6.) auch dann gelten, wenn $d\Theta$ irgend welchen Werth besitzt, hingegen dr, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ alle $= 0$ sind. U. s. w.

Nun sind die Formeln (3.), (4.), (5.), (6.) offenbar völlig analog mit unsern früheren Formeln Seite 79 (6.), (7.), (8.) und (10.). Kurz man übersieht leicht, dass man hier zu genau denselben (nur etwas specielleren) Betrachtungen gelangt, wie früher Seite 79—84. In Uebereinstimmung mit dem damaligen Resultat [Formel (12.) Seite 84], wird man daher im gegenwärtigen Falle für die Arbeit dL (3.) schliesslich zu folgendem Ausdruck gelangen:

$$(7.)\qquad dL = DsDs_1JJ_1 \left\{ \begin{array}{l} + [\Theta_1 \mathfrak{K}(r,\Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{K}^*(r,\Theta)]\,dr \\ + [\Theta_1 \mathfrak{L}(r,\Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{L}^*(r,\Theta)]\,d\Theta \\ + \mathfrak{M}(r,\Theta)\cdot d\Theta_1 + \mathfrak{N}(r,\Theta)\cdot d\mathsf{E} \end{array} \right\},$$

wo $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^*$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ unbekannte Functionen der in Klammern beigefügten beiden Argumente r, Θ sind.

Die Arbeit dL muss, ihrer Definition zufolge [vgl. Seite 90 (α.)], *symmetrisch* sein in Bezug auf Ds und Ds_1, mithin ungeändert bleiben, wenn man die Grössen Ds, Θ, $d\Theta$ und die Grössen Ds_1, Θ_1, $d\Theta_1$ mit einander vertauscht. Der Ausdruck dL (7.) muss daher identisch sein mit folgendem Ausdruck [vgl. Seite 100 (f.)]:

$$(8.)\qquad dL = DsDs_1JJ_1 \left\{ \begin{array}{l} + [\Theta \mathfrak{K}(r,\Theta_1) + \mathsf{E}\,\mathfrak{K}^*(r,\Theta_1)]\,dr \\ + [\Theta \mathfrak{L}(r,\Theta_1) + \mathsf{E}\,\mathfrak{L}^*(r,\Theta_1)]\,d\Theta_1 \\ + \mathfrak{M}(r,\Theta_1)\cdot d\Theta + \mathfrak{N}(r,\Theta_1)\cdot d\mathsf{E} \end{array} \right\}.$$

Da nun aber die Ausdrücke (7.) und (8.) unter einander identisch sein müssen, und überdies die Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ ganz beliebig und von einander völlig unabhängig sind, so folgt hieraus, dass in jenen Ausdrücken die Coefficienten von dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$ und $d\mathsf{E}$ einzeln einander gleich sein müssen. Somit gelangt man zu folgenden vier Formeln:

$$(A.)\qquad \Theta_1 \mathfrak{K}(r,\Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{K}^*(r,\Theta) = \Theta\,\mathfrak{K}(r,\Theta_1) + \mathsf{E}\,\mathfrak{K}^*(r,\Theta_1),$$

$$(B.)\qquad \Theta_1 \mathfrak{L}(r,\Theta) + \mathsf{E}\,\mathfrak{L}^*(r,\Theta) = \mathfrak{M}(r,\Theta_1),$$

$$(C.)\qquad \mathfrak{M}(r,\Theta) = \Theta\,\mathfrak{L}(r,\Theta_1) + \mathsf{E}\,\mathfrak{L}^*(r,\Theta_1),$$

$$(D.)\qquad \mathfrak{N}(r,\Theta) = \mathfrak{N}(r,\Theta_1).$$

Diese Formeln (A.), (B.), (C.), (D.) müssen offenbar stattfinden für ganz beliebige Werthe von r, Θ, Θ_1, E. Folglich müssen z. B. in (A.) die Coefficienten von E auf beiden Seiten einander gleich sein. Demgemäss ergeben sich aus (A.) folgende beiden Formeln:

$$(a.)\qquad \Theta_1 \mathfrak{K}(r,\Theta) = \Theta\,\mathfrak{K}(r,\Theta_1),$$

$$(a^*.)\qquad \mathfrak{K}^*(r,\Theta) = \mathfrak{K}^*(r,\Theta_1).$$

Desgleichen erhält man aus (B.) die beiden Formeln:

(b.) $$\Theta_1\,\mathfrak{L}(r, \Theta) = \mathfrak{M}(r, \Theta_1),$$

(b*.) $$\mathfrak{L}^*(r, \Theta) = \text{Null}.$$

Aus (C.) ergeben sich wiederum zwei Formeln, die aber nichts Neues bieten, vielmehr als eine Folge der bereits notirten Formeln (b.), (b*.) zu bezeichnen sind; wie man solches leicht übersieht. Endlich ist nach (D.):

(d.) $$\mathfrak{N}(r, \Theta) = \mathfrak{N}(r, \Theta_1).$$

Nach (a.) ist:

$$\frac{\mathfrak{K}(r, \Theta)}{\Theta} = \frac{\mathfrak{K}(r, \Theta_1)}{\Theta_1}.$$

Dieser Quotient hat daher ein und denselben Werth, einerlei ob man ihn für Θ, oder für irgend ein anderes Argument Θ_1 bildet. Folglich ist derselbe von Θ unabhängig, mithin eine blosse Function von r. Bezeichnet man diese Function mit $\varrho(r)$, so erhält man:

$$\frac{\mathfrak{K}(r, \Theta)}{\Theta} = \varrho(r),$$

d. i.

(α.) $$\mathfrak{K}(r, \Theta) = \Theta\,\varrho(r).$$

Andererseits folgt aus (a*.), dass $\mathfrak{K}^*(r, \Theta)$ von Θ unabhängig ist. Also:

(α*.) $$\mathfrak{K}^*(r, \Theta) = \varrho^*(r),$$

wo $\varrho^*(r)$, ebenso wie $\varrho(r)$, eine völlig unbekannte, nur allein von r abhängende Function vorstellt.

Ferner folgt aus (b.), dass $\mathfrak{L}(r, \Theta)$ von Θ unabhängig ist. Also:

(β.) $$\mathfrak{L}(r, \Theta) = \varphi(r),$$

Ueberdies ergiebt sich aus (b*.):

(β*.) $$\mathfrak{L}^*(r, \Theta) = \text{Null}.$$

Substituirt man jetzt den Werth (β.) in der Formel (b.), so folgt: $\Theta_1\,\varphi(r) = \mathfrak{M}(r, \Theta_1)$. Bezeichnet man aber hier das beliebig zu wählende Argument Θ_1 mit irgend welchem andern Buchstaben, z. B. mit Θ (ohne Index), so erhält man sofort:

(γ.) $$\mathfrak{M}(r, \Theta) = \Theta\,\varphi(r).$$

Endlich folgt aus (d.):

(δ.) $$\mathfrak{N}(r, \Theta) = \chi(r),$$

wo $\chi(r)$, ebenso wie $\varphi(r)$, eine blos von r abhängende Function vorstellt.

Substituirt man die Werthe (α.), (α*.), (β.), (β*.) und (γ.), (δ.) in der Formel (7.), so erhält man:

(9.) $$dL = JJ_1 Ds Ds_1 \Big\{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^* \mathsf{E}]dr + \varphi\Theta_1 d\Theta + \varphi\Theta d\Theta_1 + \chi d\mathsf{E}\Big\},$$

wo ϱ für $\varrho(r)$ gesetzt ist, u. s. w. Somit gelangt man schliesslich zu folgendem Resultat:

Satz. — *Zwei lineare Stromelemente Ds und Ds_1 seien in beliebigen Bewegungen, und ihre Stromstärken in beliebigen Aenderungen begriffen. Und zwar mögen die Werthe dieser Stromstärken in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$ bezeichnet sein mit J, J_1 und $J + dJ$, $J_1 + dJ_1$. Alsdann wird die während der Zeit dt von den beiden Elementen aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit*

$$dL = (dL)_{Ds}^{Ds_1} + (dL)_{Ds_1}^{Ds} \tag{10.}$$

folgenden Werth besitzen:

$$dL = JJ_1 Ds Ds_1 \left\{ [\varrho \Theta \Theta_1 + \varrho^* \mathsf{E}] dr + \varphi d(\Theta \Theta_1) + \chi d\mathsf{E} \right\}. \tag{11.}$$

Hier bezeichnen r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente der beiden Elemente im Augenblick t, und dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ die Zuwüchse derselben während der Zeit dt. Ferner bezeichnen ϱ, ϱ^*, φ, χ vier unbekannte, nur allein von r abhängende Functionen.

Die Elemente Ds, Ds_1 werden in Zukunft häufig auch mit DM, DM_1 bezeichnet werden [vgl. die Bemerkung Seite 58]. Alsdann wird die Formel (10.) so zu schreiben sein:

$$dL = (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM}. \tag{12.}$$

Was die unbekannten Functionen ϱ, ϱ^*, φ, χ betrifft, so werden wir im folgenden Abschnitt dieselben näher zu bestimmen suchen.

§ 8.

Nachträgliche Erläuterungen.

Die im Vorhergehenden [Seite 80—84] benutzte Methode empfiehlt sich durch eine gewisse Kürze und Gleichmässigkeit, bedarf aber, hinsichtlich ihrer *Strenge*, einer nachträglichen Erörterung. — Das Linienelement Ds_1 ist damals [Seite 80], unter Zugrundelegung des rechtwinkligen Axensystems

$$\boxed{Ds_1 \boxed{x, y, z}} \tag{1.}$$

in seine Componenten Dx_1, Dy_1, Dz_1 zerlegt worden; so dass also die Formeln zu notiren sind:

$$Dx_1 = A_1 Ds_1, \quad Dy_1 = B_1 Ds_1, \quad Dz_1 = C_1 Ds_1, \tag{2.}$$

wo A_1, B_1, C_1 die Richtungscosinus des Elementes Ds_1 vorstellen. Ebenso wie das Element Ds_1, hinsichtlich seiner Richtungscosinus, die

Signatur $Ds_1(A_1, B_1, C_1)$ besitzt, in genau demselben Sinne besitzen Dx_1, Dy_1, Dz_1 die Signaturen: $Dx_1(1, 0, 0)$, $Dy_1(0, 1, 0)$, $Dz_1(0, 0, 1)$.

Die den drei Linien $Ds_1(A_1, B_1, C_1)$ und $Ds(A, B, C)$, $r(a, b, c)$ zugehörigen Ausdrücke:

$$
(3.) \quad \begin{cases} \Theta = aA + bB + cC, & K = K(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ \Theta_1 = aA_1 + bB_1 + cC_1, & L = L(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ \mathsf{E} = AA_1 + BB_1 + CC_1, & M = M(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ & N = N(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}), \\ & P = P(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}) \end{cases}
$$

würden offenbar, falls man jenes Element $Ds_1(A_1, B_1, C_1)$ für den Augenblick durch seine Componente $Dx_1(1, 0, 0)$ ersetzen wollte, sich verwandeln in:

$$
(3\text{x}.) \quad \begin{cases} \Theta, & K' = K(r, \Theta, a, A), \\ a, & L' = L(r, \Theta, a, A), \\ A, & M' = M(r, \Theta, a, A), \\ & N' = N(r, \Theta, a, A), \\ & P' = P(r, \Theta, a, A). \end{cases}
$$

In analogem Sinne mögen bei einer Vertauschung jenes Elementes $Ds_1(A_1, B_1, C_1)$ mit $Dy_1(0, 1, 0)$ oder mit $Dz_1(0, 0, 1)$ *doppelte*, respective *dreifache* Accente benutzt werden; so dass z. B. K'' und K''' die Bedeutungen haben sollen:

$$
(3\text{y, z}.) \qquad K'' = K(r, \Theta, b, B), \qquad K''' = K(r, \Theta, c, C).
$$

Was nun die damals [Seite 80 (10.)] aufgestellte Aequivalenzformel

$$
(4.) \qquad \mathfrak{E}dt = \mathfrak{E}'dt + \mathfrak{E}''dt + \mathfrak{E}'''dt
$$

betrifft, so repräsentirt zuvörderst $\mathfrak{E}dt$ folgenden Ausdruck [Seite 79 (6)]:

$$
(5.) \qquad \mathfrak{E}dt = Ds_1\left\{J_1[Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}] + PdJ_1\right\}.
$$

Ferner sollte $\mathfrak{E}'dt$ denjenigen Werth vorstellen, in welchen dieser Ausdruck sich verwandeln würde, wenn man das Element $Ds_1(A_1, B_1, C_1)$ durch seine Componente $Dx_1(1, 0, 0)$ ersetzen wollte. Und es wird daher dieses $\mathfrak{E}'dt$, wie aus den Notizen (3.), (3x.) sofort ersichtlich ist, folgendermassen lauten:

$$
\mathfrak{E}'dt = Dx_1\left\{J_1[K'dr + L'd\Theta + M'da + N'dA] + P'dJ_1\right\}.
$$

Nach (2.) ist aber: $Dx_1 = A_1 Ds_1$; so dass man also zur ersten Formel folgenden Systems gelangt:

$$(5\text{x.})\quad \mathfrak{E}'\,dt = Ds_1 A_1 \Big\{ J_1[K'\,dr + L'\,d\Theta + M'\,da + N'\,dA] + P'\,dJ_1 \Big\},$$

$$(5\text{y.})\quad \mathfrak{E}''\,dt = Ds_1 B_1 \Big\{ J_1[K''\,dr + L''\,d\Theta + M''\,db + N''\,dB] + P''\,dJ_1 \Big\},$$

$$(5\text{z.})\quad \mathfrak{E}'''dt = Ds_1 C_1 \Big\{ J_1[K'''dr + L'''d\Theta + M'''dc + N'''\,dC] + P'''dJ_1 \Big\},$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Substituirt man die Werthe (5.) und (5x, y, z.) in der Aequivalenzformel (4.), so erhält man:

$$(6.)\qquad J_1[K\ dr + L\ d\Theta + M\ d\Theta_1 + N\ d\mathsf{E}] + P\ dJ_1 =$$

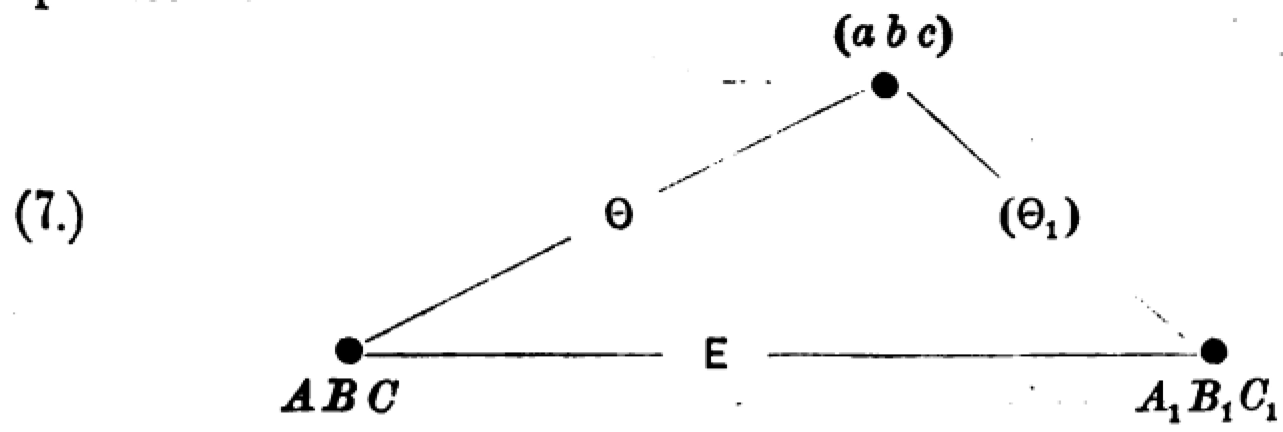
$$= \begin{cases} + A_1 \Big\{ J_1[K'\,dr + L'\,d\Theta + M'\,da \ + N'\,dA] + P'\,dJ_1 \Big\} \\ + B_1 \Big\{ J_1[K''\,dr + L''\,d\Theta + M''\,db \ + N''\,dB] + P''\,dJ_1 \Big\} \\ + C_1 \Big\{ J_1[K'''dr + L'''d\Theta + M'''dc \ + N'''dC] + P'''dJ_1 \Big\} \end{cases}$$

***Ohne hinreichende Begründung** ist nun bei unsrigen damaligen Untersuchungen* [*Seite 81—84*] *die Vorstellung mituntergelaufen, dass in dieser Aequivalenzformel* (6.) *die Glieder jeder einzelnen Vertikalreihe einander gleich sein müssten, und dass also diese Formel, ihren fünf Vertikalreihen entsprechend, in fünf Gleichungen zerfallen müsste.*

Dass solches bei der *ersten* Vertikalreihe zutrifft, unterliegt allerdings keinem Zweifel; denn man kann die Formel (6.) ja z. B. auf den Fall anwenden, dass die Stromstärke J_1 und ebenso auch sämmtliche Winkel constant bleiben, und dass also nur allein r sich ändert.

Ebenso wenig kann hinsichtlich jener Vorstellung irgend welches Bedenken entstehen mit Bezug auf die *letzte* Vertikalreihe; denn man kann die Formel (6.) auf den Fall anwenden, dass alle geometrischen Abmessungen constant bleiben, und nur allein J_1 sich ändert.

Mehr oder weniger fraglich aber erscheint jene Vorstellung für die *zweite, dritte* und *vierte* Vertikalreihe. Wir wollen einstweilen die *zweite* Reihe, welche besondre Schwierigkeiten macht, überspringen, und sofort zur *dritten* und *vierten* Reihe uns hinwenden. Dabei mögen, der Bequemlichkeit halber, die drei Richtungen $Ds(A, B, C)$, $Ds_1(A_1, B_1, C_1)$, $r(a, b, c)$ als Radien einer Kugel gedacht werden. Diese Radien treffen die Kugeloberfläche in drei Punkten, und liefern in solcher Weise ein sphärisches Dreieck:



für welches Θ, Θ_1, E die Cosinus der drei Seiten sind, vorausgesetzt, dass der Kugelradius $= 1$ gedacht wird.

Wir wollen nun die Aequivalenzformel (6.) auf den speciellen Fall anwenden, dass die zehn Grössen

(8.) $$\Theta,\ \mathsf{E},\ A,\ B,\ C,\ A_1,\ B_1,\ C_1 \text{ und } r,\ J_1$$

constant bleiben; so dass also in der Figur (7.) im Ganzen nur noch vier *variable* Grössen anzutreffen sind. Diese vier variablen Grössen Θ_1 und a, b, c sind in der Figur (7.), um sie besser im Auge behalten zu können, durch *Einklammerung* ausgezeichnet. In Folge der Constanz der Grössen (8.) werden in jener Aequivalenzformel (6.) alle Vertikalreihen, mit alleiniger Ausnahme der *dritten*, verschwinden; so dass also jene Formel die Gestalt erhält:

(9.) $$J_1 M d\Theta_1 = J_1 A_1 M' da + J_1 B_1 M'' db + J_1 C_1 M''' dc.$$

Nun ist nach (3.), und weil A_1, B_1, C_1 constant sind:

$$d\Theta_1 = A_1 da + B_1 db + C_1 dc.$$

Substituirt man dies in (9.), und substituirt man daselbst gleichzeitig für M, M', M'', M''' ihre aus (3.), (3x, y, z.) ersichtlichen Bedeutungen, so erhält man, unter Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors J_1, sofort:

(10.) $$M(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E}) \cdot [A_1 da + B_1 db + C_1 dc] =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} + M(r,\ \Theta,\ a,\ A) \cdot A_1 da \\ + M(r,\ \Theta,\ b,\ B) \cdot B_1 db \\ + M(r,\ \Theta,\ c,\ C) \cdot C_1 dc \end{array} \right\}.$$

Die Grössen a, b, c sind, wie ein Blick auf die Figur (7.) zeigt, variabel, zugleich aber den Bedingungen unterworfen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$Aa + Bb + Cc = \Theta,$$

wo A, B, C, Θ *Constanten* sind. Für die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse da, db, dc ergeben sich somit die Relationen:

$$ada + bdb + cdc = 0,$$
$$Ada + Bdb + Cdc = 0;$$

und hieraus folgt:

$$da = \lambda(bC - cB),$$
$$db = \lambda(cA - aC),$$
$$dc = \lambda(aB - bA),$$

wo λ einen unbestimmten Factor vorstellt. Substituirt man diese Werthe der da, db, dc in der Formel (10.), so erhält man:

$$(11.)\quad M(r,\Theta,\Theta_1,\mathsf{E})\cdot[A_1(bC-cB)+B_1(cA-aC)+C_1(aB-bA)]= \\ =\begin{Bmatrix}+M(r,\ \Theta,\ a,\ A)\cdot A_1(bC-cB)\\ +M(r,\ \Theta,\ b,\ B)\cdot B_1(cA-aC)\\ +M(r,\ \Theta,\ c,\ C)\cdot C_1(aB-bA)\end{Bmatrix}.$$

Unsere in (8.) gemachten Voraussetzungen bezogen sich nur auf die Veränderlichkeit des sphärischen Dreiecks während der Zeit dt. Hingegen sind Lage, Grösse und Gestalt des Dreiecks im Augenblick t bei unseren Betrachtungen ganz willkürlich geblieben. *Ist also ein sphärisches Dreieck mit den Bezeichnungen* Θ, Θ_1, E, A, B, C, A_1, B_1, C_1, a, b, c *in ganz beliebiger Weise gegeben, und ist überdies noch ein beliebiger Werth von* r *gegeben, so wird stets die Formel* (11.) *stattfinden.*

Ohne in den Werthen von r, Θ, Θ_1, E irgend welche Aenderung oder Specialisirung eintreten zu lassen, wollen wir jetzt das mit Ds_1 starr verbundene Axensystem $[x, y, z]$ in solcher Weise uns construirt denken, dass seine x-Axe zu den beiden Richtungen a, b, c und A, B, C senkrecht steht, dass also $a=0$ und $A=0$ ist. Alsdann geht die Formel (11.) über in:

$$(12.)\quad M(r,\Theta,\Theta_1,\mathsf{E})\cdot A_1(bC-cB)=M(r,\Theta,0,0)\cdot A_1(bC-cB);$$

d. i. in:

$$(13.)\qquad M(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E})=M(r,\ \Theta,\ 0,\ 0).$$

Die Function $M(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E})$ wird daher in Wirklichkeit von Θ_1, E unabhängig sein, also die Gestalt besitzen:

$$(\text{III.})\qquad M(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E})=\mathfrak{M}(r,\ \Theta),\quad [\text{vgl. Seite 83 } (10\gamma.)].$$

Schritt für Schritt analoge Betrachtungen sind nun anstellbar mit Bezug auf die *vierte* Vertikalreihe der Aequivalenzformel (6.). Sie führen, was hier nicht näher dargelegt werden soll, zu dem Resultat, dass die Function $N(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E})$ ebenfalls von Θ_1, E unabhängig ist, also die Gestalt hat:

$$(\text{IV.})\qquad N(r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathsf{E})=\mathfrak{N}(r,\ \Theta),\quad [\text{vgl. Seite 83 } (10\delta.)].$$

Und umgekehrt: Denkt man sich den Functionen M, N die Werthe (III.), (IV.) zuertheilt, so werden in jener Aequivalenzformel (6.), wie man leicht erkennt, die Glieder der *dritten*, und ebenso auch die der *vierten* Vertikalreihe unter allen Umständen einander gleich sein. Genau dasselbe gilt aber auch, wie schon zu Anfang bemerkt wurde, von den Gliedern der *ersten* und *fünften* Vertikalreihe. Folglich wird Gleiches auch gelten von denen der *zweiten* Vertikalreihe*). Kurz, man sieht,

*) Dieses *indirecte* Verfahren ist in der That für die *zweite* Reihe am angemessensten. Wollte man nämlich diese zweite Reihe in derselben *directen*

7*



dass die früher [Seite 81—84] erhaltenen Resultate durch die strengeren Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphs in allen Stücken bestätigt werden.

Erläuterung zu Seite 93 (7.), (8.), ... (11.). — Bei der Ampère-schen Bezeichnungsweise:

(f.) $$\Theta = \cos\vartheta \quad \text{und} \quad \Theta_1 = \cos\vartheta_1$$

sind ϑ und ϑ_1 die Winkel, unter denen die Richtungen Ds und Ds_1 gegen die Richtung $r(Ds_1 \rightarrow Ds)$ geneigt sind; so dass also ϑ einen *Aussenwinkel*, hingegen ϑ_1 einen *Innenwinkel* vorstellt.

Wir wollen nun aber, vom Gewöhnlichen abweichend, für den Augenblick die Buchstaben $\Theta = \cos\vartheta$ und $\Theta_1 = \cos\vartheta_1$ in *symmetrischer* Weise uns angewendet denken; der Art, dass ϑ und ϑ_1 beide Aussenwinkel sind. Alsdann unterliegen offenbar die Betrachtungen Seite 93 (7.), (8.), ... (11.) nicht dem mindesten Bedenken.

Nachdem in solcher Weise die Formel (11.) erreicht ist, können wir alsdann, wie man sofort übersieht, in dieser Formel (11.) die augenblickliche symmetrische Bezeichnungsweise wieder fallen lassen, und zur gewöhnlichen Ampère'schen Bezeichnungsweise zurückkehren. — *Q. e. d.*

Weise zu behandeln versuchen, wie vorhin [Seite 97 ff.] die *dritte* Reihe in Angriff genommen wurde, so würde man von einem solchen Unternehmen sehr bald Abstand nehmen müssen. Denn man müsste alsdann, was das sphärische Dreieck (7.) betrifft, erstens die Grössen A_1, B_1, C_1 constant machen (weil das Axensystem mit Ds_1 starr verbunden sein soll), zweitens aber auch A, B, C und a, b, c als Constanten sich denken (um die dritte und vierte Vertikalreihe los zu werden). Dann aber würde auch Θ constant sein, mithin die zu untersuchende zweite Vertikalreihe völlig verschwinden, und also unserer Betrachtung sich vollständig entziehen.

Sechster Abschnitt.

Genauere Bestimmung der gefundenen Elementargesetze, unter Anwendung der beiden F. Neumann'schen Integralgesetze, sowie unter Benutzung des Helmholtz'schen Princips des vollständigen Differentials.

Die im vorigen Abschnitt mit einiger Mühe gefundenen Elementargesetze, das elektromotorische [Seite 88 (21.)] und das ponderomotorische [Seite 95 (11.)], sind leider mit *eilf* unbekannten Functionen

(A.) $$\varkappa,\ \varkappa^*,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \pi,\ \pi^*$$

und

(B.) $$\varrho,\ \varrho^*,\ \varphi,\ \chi$$

behaftet. Im gegenwärtigen Abschnitt soll nun die nähere Bestimmung dieser eilf Functionen unternommen werden, und zwar durch Anwendung der beiden *F. Neumann'schen Integralgesetze* und des *Helmholtz'schen Princips des vollständigen Differentials.* So zuverlässig diese drei Quellen auch sein mögen, so wird es doch immerhin gut sein, dieselben nicht miteinander zu confundiren, sondern jede derselben *einzeln* und *unabhängig von den beiden andern* in Anwendung treten zu lassen, damit man, wenn etwa in Zukunft gegen eine derselben Misstrauen erwachen sollte, diese eine schlechtweg ausschalten kann, ohne dass dadurch die aus den beiden andern Quellen entsprungenen Resultate in Mitleidenschaft geriethen.

Aus dem *ponderomotorischen Integralgesetz* werden sich für jene eilf Functionen *zwei* Relationen ergeben, nämlich die Relationen (8.) Seite 103.

Ferner werden wir aus dem *elektromotorischen Integralgesetz* (solches für sich allein genommen) für jene eilf unbekannten Functionen im Ganzen *fünf* Relationen erhalten, und zwar *drei* dadurch, dass wir das Gesetz auf Ringe ohne Gleitstellen, und *zwei* dadurch, dass wir dasselbe auf Ringe mit Gleitstellen anwenden. Die drei ersten sind angegeben in (16.) Seite 104, und von Neuem wiederholt in (ε.) Seite 109. Die beiden letzten sind angegeben in (ζ.) Seite 110.



Endlich werden wir aus dem *Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials* (solches für sich allein genommen) im Ganzen *vier* Relationen erhalten, nämlich die Relationen (8.) Seite 113.

Alles zusammengenommen ergeben sich also für jene eilf Functionen

$$2 + 5 + 4 = 11$$

Gleichungen. Diese *eilf* Gleichungen sind aber leider nicht von einander unabhängig, mithin zur Bestimmung jener *eilf* Unbekannten unzureichend. Immerhin wird es uns zu Ende des Abschnitts gelingen, jene eilf unbekannten Functionen, mittelst der in Rede stehenden eilf Gleichungen, auf nur zwei, nämlich auf ν und χ zu reduciren.

§ 1.

Anwendung des ponderomotorischen Integralgesetzes.

Es seien gegeben zwei in beliebigen Bewegungen (mithin z. B. auch in beliebigen Gestaltsveränderungen) begriffene *inextensible lineare Ringe* M und M_1, deren Stromstärken J und J_1 *blosse Functionen der Zeit* sind. Denkt man sich diese Ringe in einzelne Elemente DM und DM_1 zerlegt, und die Längen dieser Elemente mit Ds und Ds_1 bezeichnet, so besitzt die während der Zeit dt von DM und DM_1 aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit [nach Seite 95 (10.), (11.), (12.)] den Werth:

$$(1.)\quad (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM} = JJ_1 Ds Ds_1 \left\{ [\varrho \Theta\Theta_1 + \varrho^* \mathsf{E}] dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E} \right\}\cdot$$

Die während der Zeit dt vom *ganzen* Ringe M und vom *ganzen* Ringe M_1 aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit wird daher lauten:

$$(2.)\quad (dL)_{M}^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = JJ_1 \iint Ds Ds_1 \left\{ [\varrho \Theta\Theta_1 + \varrho^* \mathsf{E}] dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E} \right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds und Ds_1 der beiden Ringe.

Diese Arbeit (2.) muss aber nach dem *F. Neumann'schen ponderomotorischen Integralgesetz* [Seite 61 (10.)] den Werth haben:

$$(3.)\quad (dL)_{M}^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = -JJ_1 dQ.$$

Hier hat Q die Bedeutung [vgl. Seite 57 (9.)]:

$$(4.)\quad Q = \iint Ds Ds_1\, \omega \Theta\Theta_1, \qquad \text{wo } \omega = -\frac{A^2}{r}\cdot$$

Der Einfachheit willen sei angenommen, dass die gegebenen Ringe M und M_1 keine Gleitstellen haben. Der der Zeit dt entsprechende Zuwachs des Ausdruckes Q (4.) hat alsdann den Werth:

$$dQ = \iint Ds\,Ds_1\, d(\omega\Theta\Theta_1),$$

d. i. den Werth:

$$(5.)\qquad dQ = \iint Ds\,Ds_1 \left\{ \frac{d\omega}{dr}\,\Theta\Theta_1\, dr + \omega\, d(\Theta\Theta_1) \right\}.$$

Dies in (3.) eingesetzt, ergiebt sich sofort:

$$(6.)\quad (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -\,JJ_1 \iint Ds\,Ds_1 \left\{ \frac{d\omega}{dr}\,\Theta\Theta_1\, dr + \omega\, d(\Theta\Theta_1) \right\}.$$

Die Ausdrücke (2.) *und* (6.) *müssen nun einander gleich sein.* Somit folgt:

$$(7.)\quad \iint Ds\,Ds_1 \left\{ \left[\left(\varrho + \frac{d\omega}{dr}\right)\Theta\Theta_1 + \varrho^* \mathsf{E} \right] dr + (\varphi + \omega)\, d(\Theta\Theta_1) + \chi\, d\mathsf{E} \right\} = 0.$$

Und zwar muss diese Formel (7,), ebenso wie das F. Neumann'sche Gesetz, aus welchem sie hergeleitet ist, ganz allgemein gelten für beliebige Bewegungen der beiden Ringe. Hieraus aber folgt, mittelst des Theorems Seite 32, sofort, dass folgende beide Relationen stattfinden müssen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \varrho + \varrho^* + \dfrac{d\omega}{dr} = 2\,\dfrac{d(\varphi + \omega)}{dr} - r\,\dfrac{d^2\chi}{dr^2}, \\ \qquad\qquad r\varrho^* = 2\,(\varphi + \omega) - r\,\dfrac{d\chi}{dr}, \end{cases}$$

wo ω eine *bekannte* Function vorstellt, nämlich die in (4.) angegebene.

§ 2.

Anwendung des elektromotorischen Integralgesetzes.

Wir halten fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des vorigen Paragraphs. Alsdann besitzt die während der Zeit dt von DM_1 auf DM ausgeübte elektromotorische Arbeit [vgl. Seite 89 (27.)] den Werth:

$$(9.)\ (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = \left\{ \begin{aligned} &JJ_1\, Ds\,Ds_1 \left\{ [\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]\,dr + \lambda\Theta_1\, d\Theta + \mu\Theta\, d\Theta_1 + \nu\, d\mathsf{E} \right\} \\ &\qquad + J(dJ_1)\, Ds\,Ds_1\, [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}] \end{aligned} \right\}.$$

Die vom *ganzen* Ringe M_1 auf den *ganzen* Ring M während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit wird daher lauten:

$$(10.)\ (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = \left\{ \begin{aligned} &JJ_1 \iint Ds\,Ds_1 \left\{ [\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]\,dr + \lambda\Theta_1\, d\Theta + \mu\Theta\, d\Theta_1 + \nu\, d\mathsf{E} \right\} \\ &\qquad + J(dJ_1) \iint Ds\,Ds_1\, [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}] \end{aligned} \right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds und Ds_1 der beiden Ringe.

Diese Arbeit (10.) muss aber nach dem *F. Neumann'schen elektromotorischen Integralgesetz* [Seite 67 (15.)] den Werth haben:

$$(11.)\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = Jd(J_1 Q),$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$(12.)\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = JJ_1 dQ + J(dJ_1)Q.$$

Substituirt man hier für Q und dQ die schon angegebenen analytischen Ausdrücke (4.) und (5.), so erhält man sofort:

$$(13.)\quad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = \left\{ \begin{array}{l} JJ_1 \iint Ds Ds_1 \left\{ \frac{d\omega}{dr} \Theta\Theta_1 dr + \omega\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1 \right\} \\ \qquad\qquad + J(dJ_1) \iint Ds Ds_1\, \omega\Theta\Theta_1 \end{array} \right\}.$$

Die Ausdrücke (10.) *und* (13.) *müssen nun einander gleich sein.* Es ist aber J_1 eine ganz beliebige Function der Zeit. Folglich müssen in diesen Ausdrücken (10.) und (13.) die Coefficienten von J_1 und dJ_1 einzeln einander gleich sein. Demgemäss ergeben sich also im Ganzen *zwei* Formeln, nämlich eine *erste* durch Gleichsetzung der Coefficienten von dJ_1, sie lautet:

$$(14.)\qquad \iint Ds Ds_1 [(\pi - \omega)\Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] = 0,$$

und eine *zweite* durch Gleichsetzung der Coefficienten von J_1, welche folgendermassen lautet:

$$(15.)\ \iint DsDs_1 \left\{ \left[\left(\varkappa - \frac{d\omega}{dr} \right) \Theta\Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E} \right] dr + (\lambda - \omega)\Theta_1 d\Theta + (\mu - \omega)\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} = 0.$$

Diese beiden Formeln (14.) und (15.) werden offenbar, ebenso wie das F. Neumann'sche Gesetz, aus welchem sie hergeleitet sind, ganz allgemein gelten für beliebige Bewegungen der beiden Ringe. Demgemäss gelangt man, auf Grund der Theoreme Seite 14 und 32, zu der Einsicht, dass folgende Relationen stattfinden müssen:

$$(16.)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \pi - \omega = r \dfrac{d\pi^*}{dr}, \\ \varkappa + \varkappa^* = \dfrac{d(\lambda + \mu - \omega)}{dr} - r \dfrac{d^2 \nu}{dr^2}, \\ \qquad r\varkappa^* = (\lambda + \mu - 2\omega) - r \dfrac{d\nu}{dr}. \end{array} \right.$$

Hier bezeichnet ω eine *bekannte* Function, nämlich die in (4.) angegebene.

§ 3.

Fortsetzung. Insbesondere über den Fall, dass die betrachteten Ringe mit Gleitstellen behaftet sind.

Die beiden Ringe M und M_1 seien mit beliebig vielen Gleitstellen behaftet. Jedoch seien die einzelnen Stücke, aus denen jeder solcher Ring zusammengesetzt ist, *inextensibel.* Auch sei die Stromstärke eines jeden solchen Ringes eine *blosse Function der Zeit.* Alsdann wird bekanntlich das F. Neumann'sche elektromotorische Integralgesetz gültig sein für beliebige Bewegungen der beiden Ringe. [Vgl. die Bemerkung Seite 67]. Und es handelt sich nun darum, die Untersuchungen des vorigen Paragraphs auszudehnen auf diesen allgemeineren Fall.

In Folge der Gleitstellen sind, was z. B. die Elemente DM_1 des Ringes M_1 betrifft, mit Bezug auf ein gegebenes Zeitelement dt zweierlei Arten zu unterscheiden, nämlich erstens die *gewöhnlichen* DM_1, d. i. diejenigen, welche während der ganzen Zeit dt dem Ringe angehören, und zweitens die *aussergewöhnlichen* DM_1, d. i. diejenigen, welche während der Zeit dt in den Ring neu eintreten oder aus ihm ausscheiden. Bezeichnet man die Stromstärke des Ringes in den Augenblicken t und $t + dt$ respective mit J_1 und $J_1 + dJ_1$, so wird die Stromstärke in jedem *gewöhnlichen* DM_1 während der Zeit dt von J_1 auf $J_1 + dJ_1$ anwachsen. Andererseits aber wird die Stromstärke in jedem *aussergewöhnlichen* Elemente DM_1, je nachdem dasselbe ein neu eintretendes oder ein ausscheidendes ist, während der Zeit dt von 0 zu $J_1 + dJ_1$ anwachsen, oder aber von J_1 zu 0 sinken.

Die von einem *gewöhnlichen* DM_1 während der Zeit dt auf irgend ein Element DM des Ringes M ausgeübte elektromotorische Arbeit hat den schon vorhin [Seite 103 (9.)] genannten Werth:

$$(1.)\quad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = \left\{ \begin{aligned} & JJ_1 Ds Ds_1 \left\{ [\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E}]dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} \\ & \qquad + J(dJ_1) Ds Ds_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] \end{aligned} \right\}.$$

Unendlich kleine Grössen höherer Ordnung sind bekanntlich, falls sie additiv auftreten, bedeutungslos. Demgemäss wird man z. B. den in der *ersten* Zeile der Formel (1.) enthaltenen Factor J_1, falls es beliebt,

$$\text{durch } J_1 + \frac{dJ_1}{2}, \text{ oder durch } J_1 + \frac{dJ_1}{3}, \text{ u. s. w.}$$

ersetzen dürfen. Kurz man wird in jener ersten Zeile unter J_1 ganz nach Belieben, entweder den Werth der Stromstärke zu Anfang der Zeit dt, oder auch irgend einen *Mittelwerth* unter denjenigen Werthen verstehen können, welche die Stromstärke im Verlauf des kleinen Zeit-

intervalls dt nach und nach annimmt. Andererseits ist in der *zweiten* Zeile der Formel (1.) unter dJ_1 offenbar das *Increment* der Stromstärke während der Zeit dt zu verstehen.

Auf Grund dieser einfachen Bemerkungen ist es nun leicht, die Formel (1.) auf die *aussergewöhnlichen* DM_1 anzuwenden. Betrachtet man z. B. ein während der Zeit dt in den Ring M_1 *neu eintretendes* Element DM_1, dessen Stromstärke während dieser Zeit von 0 auf $J_1 + dJ_1$ anwächst, so wird offenbar jener Mittelwerth durch irgend eine unbekannte zwischen 0 und $J_1 + dJ_1$ liegende Grösse Y_1, andererseits aber das genannte Increment durch die Differenz $(J_1 + dJ_1 - 0)$ dargestellt sein. Somit ergiebt sich für ein solches neu eintretendes Element DM_1 die Formel:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = \left\{ \begin{array}{c} JY_1 Ds Ds_1 \left\{ [\varkappa \Theta \Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E}] dr + \lambda \Theta_1 d\Theta + \mu \Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} \\ + J(J_1 + dJ_1 - 0) Ds Ds_1 [\pi \Theta \Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] \end{array} \right\}.$$

Allerdings würde diese Formel sehr bedenklich sein, wenn bei ihr jener unbekannte (zwischen 0 und $J_1 + dJ_1$ liegende) Mittelwerth Y_1 wirklich irgend welche Rolle spielte. Ein näherer Blick auf die Formel zeigt indessen, dass Y_1 ganz fortfällt. In der That wird diese Formel, weil unendlich kleine Grössen höherer Ordnung fortzulassen sind, sich reduciren auf

$$\text{(p.)} \qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = J(J_1 - 0) Ds Ds_1 [\pi \Theta \Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}].$$

Ebenso nun, wie diese Formel (p.) für ein während der Zeit dt *neu eintretendes* Element DM_1 sich ergeben hat, in ganz ähnlicher Weise wird man, wie leicht zu übersehen ist, für ein während der Zeit dt *ausscheidendes* Element DM_1 zu folgender Formel gelangen:

$$\text{(q.)} \qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = J(0 - J_1) [\pi \Theta \Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}].$$

In allen drei Formeln (1.), (p.), (q.) sind unter Ds und Ds_1 die *Längen* der jedesmal betrachteten Elemente DM und DM_1 zu verstehen, so dass also diese Ds und Ds_1 durchweg *positive* Grössen vorstellen. Unter Anwendung einer früher festgesetzten Bezeichnungsweise [vgl. die Regel Seite 37], kann man nun aber die beiden Formeln (p.), (q.) zusammenfassen zu einer einzigen Formel, die so lautet:

$$\text{(2.)} \qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = JJ_1 Ds \Delta s_1 [\pi \Theta \Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}];$$

hier wird alsdann Δs_1, je nachdem DM_1 ein neu eintretendes oder ein ausscheidendes Element vorstellt, im erstern Fall die *wirkliche* Länge des Elementes, im letztern Fall hingegen die *mit* (-1) *multiplicirte* Länge desselben vorstellen.



Die vom *ganzen* Ringe M_1 während der Zeit dt auf das Element DM ausgeübte elektromotorische Arbeit wird nun offenbar dadurch erhalten werden, dass man den Ausdruck (1.) über alle *gewöhnlichen* DM_1, ferner den Ausdruck (2.) über alle *aussergewöhnlichen* DM_1 summirt, und endlich die so erhaltenen beiden Summen zusammenaddirt. Somit folgt:

$$(3.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{M_1} = \left\{ \begin{array}{l} JJ_1 Ds \int Ds_1 \left\{ [\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E}] dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} \\ \qquad + J(dJ_1) Ds \int Ds_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] \\ \qquad + JJ_1 Ds \sum \Delta s_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] \end{array} \right\},$$

wo das grosse Sigma in der letzten Zeile eine Summation über discrete Glieder, nämlich über alle der Zeit dt entsprechenden Δs_1 andeuten soll.

Aus (3.) ergiebt sich nun weiter die während der Zeit dt vom *ganzen* Ringe M_1 auf den *ganzen* Ring M ausgeübte elektromotorische Arbeit dadurch, dass man über alle Elemente DM des Ringes M integrirt. Somit erhält man, bei einer gewissen Umstellung der Glieder, folgende Formel:

$$(4.)\qquad (d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = \left\{ \begin{array}{l} JJ_1 \iint Ds Ds_1 \left\{ [\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^* \mathsf{E}] dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E} \right\} \\ \qquad + JJ_1 \cdot \int \sum Ds \Delta s_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] \\ \qquad + J(dJ_1) \cdot \iint Ds Ds_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}] \end{array} \right\}.$$

Nach dem F. Neumann'schen elektromotorischen Integralgesetz [Seite 67 (15.)] muss nun aber diese Arbeit (4.) den Werth besitzen:

$$(5.)\qquad (d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = Jd(J_1 Q),$$

einen Werth, den man offenbar auch so schreiben kann:

$$(6.)\qquad (d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = JJ_1 dQ + J(dJ_1)Q;$$

hier hat Q [ebenso wie auf Seite 102 (4.)] die Bedeutung:

$$(7.)\qquad Q = \iint Ds Ds_1 \, \omega\Theta\Theta_1, \quad \text{wo: } \omega = -\frac{A^2}{r}.$$

Beide Ringe M und M_1 befinden sich in irgend welchen Bewegungen; und der Werth des Integrals Q (7.) wird daher während der Zeit dt aus doppeltem Grunde anwachsen, nämlich einmal deswegen, weil (in Folge jener Bewegungen) die unter den Integralzeichen stehenden Grössen ω, Θ, Θ_1 sich ändern, andererseits aber auch deswegen, weil (in Folge jener Bewegungen) in die Ringe M und M_1 neue Elemente eintreten und alte ausscheiden. Somit ergiebt sich aus (7.) für den Zuwachs von Q während der Zeit dt folgender Ausdruck:

$$(8.)\qquad dQ = \left\{\begin{array}{l}\iint Ds\,Ds_1\left\{\frac{d\omega}{dr}\Theta\Theta_1\,dr + \omega\,\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1\right\}\\ +\int\sum Ds_1\Delta s\cdot\omega\,\Theta\Theta_1 + \int\sum Ds\Delta s_1\,\omega\Theta\Theta_1\end{array}\right\},$$

wo die grossen Sigmas Summationen andeuten über alle der Zeit dt entsprechenden Δs und Δs_1. Dabei besitzen diese Δs und Δs_1 wiederum die früher festgesetzte Bedeutung. [Vgl. die Regel Seite 37].

Substituirt man in der Formel (6.) für Q und dQ die Ausdrücke (7.) und (8.), so erhält man sofort:

$$(9.)\quad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = \left\{\begin{array}{l}JJ_1\iint Ds\,Ds_1\left\{\frac{d\omega}{dr}\Theta\Theta_1\,dr + \omega\,\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1\right\}\\ + JJ_1\int\sum Ds_1\Delta s\cdot\omega\,\Theta\Theta_1 + JJ_1\int\sum Ds\Delta s_1\,\omega\Theta\Theta_1\\ + J(dJ_1)\iint Ds\,Ds_1\,\omega\Theta\Theta_1\end{array}\right\}.$$

Die Ausdrücke (4.) *und* (9.) *müssen nun einander gleich sein.* Das in diesen Ausdrücken enthaltene J_1 ist aber eine ganz beliebige Function der Zeit. Folglich müssen in diesen Ausdrücken die Coefficienten von J_1 und dJ_1 einzeln einander gleich sein. Demgemäss erhält man also im Ganzen *zwei* Formeln, nämlich eine *erste* durch Vergleichung der Coefficienten von dJ_1, sie lautet:

$$(\alpha.)\qquad \iint Ds\,Ds_1[(\pi - \omega)\,\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}] = 0,$$

und eine *zweite* durch Vergleichung der Coefficienten von J_1, welche folgendermassen lautet:

$$(\beta.)\ \iint Ds\,Ds_1\left\{\left[\left(\varkappa - \frac{d\omega}{dr}\right)\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}\right]dr + (\lambda - \omega)\Theta_1 d\Theta + (\mu - \omega)\Theta d\Theta_1 + \nu\,d\mathsf{E}\right\}$$
$$+\int\sum Ds_1\Delta s(-\omega)\Theta\Theta_1 + \int\sum Ds\Delta s_1[(\pi - \omega)\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}] = 0.$$

Die *erste Zeile* der Formel ($\beta.$) ist nach dem allgemeinen Transformationssatz Seite 50 auch so darstellbar:

$$\iint Ds\,Ds_1\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right]dr +$$
$$+\int\sum Ds_1\Delta s\left(r\frac{d\nu}{dr} + \omega - \lambda\right)\Theta\Theta_1 + \int\sum Ds\Delta s_1\left(r\frac{d\nu}{dr} + \omega - \mu\right)\Theta\Theta_1,$$

wo L, M, ebenso wie ω, λ, μ, ν, blosse Functionen von r sind. Somit können wir zuvörderst die Formel ($\alpha.$) von Neuem wiederholen:

$$(\alpha.)\qquad \iint Ds\,Ds_1[(\pi - \omega)\,\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}] = 0,$$

sodann aber der Formel ($\beta.$) folgende Gestalt geben:

$$(\beta.)\qquad \iint Ds\,Ds_1\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right]dr$$
$$+\int\sum Ds_1\Delta s\left(r\frac{d\nu}{dr} - \lambda\right)\Theta\Theta_1 + \int\sum Ds\Delta s_1\left[\left(r\frac{d\nu}{dr} + \pi - \mu\right)\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}\right] = 0.$$

Dabei ist zu beachten, dass L und M, zufolge des soeben benutzten Transformationssatzes Seite 50, die Werthe haben:

$$(\gamma.)\quad \begin{aligned} L &= \left(\varkappa + \varkappa^* - \frac{d\omega}{dr}\right) + r\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{d(\lambda+\mu-2\omega)}{dr}, \\ M &= \qquad r\varkappa^* + r\frac{d\nu}{dr} - (\lambda+\mu-2\omega). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (α.), (β.) werden nun, ebenso wie das elektromotorische Integralgesetz, aus welchem sie hergeleitet sind, ganz allgemein gelten für beliebige Bewegungen der beiden Ringe. Sie werden also z. B. auch dann gelten müssen, wenn die Δs, Δs_1 alle $= 0$ sind, d. h. wenn die Ringe, trotz ihrer Gleitstellen, sich so bewegen, als ob Gleitstellen gar nicht vorhanden wären. Durch Betrachtung dieses besondern Falles ergiebt sich aber aus den Gleichungen (α.), (β.), mittelst der Theoreme Seite 14 und 27, sofort, dass folgende Relationen stattfinden müssen:

$$(\delta.)\qquad \pi - \omega = r\frac{d\pi^*}{dr}, \qquad L = 0, \qquad M = 0,$$

Relationen, die man mit Rücksicht auf (γ.) auch so schreiben kann:

$$(\varepsilon.)\qquad \left\{\begin{aligned} \pi - \omega &= r\frac{d\pi^*}{dr}, \\ \varkappa + \varkappa^* &= \frac{d(\lambda+\mu-\omega)}{dr} - r\frac{d^2\nu}{dr^2}, \\ r\varkappa^* &= (\lambda+\mu-2\omega) - r\frac{d\nu}{dr}. \end{aligned}\right.$$

Diese Relationen (δ.) oder (ε.) erfüllt gedacht, wird, zufolge des Theorems Seite 14, die Gleichung (α.) nicht nur für den betrachteten besondern Fall, sondern ganz allgemein erfüllt sein, also auf

$$(\text{A.})\qquad 0 = 0$$

sich reduciren. Andererseits wird offenbar die Gleichung (β.), jene Relationen (δ.) oder (ε.) erfüllt gedacht, sich reduciren auf:

$$(\text{B.})\ \int\sum Ds_1\Delta s\left(r\frac{d\nu}{dr} - \lambda\right)\Theta\Theta_1 + \int\sum Ds\Delta s_1\left[\left(r\frac{d\nu}{dr} + \pi - \mu\right)\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}\right] = 0.$$

All' unsere Gleichungen müssen, ebenso wie das F. Neumann'sche elektromotorische Integralgesetz, aus welchem sie hergeleitet sind, in Kraft bleiben für ganz beliebige Bewegungen der gegebenen beiden Ringe. Wenn wir nun vorhin einige unserer Gleichungen auf den speciellen Fall anwendeten, dass die Δs und Δs_1 alle $= 0$ sind, so wollen wir gegenwärtig den wohl zunächst liegenden Specialfall in Betracht ziehen, nämlich annehmen, die Bewegungen seien der Art, dass unter allen Δs und Δs_1 nur *ein einziges* einen von 0 verschiedenen Werth hat.

Ist dieses eine ein Δs, so reducirt sich die Gleichung (B.) auf

$$\Delta s \int Ds_1 \left(r \frac{dv}{dr} - \lambda\right) \Theta\Theta_1 = 0.$$

Ist andererseits dieses eine ein Δs_1, so reducirt sich dieselbe auf:

$$\Delta s_1 \int Ds \left[\left(r \frac{dv}{dr} + \pi - \mu\right) \Theta\Theta_1 + \pi^* \mathsf{E}\right] = 0.$$

Aus diesen beiden letzten Formeln folgt nun aber, mittelst des Theoremes Seite 16, sofort, dass folgende Relationen stattfinden müssen:

$$(\zeta.) \qquad \begin{cases} r \dfrac{dv}{dr} - \lambda = 0, \\ r \dfrac{dv}{dr} + \pi - \mu = r \dfrac{d\pi^*}{dr}. \end{cases}$$

Somit haben wir im Ganzen fünf Relationen erhalten: (ε.) *und* (ζ.). Die Relationen (ε.) sind identisch mit den schon im vorigen Paragraph gefundenen Relationen (16.) Seite 104. Zu diesen aber sind hier im gegenwärtigen Paragraph, bei der Betrachtung von Ringen, die Gleitstellen besitzen, noch hinzugetreten die Relationen (ζ.).

§ 4.

Das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials*).

Die Summe aller ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten, welche zwei Stromringe, vermöge ihrer elektrodynamischen Kräfte, während der Zeit dt aufeinander ausüben, ist ein *vollständiges Differential*, nämlich identisch mit demjenigen Zuwachse, den eine gewisse nur vom augenblicklichen Zustande der beiden Ringe abhängende Function während der Zeit dt erfährt.

Dieser Satz ist uns bereits bekannt. Er ergiebt sich, wie wir gesehen haben [Seite 68 (18.)], leicht und mit voller Sicherheit auf Grund der beiden F. Neumann'schen Integralgesetze, allerdings nur für den Fall, dass die beiden Ringe inextensibel, und ihre Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind.

Helmholtz ist nun der Ansicht, dass dieser Satz nicht nur für Stromringe, sondern ebenso auch für *ungeschlossene* Ströme, mithin z. B. auch für einzelne *Stromelemente* Gültigkeit besitzen müsse. Man vergleiche Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 562, namentlich die Stelle, welche mit den Worten schliesst:

*) Dieses Princip ist von Helmholtz hingestellt als eine Anwendung des allgemeinen Princips der Erhaltung der Kraft auf die Theorie der Elektrodynamik, und wird demgemäss von Helmholtz kurzweg als *das Princip der Erhaltung der Kraft* bezeichnet.

„— — — Eine Function dieser Art muss offenbar auch für „einzelne oder zwei nebeneinander bestehende *ungeschlossene* Strö„mungen existiren. Es muss sich der Werth des Arbeits„äquivalentes ihrer elektrischen Bewegung angeben lassen.“

Ob man die in Rede stehende Function als Arbeitsäquivalent, oder mit irgend welchem andern Namen bezeichnet, ist von untergeordneter Bedeutung. Jedenfalls aber ist diese Helmholtz'sche Annahme ausserordentlich beachtenswerth. Und wir werden dieselbe, wenn wir die Herbeiziehung eines solchen Namens vermeiden wollen, ihrem eigentlichen Kern nach, folgendermassen auszusprechen haben:

Das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials. — *Die Summe der während der Zeit dt von zwei elektrischen Stromelementen, vermöge ihrer elektrodynamischen Kräfte, aufeinander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten ist ein vollständiges Differential, nämlich identisch mit demjenigen Zuwachs, den eine gewisse noch unbekannte, aber nur vom augenblicklichen Zustande der beiden Elemente abhängende Function während der Zeit dt erfährt.* Dabei ist unter dem augenblicklichen Zustande der beiden Elemente Alles zu verstehen, was der Augenblick darbietet, also sowohl die augenblickliche Beschaffenheit des einen und des andern Elementes, wie auch die augenblickliche relative Lage der beiden Elemente zu einander.

Bemerkung. — Wenn Helmholtz an der citirten Stelle in ganz kategorischer Weise sagt:

„Eine Function dieser Arbeit *muss* offenbar auch — —“,

und hiemit sein Princip als ein absolut und unbedingt nothwendiges hinstellt; so ist demgegenüber doch zu bemerken, dass Helmholtz einige Jahre später [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 713] hierüber etwas reservirter sich ausgedrückt hat. Denn an jener späteren Stelle ist nicht mehr von einer Nothwendigkeit, sondern nur noch von Wahrscheinlichkeit und Unwahrscheinlichkeit die Rede.

Dass der Satz des vollständigen Differentials für geschlossene Ströme, nämlich für inextensible Ringe gelte, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind, kann, auf Grund der F. Neumann'schen Integralgesetze, keinem Zweifel unterliegen. Und Helmholtz bemerkt nun an jener späteren Stelle, es scheine ihm *„im höchsten Grade unwahrscheinlich“*, dass ein solcher Satz nur *„durch den gleichsam zufälligen Einfluss der Summirung über eine geschlossene Bahn entstanden sein sollte“*, den einzelnen Stromelementen an und für sich aber nicht zukommen sollte.

Auch meine eigne Stellung gegenüber diesem vom Helmholtz für einzelne *Stromelemente* aufgestellten Princip des vollständigen Differentials hat sich im Laufe der Zeit geändert. Wenn ich nämlich dieses Princip im ersten Theil des vorliegenden Werkes [daselbst Seite 123—141] zu beweisen versucht habe, so betrachte ich gegenwärtig jenen Beweis mit mehr oder weniger Misstrauen.



Wie dem auch sei, — jedenfalls empfiehlt sich das Helmholtz'sche Princip nicht nur durch den Namen Helmholtz, sondern auch durch seine grosse Einfachheit und Wahrscheinlichkeit. Und wir wollen daher bei unsern weiteren Untersuchungen so verfahren, als ob dieses Princip über allen Zweifel erhaben wäre.

Die Summe aller während der Zeit dt von zwei elektrischen Stromelementen DM und DM_1, vermöge ihrer elektrodynamischen Kräfte, auf einander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten lautet:

$$(1.)\qquad (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM} + (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}.$$

Setzt man wie früher:

$$dL = (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM},$$
$$d\mathfrak{L} = (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM},$$

so geht die Summe (1.) über in:

$$(2.)\qquad dL + d\mathfrak{L}.$$

Es haben aber dL und $d\mathfrak{L}$ nach unsern früheren Untersuchungen [Seite 95 (11.) und Seite 89 (30.)] die Werthe:

$$dL = JJ_1 Ds Ds_1 \Big\{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^*\mathsf{E}]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}\Big\},$$
$$d\mathfrak{L} = JJ_1 Ds Ds_1 \Big\{[2\varkappa\Theta\Theta_1 + 2\varkappa^*\mathsf{E}]dr + (\lambda + \mu) d(\Theta\Theta_1) + 2\nu d\mathsf{E}\Big\}$$
$$+ [d(JJ_1)] \cdot Ds Ds_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}];$$

so dass also die in Rede stehende Summe (1.) oder (2.) übergeht in:

$$(3.)\qquad dL + d\mathfrak{L} = JJ_1 Ds Ds_1 \begin{Bmatrix} [(\varrho + 2\varkappa)\Theta\Theta_1 + (\varrho^* + 2\varkappa^*)\mathsf{E}]dr \\ + (\varphi + \lambda + \mu) d(\Theta\Theta_1) + (\chi + 2\nu) d\mathsf{E} \end{Bmatrix}$$
$$+ [d(JJ_1)] Ds Ds_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}].$$

Diese in (1.), (2.), (3.) *angegebene Summe muss nun nach dem Helmholtz'schen Princip* [*Seite 111*] *ein vollständiges Differential sein.* Betrachtet man also die beiden Elemente DM und DM_1 als inextensibel, mithin ihre Längen Ds und Ds_1 als unveränderliche Constanten, so muss der Ausdruck (3.) die Form haben:

$$(4.)\qquad dL + d\mathfrak{L} = Ds Ds_1\, d(JJ_1 f),$$

d. i. die Form:

$$(4a.)\qquad dL + d\mathfrak{L} = JJ_1 Ds Ds_1\, df + [d(JJ_1)] Ds Ds_1 f,$$

wo f eine noch unbekannte Function vorstellt, die lediglich abhängt von der relativen Lage der beiden Elemente $DM(Ds)$ und $DM_1(Ds_1)$ zu einander.

Soll aber der Ausdruck (3.) diese Form (4.) oder (4a.) wirklich besitzen, so ist dazu offenbar erforderlich und ausreichend, dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$(5.)\begin{cases} f = \pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}, \\ df = [(\varphi+2\varkappa)\Theta\Theta_1 + (\varrho^*+2\varkappa^*)\mathsf{E}]dr + (\varphi+\lambda+\mu)d(\Theta\Theta_1) + (\chi+2\nu)d\mathsf{E}; \end{cases}$$

und hieraus folgt durch Elimination von f sofort:

$$(6.)\quad [(\varrho+2\varkappa)\Theta\Theta_1 + (\varrho^*+2\varkappa^*)\mathsf{E}]dr + (\varphi+\lambda+\mu)d(\Theta\Theta_1) + (\chi+2\nu)d\mathsf{E} = \\ = \left[\frac{d\pi}{dr}\Theta\Theta_1 + \frac{d\pi^*}{dr}\mathsf{E}\right]dr + \pi\, d(\Theta\Theta_1) + \pi^* d\mathsf{E}.$$

Das Helmholtz'sche Princip [Seite 111] soll, und zwar nach Helmholtz' eigner Ansicht, ganz allgemein gelten. Die Formel (6.) muss daher, ebenso wie jenes Princip, aus welchem sie hergeleitet ist, ebenfalls ganz allgemein gelten für beliebige Stromelemente und für beliebige Bewegungen derselben, also für beliebige Werthe von r, Θ, Θ_1, E, dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$. Die Coefficienten der drei Zuwüchse dr, $d(\Theta\Theta_1)$ und $d\mathsf{E}$ müssen daher in der Formel (6.) auf beiden Seiten einzeln einander gleich sein; so dass man also zu folgenden drei Gleichungen gelangt:

$$(7.)\quad \begin{aligned} (\varrho+2\varkappa)\Theta\Theta_1 + (\varrho^*+2\varkappa^*)\mathsf{E} &= \frac{d\pi}{dr}\Theta\Theta_1 + \frac{d\pi^*}{dr}\mathsf{E}, \\ \varphi+\lambda+\mu &= \pi, \\ \chi+2\nu &= \pi^*. \end{aligned}$$

Auch müssen diese drei Gleichungen gültig sein für beliebige Werthe von Θ, Θ_1, E; so dass also die erste derselben von Neuem in zwei Gleichungen zerfällt. Demgemäss gelangt man also schliesslich zu folgenden vier Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} \varrho+2\varkappa = \dfrac{d\pi}{dr}, & \varphi+\lambda+\mu = \pi, \\ \varrho^*+2\varkappa^* = \dfrac{d\pi^*}{dr}, & \chi+2\nu = \pi^*; \end{cases}$$

und diese vier Relationen repräsentiren das Hauptresultat des gegenwärtigen Paragraphs.

Daneben aber ergiebt sich aus (4.), wenn man daselbst für f seinen Werth (5.) substituirt, die Formel:

$$(9.)\quad dL + d\mathfrak{L} = DsDs_1 \cdot d\Big(JJ_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}]\Big);$$

wofür man (weil Ds und Ds_1 inextensibel sind) auch schreiben darf:

$$(10.)\quad dL + d\mathfrak{L} = d\Big(JJ_1 DsDs_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}]\Big);$$

so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Satz. — *Sind zwei inextensible lineare Stromelemente Ds und Ds_1 mit den Stromstärken J und J_1 in beliebigen Bewegungen und jene Stromstärken in beliebigen Aenderungen begriffen, so wird (auf Grund des Helmholtz'schen Princips) die Summe der während der Zeit dt von den beiden Elementen aufeinander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten stets identisch sein mit demjenigen Zuwachs, den die Function*

$$JJ_1 Ds Ds_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}] \tag{11.}$$

während der Zeit dt erfährt. Dabei bezeichnen π und π^* blosse Functionen von r, die allerdings einstweilen noch unbekannt sind.

Kaum bedarf es der Bemerkung, dass in (11.) unter r, Θ, Θ_1, E die den beiden Elementen Ds und Ds_1 zugehörigen Ampère'schen Argumente zu verstehen sind.

Uebrigens kann dieser Satz, wie aus seiner Ableitung hervorgeht, und wie auch bei seiner Aussprache besonders betont worden ist, einstweilen nur für *lineare* Stromelemente behauptet werden. Ob er auch für *körperliche* Elemente gilt, bedarf noch einer besondern Untersuchung. Denn *körperliche* und *lineare* Stromelemente sind, ihrem eigentlichen Wesen nach, von einander durch eine weite Kluft getrennt; wie solches im folgenden Abschnitt näher dargelegt werden soll.

§ 5.

Bestimmung der unbekannten Functionen

Wir recapituliren zuvörderst: Für *lineare* elektrische Ströme haben wir [Seite 95 und Seite 88] folgende Elementargesetze gefunden:

$$dL = JJ_1 Ds Ds_1 \Big\{[\rho\Theta\Theta_1 + \rho^*\mathsf{E}]\,dr + \varphi\, d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}\Big\}, \tag{1.}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}dt = J_1 Ds_1 \Big\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]\,dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E}\Big\} \\ + (dJ_1) Ds_1[\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}],\end{aligned} \tag{2.}$$

die indessen noch behaftet sind mit *eilf* unbekannten, allein von r abhängenden Functionen:

$$\begin{matrix}\rho, \ \rho^*, \ \varphi, \ \chi, \\ \varkappa, \ \varkappa^*, \ \lambda, \ \mu, \ \nu, \ \pi, \ \pi^*.\end{matrix} \tag{3.}$$

Was die Bestimmung dieser eilf unbekannten Functionen betrifft, so sei zunächst daran erinnert, dass wir unter ω [vgl. z. B. Seite 102 (4.)] folgende *bekannte* Function verstanden haben:

$$\omega = -\frac{A^2}{r}, \tag{4.}$$

wo A^2 eine positive Constante vorstellt.



Auf Grund des F. Neumann'schen ponderomotorischen Integralgesetzes sind wir nun [Seite 103] zu der Einsicht gelangt, dass zwischen jenen unbekannten Functionen (3.) und der bekannten Function (4.) folgende beide Gleichungen stattfinden:

(5a.) $$\varrho + \varrho^* = 2\,\frac{d(\varphi + \omega)}{dr} - \frac{d\omega}{dr} - r\,\frac{d^2\chi}{dr^2},$$

(5b.) $$r\varrho^* = 2(\varphi + \omega) - r\,\frac{d\chi}{dr}.$$

Ferner haben wir *fünf* Gleichungen gefunden auf Grund des F. Neumann'schen elektromotorischen Integralgesetzes; und zwar *drei* Gleichungen bei Anwendung des Gesetzes auf Ringe ohne Gleitstellen, und weitere *zwei* Gleichungen bei Anwendung des Gesetzes auf Ringe mit Gleitstellen. Die erstern lauten [vgl. Seite 104]:

(6a.) $$\varkappa + \varkappa^* = \frac{d(\lambda + \mu - \omega)}{dr} - r\,\frac{d^2\nu}{dr^2},$$

(6b.) $$r\varkappa^* = (\lambda + \mu - 2\omega) - r\,\frac{d\nu}{dr},$$

(6c.) $$\pi - \omega = r\,\frac{d\pi^*}{dr};$$

andrerseits lauten die letztern [vgl. Seite 110 (ζ.)]:

(7a.) $$r\,\frac{d\nu}{dr} - \lambda = 0,$$

(7b.) $$r\,\frac{d\nu}{dr} + \pi - \mu = r\,\frac{d\pi^*}{dr}.$$

Endlich haben sich zur Bestimmung der unbekannten Functionen aus dem Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials [auf Seite 113] vier Gleichungen ergeben, von denen man die beiden ersten so schreiben kann:

(8a.) $$(\varrho + \varrho^*) + 2(\varkappa + \varkappa^*) = \frac{d(\pi + \pi^*)}{dr},$$

(8b.) $$\varrho^* + 2\varkappa^* = \frac{d\pi^*}{dr},$$

während die beiden letztern lauten:

(9a.) $$\varphi + \lambda + \mu = \pi,$$

(9b.) $$\chi + 2\nu = \pi^*.$$

Zur Berechnung jener *eilf* unbekannten Functionen (3.) haben wir also im Ganzen *eilf* Gleichungen, nämlich die Gleichungen: (5a, b.), (6a, b, c.), (7a, b.), (8a, b.) und (9a, b.). Doch sind zwei dieser Gleichungen eine Folge der übrigen; und man wird daher jene eilf unbekannten Functionen nicht wirklich berechnen, sondern nur auf zwei derselben, z. B. auf ν und χ reduciren können.

Um auf diese ganz elementaren Dinge hier, wenigstens andeutungsweise, näher einzugehen, sei Folgendes bemerkt.

Aus den *fünf* Gleichungen (6c.), (7a, b.), (9a, b.) lassen sich für die fünf Functionen

$$\pi,\quad \pi^*,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \varphi$$

gewisse Werthe finden. Diese Werthe substituire man in den *vier* Gleichungen (5a, b.), (6a, b.), und berechne sodann aus diesen vier Gleichungen die Werthe der vier Grössen:

$$(\varrho + \varrho^*),\quad (r\varrho^*),\quad (\varkappa + \varkappa^*),\quad (r\varkappa^*).$$

In solcher Weise gelangt man, ohne irgend welche Schwierigkeit, zu folgenden Formeln:

$$(10.)\qquad \begin{cases} \lambda = r\dfrac{d\nu}{dr}, \\ \mu = \omega + r\dfrac{d\nu}{dr}, \\ \nu = \nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = r\dfrac{d\chi}{dr}, \\ \chi = \chi, \end{cases}$$

sowie auch zu den Formeln:

$$(11.)\qquad \begin{cases} \pi = \omega + r\dfrac{d(\chi + 2\nu)}{dr}, \\ \pi^* = \chi + 2\nu, \end{cases}$$

und gleichzeitig auch zu folgenden Formeln:

$$(12.)\quad \begin{cases} \varrho + \varrho^* = \dfrac{d\omega}{dr} + 2\dfrac{d\chi}{dr} + r\dfrac{d^2\chi}{dr^2}, \\ r\varrho^* = 2\omega + r\dfrac{d\chi}{dr}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa + \varkappa^* = 2\dfrac{d\nu}{dr} + r\dfrac{d^2\nu}{dr^2}, \\ r\varkappa^* = r\dfrac{d\nu}{dr} - \omega. \end{cases}$$

Substituirt man endlich diese Ausdrücke (10.), (11.), (12.) in denjenigen jener eilf Gleichungen, die bisher noch nicht benutzt sind, nämlich in den *zwei* Gleichungen (8a, b.), so zeigt sich, dass sie diesen beiden Gleichungen *identisch* Genüge leisten.

Jene eilf Gleichungen sind also völlig äquivalent mit den Formeln (10.), (11.), (12.). *Diese Formeln* (10.), (11.), (12.) *aber liefern die eilf unbekannten Functionen*

$$(13.)\qquad \begin{matrix} \varrho,\ \varrho^*,\ \ \varphi,\ \chi, \\ \varkappa,\ \varkappa^*,\ \ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ \pi,\ \pi^*, \end{matrix}$$

ausgedrückt durch zwei derselben, nämlich durch ν *und* χ.

Hieraus geht zugleich hervor, dass jene eilf Gleichungen (wie vorhin schon ohne nähere Begründung bemerkt wurde) nicht von einander unabhängig, sondern dass zwei derselben eine *Folge* der übrigen sind; — ein Umstand, durch welchen unser Vertrauen zu den Quellen,

aus denen jene eilf Gleichungen geschöpft wurden, wesentlich verstärkt wird.

Will man die *eilf* Functionen (13.) *vollständig* bestimmen, so wird man, wie aus (10.), (11.), (12.) folgt, nur noch nöthig haben, irgend *zwei* derselben, z. B. ν und χ, wirklich zu finden. Zu diesem Zweck werden wir nun zuvörderst im *siebenten* Abschnitt die gefundenen beiden Elementargesetze (1.), (2.) auf *körperliche* Stromelemente übertragen müssen, was nicht ganz leicht ist. Und erst nach Absolvirung dieser Vorarbeit wird es uns alsdann im *achten* Abschnitt gelingen, jenes eigentliche Ziel wirklich zu erreichen.

Selbstverständlich wird übrigens die Uebertragung der Elementargesetze auf *körperliche* Stromelemente nicht nur als eine Vorarbeit anzusehen, sondern auch an und für sich eine Sache von grösster Bedeutung sein.

Siebenter Abschnitt.

Uebergang von linearen zu körperlichen Stromelementen. Einführung der Hypothese Delta.

Ein *lineares Stromelement* JDs hat die Gestalt eines ausserordentlich dünnen Cylinders oder Prismas von der Kantenlänge Ds. Als *Axe* eines solchen Elementes wird jede Linie in seinem Innern zu bezeichnen sein, die mit der Kante Ds parallel läuft. Ist insbesondere J unabhängig von der Zeit, so heisst das Element ein *constantes* Element.

Wir gehen über zu *körperlichen* Stromelementen. Man denke sich in einem *starren* Körper M irgend welche elektrische Bewegungen. Ferner denke man sich irgendwo im Innern des Körpers M ein kleines Flächenelement $D\varkappa$ construirt, senkrecht gegen die daselbst vorhandene elektrische Bewegung. Bezeichnet man nun die durch dieses Element $D\varkappa$ während der Zeit dt hindurchfliessende Elektricitätsmenge mit

$$iD\varkappa\, dt,$$

so pflegt der Factor i die an jener Stelle vorhandene *Strömungsstärke*, oder auch kurzweg die daselbst vorhandene *Strömung* genannt zu werden*).

Bezeichnet man den Ort der kleinen Fläche $D\varkappa$ mit (x, y, z) und denkt man sich die Strömung i geometrisch dargestellt als eine von diesem Punkt (x, y, z) ausgehende Linie von bestimmter Richtung und Länge, so werden die rechtwinkligen Componenten u, v, w dieser Linie i im Allgemeinen Functionen von x, y, z und von t sein, wo t die Zeit vorstellt.

Man betrachte nun irgend ein Massenelement DM des Körpers M, und denke sich dieses Element (welches übrigens von beliebiger Gestalt sein kann) so klein, dass die Werthe von u, v, w für alle innerhalb

---

*) Auch pflegt man das Product $iD\varkappa$ die dem Element $D\varkappa$ zugehörige *Stromstärke* zu nennen. Bezeichnet man diese Stromstärke mit J, so ist offenbar die so entstehende Formel $J = iD\varkappa$ völlig analog mit der Formel Seite 56 (2).



des Elementes gelegenen Punkte (x, y, z) als gleich gross anzusehen sind. Alsdann pflegt man dieses Element DM mit seinen Strömungscomponenten u, v, w kurzweg ein *körperliches Stromelement* zu nennen. Dasselbe wird *constant* heissen, wenn seine Strömungscomponenten u, v, w unabhängig von der Zeit t sind. Dabei ist indessen stillschweigend vorausgesetzt worden, jene drei aufeinander senkrechten Axen, nach denen die Componenten u, v, w gebildet sind, seien fest eingefügt in die ponderable Masse des gegebenen starren Körpers M.

Kommen also z. B. *mehrere* starre Körper in Betracht, so wird man sich ebenso viele Axensysteme zu denken haben, als Körper vorhanden sind. Und in solchem Falle wird es offenbar, wenn etwa die gegenseitigen elektrodynamischen Einwirkungen dieser Körper zu untersuchen sind, angemessen sein, all' diese Axensysteme auf ein einziges zu reduciren.

So entsteht also das Bedürfniss, die in einem Körper vorhandenen elektrischen Strömungen nicht auf ein dem Körper eingefügtes, sondern auf irgend ein *fremdes* Axensystem zu beziehen. Alsdann aber kommen zweierlei Bewegungen in Betracht, nämlich *erstens* die Bewegung des gegebenen Körpers d. i. die Bewegung seiner ponderablen Masse, und *zweitens* die Bewegung der im Innern des Körpers vorhandenen elektrischen Materie, beide Bewegungen bezogen gedacht auf jenes fremde Axensystem. Beim Eintritt in die Untersuchungen des gegenwärtigen Abschnittes wird es gut sein, der Reihe nach zuerst die eine, und sodann die andre Bewegung näher ins Auge zu fassen.

Nach Absolvirung dieser mehr oder weniger elementaren Präliminarien werden wir [auf Seite 129] gewisse allgemeine Axiome der Elektrodynamik einer genaueren Betrachtung unterwerfen, und sodann erst [auf Seite 130] in den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung in systematischer Weise hineingehen.

Und zwar handelt es sich darum — dies ist die eigentliche Aufgabe des gegenwärtigen Abschnitts —, die in den vorigen Abschnitten für lineare Stromelemente gefundenen Gesetze und Formeln auf körperliche Stromelemente zu übertragen.

Nun sind aber, wie leicht zu übersehen ist, *lineare* Stromelemente und *körperliche* Stromelemente ganz heterogene Dinge*), so dass also die in Rede stehende Uebertragung nur möglich ist auf Grund irgend welcher hypothetischen Annahme. Die von uns in dieser Beziehung adoptirte Hypothese wird kurzweg mit *Delta* bezeichnet werden.

*) Näheres hierüber findet man auf Seite 131.

§ 1.

Die Elementarbewegungen eines starren Körpers.

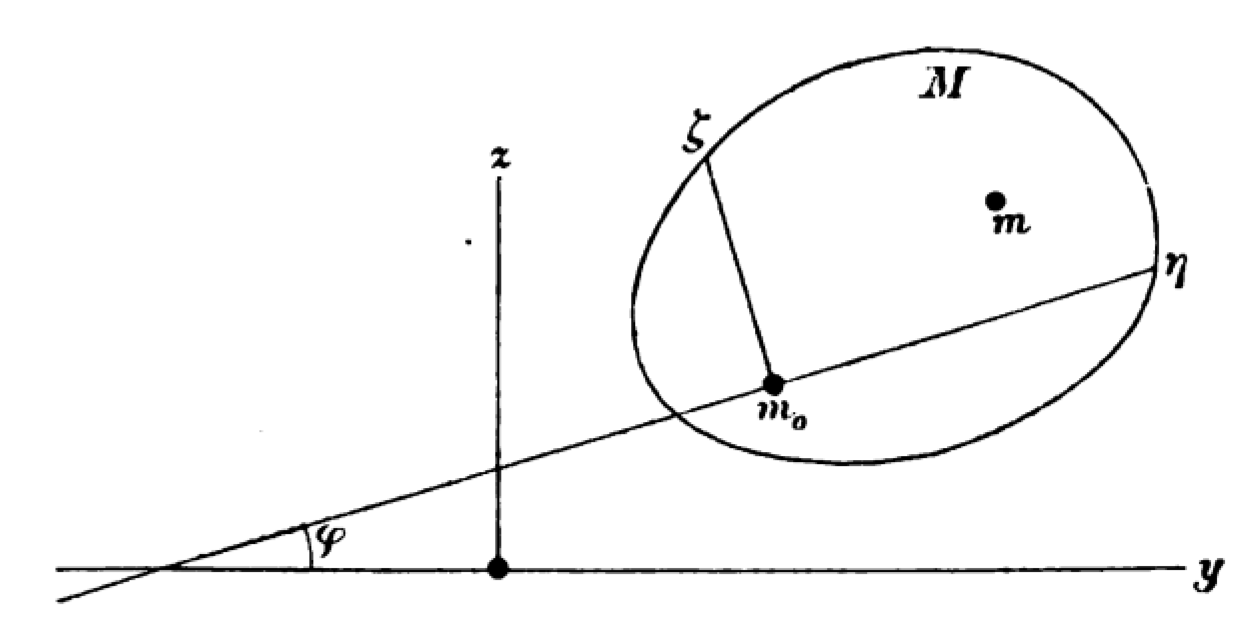
Es seien m_0 und m zwei *Molecüle* (d. i. zwei ponderable Massenpunkte) eines starren Körpers M. Ferner seien x_0, y_0, z_0 und x, y, z die Coordinaten dieser Molecüle in Bezug auf irgend ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$. *Lässt man nun den Körper M in der Richtung der x-Axe um eine unendlich kleine Strecke sich verschieben*, so werden für diese Verschiebung offenbar folgende Formeln gelten:

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} dx = dx_0, \\ dy = 0, \\ dz = 0, \end{cases}$$

wo dx_0 als die *Grösse der Verschiebung* bezeichnet werden kann.

Formeln von ähnlicher Einfachheit gelten für die *drehende* Bewegung. In die ponderable Masse des Körpers M sei ein Axensystem $[\xi, \eta, \zeta]$ eingefügt, dessen Anfangspunkt im Molecül $m_0(x_0, y_0, z_0)$ liegt. Und die Coordinaten irgend eines andern Molecüls $m(x, y, z)$ in Bezug auf dieses neue Axensystem seien bezeichnet mit ξ, η, ζ. Ueberdies mag *die ξ-Axe parallel der x-Axe* gedacht werden. Alsdann ergeben sich sofort die Formeln:

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \xi, \\ y = y_0 + \eta \cos\varphi - \zeta \sin\varphi, \\ z = z_0 + \eta \sin\varphi + \zeta \cos\varphi, \end{cases}$$



wo φ den Neigungswinkel der $\xi\eta$-Ebene gegen die xy-Ebene bezeichnet.

Lässt man nun den starren Körper M um die ξ-Axe sich drehen, nämlich den Winkel φ um $d\varphi$ anwachsen, und beachtet man, dass die Coordinaten ξ, η, ζ des Molecüls m (in Folge der Starrheit des Körpers) unveränderlich sind, so erhält man für die dieser Drehung entsprechenden Zuwüchse dx, dy, dz aus den Formeln (B.) folgende Werthe:

$$(\Gamma.)\quad \begin{cases} dx = 0, \\ dy = -(\eta \sin\varphi + \zeta \cos\varphi)\, d\varphi, \\ dz = +(\eta \cos\varphi - \zeta \sin\varphi)\, d\varphi. \end{cases}$$

Diese Werthe aber kann man mit Rücksicht auf (B.) auch so schreiben:

$$(\Delta.)\quad \begin{cases} dx = 0, \\ dy = -(z - z_0)\, d\varphi, \\ dz = +(y - y_0)\, d\varphi. \end{cases}$$

Um die Hauptsache hervorzuheben: Ebenso wie die Formeln (A.) *auf eine* ***translatorische*** *Bewegung sich beziehen, in ähnlicher Weise gelten die Formeln* (Δ.) *für eine* ***rotirende*** *Bewegung. Und zwar ist bei diesen Formeln* (Δ.) *von einer Rotationsaxe die Rede, welche zur x-Axe parallel ist, und durch den Punkt $m_0(x_0, y_0, z_0)$ hindurchgeht. Dabei bezeichnet $d\varphi$ denjenigen Winkel, um welchen der Körper um diese Axe* ***im Sinne*** *yz sich dreht.*

§ 2.

Ueber ganz beliebige Bewegungen eines starren Körpers.

In die ponderable Masse des starren Körpers M sei ein rechtwinkliges Axensystem $[\xi, \eta, \zeta]$ eingefügt, dessen Anfangspunkt im Molecül $m_0(x_0, y_0, z_0)$ liegt. Und die Coordinaten irgend eines andern Molecüls $m(x, y, z)$ in Bezug auf dieses neue Axensystem seien mit ξ, η, ζ bezeichnet; so dass also folgende bekannte Formeln gelten werden:

$$(1.)\quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha'\xi + \alpha''\eta + \alpha'''\zeta, \\ y = y_0 + \beta'\xi + \beta''\eta + \beta'''\zeta, \\ z = z_0 + \gamma'\xi + \gamma''\eta + \gamma'''\zeta, \end{cases}$$

wo $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ und $\alpha''', \beta''', \gamma'''$ die Richtungscosinus der neuen Axen ξ, η und ζ im System $[x, y, z]$ bezeichnen.

Denkt man sich nun den Körper M in Bezug auf das Axensystem $[x, y, z]$ ***in ganz beliebiger Bewegung*** *begriffen,* so werden jene Richtungscosinus, sowie auch die Coordinaten x, y, z und x_0, y_0, z_0 sich ändern, während die Coordinaten ξ, η, ζ (in Folge der Starrheit

des Körpers) constant bleiben. Somit ergeben sich aus (1.) für irgend ein Zeitelement dt der in Rede stehenden Bewegung folgende Differentialformeln:

$$(2.)\quad \begin{cases} dx = dx_0 + \xi\, d\alpha' + \eta\, d\alpha'' + \zeta\, d\alpha''', \\ dy = dy_0 + \xi\, d\beta' + \eta\, d\beta'' + \zeta\, d\beta''', \\ dz = dz_0 + \xi\, d\gamma' + \eta\, d\gamma'' + \zeta\, d\gamma'''. \end{cases}$$

Substituirt man in der ersten dieser drei Formeln für ξ, η, ζ die aus (1.) entspringenden Ausdrücke:

$$\xi = \alpha'\ (x - x_0) + \beta'\ (y - y_0) + \gamma'\ (z - z_0),$$
$$\eta = \alpha''\ (x - x_0) + \beta''\ (y - y_0) + \gamma''\ (z - z_0),$$
$$\zeta = \alpha'''(x - x_0) + \beta'''(y - y_0) + \gamma'''(z - z_0),$$

so erhält man sofort:

$$(3.)\quad dx = dx_0 + (y - y_0)(\beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' + \beta''' d\alpha''') + (z - z_0)(\gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' + \gamma''' d\alpha''').$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung:

$$(4.)\quad \begin{cases} d\mathfrak{a} = \beta' d\gamma' + \beta'' d\gamma'' + \beta''' d\gamma''' = -(\gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' + \gamma''' d\beta'''), \\ d\mathfrak{b} = \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' + \gamma''' d\alpha''' = -(\alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' + \alpha''' d\gamma'''), \\ d\mathfrak{c} = \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta'' + \alpha''' d\beta''' = -(\beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' + \beta''' d\alpha'''), \end{cases}$$

so verwandelt sich die Gleichung (3.) in die erste Formel folgenden Systems:

$$(5.)\quad \begin{cases} dx = dx_0 + (z - z_0)\, d\mathfrak{b} - (y - y_0)\, d\mathfrak{c}, \\ dy = dy_0 + (x - x_0)\, d\mathfrak{c} - (z - z_0)\, d\mathfrak{a}, \\ dz = dz_0 + (y - y_0)\, d\mathfrak{a} - (x - x_0)\, d\mathfrak{b}, \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind.

Diese Formeln (5.) können offenbar auch so geschrieben werden:

$$dx = [dx_0 + 0 + 0] + [+ \quad 0 \quad + (z - z_0)\, d\mathfrak{b} - (y - y_0)\, d\mathfrak{c}],$$
$$dy = [0 + dy_0 + 0] + [-(z - z_0)\, d\mathfrak{a} + \quad 0 \quad + (x - x_0)\, d\mathfrak{c}],$$
$$dz = [0 + 0 + dz_0] + [+(y - y_0)\, d\mathfrak{a} - (x - x_0)\, d\mathfrak{b} + \quad 0 \quad].$$

Hier befinden sich rechter Hand im Ganzen sechs Vertikalreihen. Und diesen sechs Vertikalreihen entsprechend ist die von uns betrachtete dem Zeitelement dt entsprechende Bewegung zerlegbar in folgende sechs Elementarbewegungen:

$$(A.)\ \begin{cases} dx = dx_0, \\ dy = 0, \\ dz = 0, \end{cases} \qquad (B.)\ \begin{cases} dx = 0, \\ dy = dy_0 \\ dz = 0, \end{cases} \qquad (C.)\ \begin{cases} dx = 0, \\ dy = 0, \\ dz = dz_0, \end{cases}$$

$$(D.)\ \begin{cases} dx = 0, \\ dy = -(z - z_0)\, d\mathfrak{a}, \\ dz = +(y - y_0)\, d\mathfrak{a}, \end{cases} \quad (E.)\ \begin{cases} dx = +(z - z_0)\, d\mathfrak{b}, \\ dy = 0, \\ dz = -(x - x_0)\, d\mathfrak{b}, \end{cases} \quad (F.)\ \begin{cases} dx = -(y - y_0)\, d\mathfrak{c}, \\ dy = +(x - x_0)\, d\mathfrak{c}, \\ dz = 0. \end{cases}$$

Die Formeln (A.), (B.), (C.) sind analog unsern früheren Formeln (A.) Seite 120. Andrerseits sind die Formeln (D.), (E.), (F.) analog zu den Formeln (Δ.) Seite 121; dabei entspricht z. B. das in (D.) enthaltene $d\mathfrak{a}$ dem in (Δ.) befindlichem $d\varphi$.

Wir sehen somit, dass die von uns betrachtete Bewegung (5.) zerlegbar ist in drei *translatorische* Bewegungen (A.), (B.), (C.), und in drei *Rotations*bewegungen (D.), (E.), (F.). Dabei wird z. B., was die Bewegung (D.) betrifft, die kleine Grösse $d\mathfrak{a}$ [das frühere $d\varphi$, vgl. (Δ.)] denjenigen Winkel vorstellen, um welchen der Körper M um eine zur x-Axe parallel laufende und durch $m_0(x_0, y_0, z_0)$ hindurchgehende Drehungsaxe *im Sinne* yz während der Zeit dt sich dreht. Analoges gilt von $d\mathfrak{b}$ und $d\mathfrak{c}$ mit Bezug auf die Bewegungen (E.) und (F.).

Uebrigens sind die für $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ angegebenen Ausdrücke (4.) von x_0, y_0, z_0 völlig unabhängig. Hätte man also, an Stelle des Moleculs $m_0(x_0, y_0, z_0)$ irgend ein *anderes* Molecül $\bar{m}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ auserwählt, so würden trotzdem für jene $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ genau dieselben Werthe sich ergeben haben, wie gegenwärtig. Demgemäss kann z. B. $d\mathfrak{a}$ bezeichnet werden als die Drehung des Körpers um eine *beliebige* zur x-Axe parallele Axe, oder auch als die Drehung des Körpers um die x-Axe selber. Man gelangt somit zu folgendem Satz:

Erster Satz. — *Ist ein starrer Körper M in Bezug auf ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$ in beliebiger Bewegung begriffen, und sind $m_0(x_0, y_0, z_0)$ und $m(x, y, z)$ irgend zwei Molecüle des Körpers, so gelten für jedwedes Zeitelement dt Formeln von folgender Gestalt:*

$$(6.)\qquad \begin{cases} dx = dx_0 + (z - z_0)\,d\mathfrak{b} - (y - y_0)\,d\mathfrak{c}, \\ dy = dy_0 + (x - x_0)\,d\mathfrak{c} - (z - z_0)\,d\mathfrak{a}, \\ dz = dz_0 + (y - y_0)\,d\mathfrak{a} - (x - x_0)\,d\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Hier sind dx_0, dy_0, dz_0 als die der Zeit dt entsprechenden Verschiebungen des Körpers in den Richtungen der drei Coordinatenaxen x, y, z zu bezeichnen. Andrerseits sind $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ zu bezeichnen als die der Zeit dt entsprechenden Drehungen des Körpers um jene Axen x, y, z, oder auch um irgend drei andere Axen x', y', z', die zu jenen parallel sind.

Und zwar wird z. B. $d\mathfrak{a}$ die Drehung des Körpers um die Axe x im Sinne yz, oder seine Drehung um die Axe x' im Sinne $y'z'$ zu nennen sein. Analoges gilt für $d\mathfrak{b}$ und $d\mathfrak{c}$. Ebenso nämlich wie $d\mathfrak{a}$ im Sinne yz (oder $y'z'$) gerechnet ist, ebenso wird $d\mathfrak{b}$ im Sinne zx (oder $z'x'$) und $d\mathfrak{c}$ im Sinne xy (oder $x'y'$) gerechnet zu denken sein.

Bezeichnet man die gerade Linie $m_0 m$ mit λ, und ihre Componenten mit α, β, γ:

$$\alpha = x - x_0, \quad \beta = y - y_0, \quad \gamma = z - z_0,$$

so gehen die Formeln (6.) über in:

$$\begin{cases} d\alpha = \gamma d\mathfrak{b} - \beta d\mathfrak{c}, \\ d\beta = \alpha d\mathfrak{c} - \gamma d\mathfrak{a}, \\ d\gamma = \beta d\mathfrak{a} - \alpha d\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Demgemäss ergiebt sich folgender Satz:

Zweiter Satz. — *Man halte fest an den Vorstellungen und Bezeichnungen des vorigen Satzes, und bezeichne überdies die gerade Linie $m_0 m$ mit λ, und die rechtwinkligen Componenten*) derselben mit α, β, γ. Alsdann gelten für jedwedes Zeitelement dt die Formeln:*

$$(7.) \qquad \begin{cases} d\alpha = \gamma d\mathfrak{b} - \beta d\mathfrak{c}, \\ d\beta = \alpha d\mathfrak{c} - \gamma d\mathfrak{a}, \\ d\gamma = \beta d\mathfrak{a} - \alpha d\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind, falls man $\alpha + d\alpha = \mathsf{A}$, $\beta + d\beta = \mathsf{B}$ und $\gamma + d\gamma = \Gamma$ setzt, auch so darstellbar:

$$(7\text{a.}) \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \alpha + \gamma d\mathfrak{b} - \beta d\mathfrak{c}, \\ \mathsf{B} = \beta + \alpha d\mathfrak{c} - \gamma d\mathfrak{a}, \\ \Gamma = \gamma + \beta d\mathfrak{a} - \alpha d\mathfrak{b}, \end{cases}$$

wo alsdann α, β, γ und A, B, Γ die Werthe der in Rede stehenden Componenten in den Augenblicken t und $t + dt$ vorstellen.

§ 3.

Die Componenten der elektrischen Strömung.

Nach wie vor sei der starre Körper M in Bezug auf das rechtwinklige Axensystem $[x, y, z]$ in *beliebiger Bewegung* begriffen. Ueberdies aber wollen wir uns vorstellen, dass innerhalb des Körpers irgend welche von Augenblick zu Augenblick sich ändernde *elektrische Bewegungen* stattfinden.

Die im Elemente DM im Augenblick t vorhandene elektrische Strömung i oder

$$(8.) \qquad u, \quad v, \quad w$$

wird alsdann während des nächstfolgenden Zeitelementes dt im Allgemeinen aus *doppeltem Grunde* sich ändern, nämlich erstens deswegen, weil sie während dieser Zeit im Innern des Körpers ihre Richtung und Stärke ändert, zweitens aber auch deswegen, weil die relative Lage des

*) Besitzt die Linie $\lambda = m_0 m$ die Länge *Eins*, so sind offenbar ihre rechtwinkligen Componenten nichts Andres als ihre Richtungscosinus.

Körpers zu jenem Axensystem $[x, y, z]$ während der Zeit dt eine andere wird.

Am Bequemsten werden wir die im Augenblick $t + dt$ vorhandene Strömung

$$U = u + du, \quad V = v + dv, \quad W = w + dw \tag{9.}$$

dadurch erhalten, dass wir jene beiderlei Aenderungen einzeln, eine *nach* der andern vor sich gehen lassen.

Dabei mag der Anschaulichkeit willen, die elektrische Strömung im Elemente DM in jedem Augenblick geometrisch dargestellt gedacht werden, durch eine von DM ausgehende gerade Linie von entsprechender Richtung und Länge. Die im Augenblick t zu denkende Linie (8.):

$$u, \quad v, \quad w$$

wird, falls man die der Zeit dt entsprechenden *innern* Vorgänge sich vollziehen lässt, die relative Lage des Körpers zum Axensystem $[x, y, z]$ einstweilen aber constant erhält, übergehen in eine gewisse andere Linie

$$u + \Delta u, \quad v + \Delta v, \quad w + \Delta w.$$

Und diese letztere Linie wird, falls man nun nachträglich die relative Lagenveränderung des Körpers zum Axensystem $[x, y, z]$ sich vollziehen lässt, übergehen in diejenige Linie:

$$U, \quad V, \quad W,$$

von welcher schon in (9.) die Rede war.

Auf die beiden letzten Linien $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ und U, V, W sind, wie man sofort übersieht, die Formeln (7a.) anwendbar. Man erhält in solcher Weise:

$$\begin{aligned}
U &= (u + \Delta u) + (w + \Delta w)\,d\mathfrak{b} - (v + \Delta v)\,d\mathfrak{c},\\
V &= (v + \Delta v) + (u + \Delta u)\,d\mathfrak{c} - (w + \Delta w)\,d\mathfrak{a},\\
W &= (w + \Delta w) + (v + \Delta v)\,d\mathfrak{a} - (u + \Delta u)\,d\mathfrak{b},
\end{aligned}$$

oder unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
U &= (u + \Delta u) + w\,d\mathfrak{b} - v\,d\mathfrak{c},\\
V &= (v + \Delta v) + u\,d\mathfrak{c} - w\,d\mathfrak{a},\\
W &= (w + \Delta w) + v\,d\mathfrak{a} - u\,d\mathfrak{b},
\end{aligned}$$

oder, falls man für U, V, W die Werthe (9.) einsetzt:

$$\left\{\begin{aligned}
du &= \Delta u + w\,d\mathfrak{b} - v\,d\mathfrak{c},\\
dv &= \Delta v + u\,d\mathfrak{c} - w\,d\mathfrak{a},\\
dw &= \Delta w + v\,d\mathfrak{a} - u\,d\mathfrak{b}.
\end{aligned}\right. \tag{10.}$$

Diesen Formeln (10.) geben wir die Gestalt:

$$(11.)\qquad \begin{cases} du = \Delta u + \delta u, \\ dv = \Delta v + \delta v, \\ dw = \Delta w + \delta w, \end{cases}$$

wo alsdann δu, δv, δw als Abbreviaturen anzusehen sind für folgende Ausdrücke:

$$(11a.)\qquad \begin{cases} \delta u = w d\mathfrak{b} - v d\mathfrak{c}, \\ \delta v = u d\mathfrak{c} - w d\mathfrak{a}, \\ \delta w = v d\mathfrak{a} - u d\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Die während der Zeit dt in Wirklichkeit *stattfindenden Zuwüchse du, dv, dw sind durch die Formeln* (11.) *in zweierlei Theile zerlegt, nämlich in Δu, Δv, Δw einerseits, und in δu, δv, δw andrerseits.*

Die Theile Δu, Δv, Δw können bezeichnet werden als die endogenen *Theile, insofern, als sie herrühren von den Vorgängen im Innern des Körpers.*

Andererseits werden die δu, δv, δw zu bezeichnen sein als die convectiven *Theile. Denn diese δu, δv, δw repräsentiren diejenige Aenderung, welche die Linie $i(u, v, w)$ während der Zeit dt erleiden würde, falls man sie an der Bewegung des Körpers theilnehmen lassen wollte, ohne dabei ihre Lage im Innern des Körpers irgendwie zu ändern*).*

Alles zusammengefasst, kann man also sagen, dass die wirklichen *Zuwüchse du, dv, dw im Allgemeinen in* gemischter *Weise entstehen, theils* endogen, *theils* convectiv.

Andere Methode der Untersuchung. — Man benutze, ebenso wie in (1.), neben dem Axensystem $[x, y, z]$ noch ein dem gegebenen Körper M eingefügtes Axensystem $[\xi, \eta, \zeta]$. Ist nun i die elektrische Strömung im Elemente DM, und bezeichnet man die Componenten dieser Strömung i mit Bezug auf jene Axen $[x, y, z]$ und $[\xi, \eta, \zeta]$ respective mit u, v, w und $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, so finden die Relationen statt:

$$(12.)\qquad \begin{cases} u = \alpha'\bar{u} + \alpha''\bar{v} + \alpha'''\bar{w}, \\ v = \beta'\bar{u} + \beta''\bar{v} + \beta'''\bar{w}, \\ w = \gamma'\bar{u} + \gamma''\bar{v} + \gamma'''\bar{w}, \end{cases}$$

wo die α, β, γ dieselben Bedeutungen haben, wie in (1.). Demgemäss wird z. B. der Zuwachs von u während der Zeit dt den Werth haben:

$$(13.)\qquad du = (\alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}) + (\bar{u} d\alpha' + \bar{v} d\alpha'' + \bar{w} d\alpha''').$$

---

*) Sehr deutlich ergiebt sich dies z. B. aus den Formeln (11.). Denn nach (11.) repräsentiren die δu, δv, δw diejenigen Werthe, welche die du, dv, dw annehmen würden, falls man die endogenen Aenderungen Δu, Δv, Δw alle $= 0$ sich denken wollte.

Substituirt man aber hier in (13.) für $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die aus (12.) entspringenden Ausdrücke:

$$\bar{u} = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w,$$
$$\bar{v} = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w,$$
$$\bar{w} = \alpha''' u + \beta''' v + \gamma''' w,$$

so erhält man sofort:

$$(14.) \quad du = (\alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}) + \\ + v(\beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' + \beta''' d\alpha''') + w(\gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' + \gamma''' d\alpha''').$$

Und hieraus ergiebt sich, unter Anwendung der in (4.) eingeführten Bezeichnungen, die erste Formel folgenden Systems:

$$(15.) \quad \begin{cases} du = (\alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}) + (w d\mathfrak{b} - v d\mathfrak{c}), \\ dv = (\beta' d\bar{u} + \beta'' d\bar{v} + \beta''' d\bar{w}) + (u d\mathfrak{c} - w d\mathfrak{a}), \\ dw = (\gamma' d\bar{u} + \gamma'' d\bar{v} + \gamma''' d\bar{w}) + (v d\mathfrak{a} - u d\mathfrak{b}), \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind.

Diese Formeln (15.) kann man schliesslich auch so schreiben:

$$(16.) \quad \begin{cases} du = \Delta u + \delta u, \\ dv = \Delta v + \delta v, \\ dw = \Delta w + \delta w, \end{cases}$$

wo alsdann Δu, Δv, Δw und δu, δv, δw folgende Bedeutungen haben:

$$(16\text{a.}) \quad \begin{cases} \Delta u = \alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}, \\ \Delta v = \beta' d\bar{u} + \beta'' d\bar{v} + \beta''' d\bar{w}, \\ \Delta w = \gamma' d\bar{u} + \gamma'' d\bar{v} + \gamma''' d\bar{w}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta u = w d\mathfrak{b} - v d\mathfrak{c}, \\ \delta v = u d\mathfrak{c} - w d\mathfrak{a}, \\ \delta w = v d\mathfrak{a} - u d\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Diese Formeln (16.), (16a.) *sind im Wesentlichen identisch mit den früheren Formeln* (11.), (11a.). *Namentlich sind, ebenso wie dort,* du, dv, dw *die wirklichen Zuwüchse, ferner* Δu, Δv, Δw *die endogenen Zuwüchse, und endlich* δu, δv, δw *die convectiven Zuwüchse.* Noch sei hervorgehoben, dass die bisherigen Formeln sich alle auf ein ganz beliebiges rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$ beziehen.

Specieller Fall. — Wesentlich einfacher gestalten sich die Formeln, wenn man das Axensystem $[x, y, z]$ mit der ponderablen Masse des gegebnen Körpers M sich starr verbunden vorstellt, was nach unseren Festsetzungen (Seite 75) anzudeuten sein wird durch das Symbol

$$\boxed{M[x, y, z]}.$$

Alsdann nämlich sind die Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, welche der Körper um die Axen x, y, z macht, alle $= 0$; so dass also in diesem Falle die Formeln (16.), (16a.) übergehen in:

$$(17.)\qquad \begin{cases} du = \Delta u + \delta u, \\ dv = \Delta v + \delta v, \\ dw = \Delta w + \delta w, \end{cases}$$

und in:

$$(17\text{a.})\qquad \begin{cases} \Delta u = \alpha' d\bar{u} + \alpha'' d\bar{v} + \alpha''' d\bar{w}, \\ \Delta v = \beta' d\bar{u} + \beta'' d\bar{v} + \beta''' d\bar{w}, \\ \Delta w = \gamma' d\bar{u} + \gamma'' d\bar{v} + \gamma''' d\bar{w}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta u = 0, \\ \delta v = 0, \\ \delta w = 0. \end{cases}$$

Aus der grossen Verschiedenheit, welche diese Formeln (17.), (17a.) gegenüber den früheren Formeln (16.), (16a.) zeigen, geht deutlich hervor, wie nothwendig es ist, über die Situation des jedesmaligen Axensystems nähere Angaben zu machen.

§ 4.

Die Zerlegung eines zeitlichen Zuwachses in seinen endogenen und in seinen convectiven Theil.

Es sei gegeben ein System von beliebig vielen starren Körpern. Diese Körper seien in beliebigen Bewegungen begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden solchen Körpers irgend welche elektrische Bewegungen stattfinden, so dass also die Beschaffenheit des Systems aus *doppeltem Grunde* von Augenblick zu Augenblick sich ändert, nämlich erstens in Folge der Bewegung der ponderablen Massen, und zweitens in Folge der im Innern dieser ponderablen Massen stattfindenden elektrischen Vorgänge.

Es sei nun f irgend eine Function der augenblicklichen Beschaffenheit des Systems. Ferner seien f und $f + df$ die Werthe dieser Function in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$. Alsdann wird man den Zuwachs df dadurch erhalten können, dass man zuerst (unter Sistirung der ponderablen Bewegungen) nur die der Zeit dt entsprechenden elektrischen Vorgänge sich vollziehen lässt, sodann aber zweitens die der Zeit dt entsprechenden ponderablen Bewegungen ebenfalls zur Ausführung bringt. Bezeichnet man diese beiden Theile des Zuwachses df respective mit Δf und δf, so ist offenbar:

$$(18.)\qquad df = \Delta f + \delta f.$$

Umgekehrt wird man offenbar den Zuwachs df auch in der Weise bilden können, dass man zuerst (unter Sistirung der innern elektrischen Aenderungen) die der Zeit dt entsprechenden ponderablen Bewegungen eintreten lässt, und hierauf jene der Zeit dt entsprechenden elektrischen



Vorgänge ebenfalls sich vollziehen lässt. Dementsprechend würde man alsdann zu schreiben haben:

(19.) $$df = \delta f + \Delta f.$$

Von den beiden Theilen, in welche df durch (18.) oder (19.) zerlegt ist, wird Δf als der *endogene*, und δf als der *convective* Theil zu bezeichnen sein.

Uebrigens können wir uns eine Function f denken, welche nur von den *Lagen der ponderablen Massen* abhängt (von den innern elektrischen Vorgängen aber unabhängig ist). Alsdann ist offenbar:

(20.) $$\Delta f = 0,$$

also nach (19.):

(20a.) $$df = \delta f.$$

Umgekehrt werden wir uns eine Function f vorstellen können, welche nur von den *innern elektrischen Vorgängen* abhängt (von der Lage der ponderablen Massen aber unabhängig ist). Alsdann ist offenbar:

(21.) $$\delta f = 0,$$

mithin nach (19.):

(21a.) $$df = \Delta f.$$

Der *wirkliche* Zuwachs df ist, wie die Generalformel (19.) zeigt, im Allgemeinen ein *gemischter*, nämlich theils endogenen, theils convectiven Ursprungs. Hingegen wird derselbe im Specialfall (20.), (20a.) ein *blos convectiver*, und andererseits im Specialfall (21.), (21a.) ein *blos endogener* sein.

§ 5.

Zwei allgemeine Axiome über die Wirkung der elektromotorischen Kräfte.

Erstes allgemeines Axiom. — *Die durch einen gegebnen Inducenten in irgend einem Punkt des inducirten Körpers hervorgebrachte elektromotorische Kraft* $\mathfrak{R}$ *ist von der Grösse, Gestalt und Beschaffenheit dieses Körpers, sowie auch von seinem augenblicklichen Zustande völlig unabhängig.*

Wir haben hier das schon früher [Seite 76] besprochene Axiom nur von Neuem wiederholt. Nahe verwandt mit demselben ist nun folgendes

Zweites allgemeines Axiom. — *Der Inducent sei ein körperliches elektrisches Stromelement von völlig c o n s t a n t e r Beschaffenheit. Denkt man sich also in die ponderable Masse des Elementes drei aufeinander*

*senkrechte Axen eingefügt, so soll vorausgesetzt werden, dass die diesen Axen entsprechenden Strömungscomponenten des Elementes constante, d. h. von der Zeit unabhängige Werthe besitzen**).

Alsdann wird die von diesem Stromelement an der inducirten Stelle hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ *stets* $= 0$ *sein, falls man nur voraussetzt, dass die relative Lage der inducirten Stelle zum betrachteten Stromelement im Laufe der Zeit völlig ungeändert bleibt.*

Ich glaube kaum, dass man dieses zweite Axiom jemals beanstandet hat. Und dennoch leidet dasselbe an einer gewissen Unklarheit, insofern, als man nicht weiss, ob unter der inducirten Stelle ein unendlich kleines *Element* des inducirten Körpers, oder aber ein blosser *Punkt* dieses Körpers zu verstehen sei. So geringfügig diese Unterscheidung im ersten Augenblick vielleicht auch erscheinen mag, so ist sie doch bei der Anwendung des Axioms von tief einschneidender Bedeutung; wie solches schon bei früherer Gelegenheit von mir bemerkt worden ist. [Vgl. die Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1873, Seite 485, 486].

Man denke sich z. B. die ponderable Masse DM jenes inducirenden constanten Stromelementes als *ruhend,* ferner den inducirten Körper *um eine feste Axe rotirend,* und die inducirte Stelle auf dieser Rotationsaxe gelegen. Alsdann wird die relative Lage der inducirten Stelle in Bezug auf die Masse DM sich ändern oder constant bleiben, je nachdem man diese Stelle als ein unendlich kleines Körper*element,* oder aber als einen auf jener Axe gelegenen *Punkt* auffasst. Und zufolge des in Rede stehenden Axioms wird daher die an dieser Stelle inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ irgend welchen Werth haben, oder aber $= 0$ sein, jenachdem man für die erste, oder für die zweite Auffassungsweise sich entscheidet.

In Anbetracht der hier vorhandenen Unsicherheit werde ich *beide* Auffassungsweisen nebeneinander verfolgen. Zur Abkürzung mag die erste die *elementare,* die zweite die *punktuelle* genannt werden.

§ 6.

Die Hypothese Delta.

Ein *lineares Stromelement* ist das Element eines linearen Leiters, dieser Leiter durchflossen gedacht von einem elektrischen Strome, dessen Stärke eine beliebige Function der Zeit sein kann. Will man andrerseits ein *körperliches Stromelement* vor Augen haben, so hat man innerhalb

*) In genau demselben Sinne ist das Wort „constant“ auch bereits früher [Seite 119] auf elektrische Stromelemente angewendet worden.

eines starren Körpers irgend ein Massenelement abzugrenzen, und dabei vorauszusetzen, dass im Innern des Körpers beliebige und im Laufe der Zeit beliebig sich ändernde elektrische Strömungen vorhanden seien. Jenes von diesen Strömungen bald in dieser bald in jener Richtung durchzogene Massenelement ist alsdann ein sogenanntes körperliches Stromelement.

Hieraus geht hervor, dass *lineare* Stromelemente und *körperliche* Stromelemente ganz heterogene Dinge sind. Denn während die elektrische Strömung eines *linearen* Elementes in Bezug auf die ponderable Masse fortdauernd ein und dieselbe Orientirung behält [nämlich der geometrischen Axe des Elementes*) beständig parallel bleibt], wird die elektrische Strömung eines *körperlichen* Elementes ihre Orientirung in Bezug auf die ponderable Masse im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick ändern [nämlich im Innern der ponderablen Masse bald diese bald jene Richtung annehmen können].

Diese Heterogenität ist eine deutlich ins Auge fallende, obwohl bisher (ausser in den Schriften des Verfassers) kaum wohl jemals beachtet. Und in Anbetracht dieser Heterogenität erscheint es schlechterdings unmöglich, von den Elementen der einen Art auf die der andern zu schliessen, und etwa Sätze oder Formeln, die für *lineare* Elemente gefunden sind, ohne Weiteres auf *körperliche* Elemente übertragen zu wollen. Vielmehr bedarf es dazu irgend welcher hypothetischer Annahme. Die Hypothese, deren wir uns bedienen werden, liegt ziemlich nahe. Sie lautet folgendermassen:

Hypothese Delta**). — *Ein körperliches Stromelement mit der ponderablen Masse DM und der elektrischen Strömung i mag kurzweg durch iDM angedeutet sein.*

Man denke sich nun die Strömung i in drei Componenten u, v, w zerlegt nach drei aufeinander senkrechten und in die ponderable Masse des Elementes eingefügten Axen x, y, z. Alsdann soll angenommen werden, dass das Element iDM, was die zwischen ihm und irgend welchen andern Objecten stattfindenden ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen betrifft, völlig äquivalent sei mit der Gesammtheit der drei idealen Stromelemente uDM, vDM, wDM. Dabei ist z. B. unter dem idealen Element uDM dasjenige zu verstehen, in welches iDM sich verwandeln würde, falls man i durch u ersetzen wollte.

---

*) Ein lineares Stromelement hat die Gestalt eines ausserordentlich dünnen Cylinders oder Prismas. Und die Axe dieses Cylinders oder Prismas kann kurzweg die *geometrische Axe des Elementes* genannt werden; wie solches auch bereits früher [Seite 118] geschehen ist.

**) Vgl. die Bemerkung zu Ende dieses Paragraphs.



Ein solches ideales Element $u DM$ hat im Wesentlichen den Charakter eines *linearen* Stromelementes. Denn ebenso, wie die elektrische Strömung eines linearen Elementes fortdauernd seiner geometrischen Axe parallel ist, ebenso wird die elektrische Strömung u des idealen Elementes $u DM$ fortdauernd parallel bleiben mit der in die ponderable Masse dieses Elementes eingefügten x-Axe; so dass also im einen wie im andern Fall die Orientirung der elektrischen Strömung in Bezug auf die ponderable Masse constant bleibt.

Auch kann man leicht ein solches ideales Element $u DM$ in ein System von lauter linearen Stromelementen verwandeln. Zu diesem Zweck wird man dasselbe in unendlich kleine Elemente zweiter Ordnung, und zwar in lauter zur x-Axe parallele Prismata zu zerlegen haben*).

Soll nun die ponderomotorische oder elektromotorische Wirkung jenes *eigentlich gegebenen körperlichen Stromelementes* $i DM$ auf irgend ein beliebiges Object ermittelt werden, so wird man diese Wirkung zuvörderst (nach der Hypothese Delta) auf die Wirkungen der *drei idealen Elemente* $u DM$, $v DM$, $w DM$ reduciren, sodann aber diese letztern Wirkungen dadurch berechnen können, dass man jedes der drei idealen Elemente (durch Zerlegung) in ein System von *lauter linearen Elementen* verwandelt; — wie solches in den folgenden Paragraphen näher dargelegt werden soll.

Bemerkung. — Die Hypothese Delta ist bereits in meiner ersten Publication über diese Gegenstände, nämlich in den Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., 1872, Seite 162 mit (δ.) bezeichnet worden. Sodann ist dieselbe von Neuem von mir wiederholt worden im ersten Theil des vorliegenden Werkes, auf Seite 169.

Ich glaube kaum, dass diese Hypothese Delta irgendwie beanstandet werden wird. Sollte das aber der Fall sein, so müsste, um den Uebergang von linearen zu körperlichen Stromelementen zu ermöglichen, irgend welche andere Hypothese ausgedacht werden, — es sei denn, dass man etwa ein bestimmtes Grundgesetz, wie z. B. das Weber'sche, zum Fundament der Betrachtung nehmen wollte, was dann aber doch ebenfalls nur eine Hypothese sein würde.

Uebrigens ist die Hypothese Delta durchaus *keine neue*, und stillschweigend wohl schon recht häufig benutzt worden. Wahrscheinlich hat *Kirchhoff* [Ges. Abh. Seite 155] dieselbe bereits im Jahre 1857 angewendet, obwohl sich darüber, in Folge der Kürze der betreffenden Kirchhoff'schen

---

*) Uebrigens kann man das Element DM auch von vornherein in solcher Weise abgrenzen, dass dasselbe nichts Anderes ist als ein unendlich dünnes der x-Axe paralleles Prisma. Alsdann würde das ideale Element $u DM$ (ohne dass es irgend welcher Zerlegung bedürfte) geradezu als ein *lineares* Stromelement zu bezeichnen sein.

Darlegungen, nichts wirklich Bestimmtes sagen lässt. Sicherlich aber hat *Helmholtz* der Hypothese Delta sich bedient. Denn sonst würde es ihm in seiner berühmten Abhandlung vom Jahre 1870 ganz unmöglich gewesen sein, die nur für *lineare* Ströme von F. Neumann aufgestellten Gesetze auf *körperliche* Leiter zu übertragen.

§ 7.

Ueber die von einem körperlichen Stromelement hervorgebrachte elektromotorische Kraft.

Es seien gegeben ein *dünner Draht M*, und überdies irgend ein *starrer Körper* M_1, in dessen ponderable Masse ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$ eingefügt ist. Diese beiden Objecte

$$(1.)\qquad M \quad \text{und} \quad \boxed{M_1[x, y, z]}$$

seien in ganz beliebigen und voneinander unabhängigen Bewegungen begriffen. Ueberdies seien im Drahte M und im Körper M_1 irgend welche elektrische Bewegungen vorhanden.

Für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper mögen nun folgende Bezeichnungen eingeführt sein:

$$(2.)\qquad \begin{array}{l} DM,\ x,\ y,\ z,\ Ds,\ J, \\ DM_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ D\tau_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1. \end{array}$$

Es sollen nämlich Ds und J die Länge des Drahtelementes DM und die in ihm vorhandene Stromstärke vorstellen. Andrerseits sollen $D\tau_1$ und i_1 das Volumen des Elementes DM_1 und die darin vorhandene elektrische Strömung bezeichnen. Ferner sollen u_1, v_1, w_1 die Componenten von i_1 sein. Endlich sollen x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der Elemente DM und DM_1 bezeichnen.

Es handelt sich nun darum, diejenige elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ *zu finden, welche von dem körperlichen Stromelement* $i_1 DM_1(D\tau_1)$ *im linearen Elemente* $JDM(Ds)$, *und zwar in der Richtung* Ds *hervorgebracht wird.*

Nach unserer Hypothese Delta (Seite 131) ist das körperliche Element $i_1 DM_1$ ersetzbar durch die drei idealen Elemente $u_1 DM_1$, $v_1 DM_1$, $w_1 DM_1$. Um nun zuvörderst die Wirkung des idealen Elementes $u_1 DM_1$ zu finden, zerlegen wir dasselbe parallel der x-Axe in lauter unendlich dünne Prismata (p_1), und bezeichnen Länge und Querschnitt eines solchen Prismas (p_1) mit Ds_1 und q_1; so dass also die in dem Prisma (p_1) vorhandene Stromstärke $J_1 = q_1 u_1$ ist. Alsdann wird die von diesem Prisma (p_1) in jenem linearen Stromelement JDs in der Richtung Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}^{(p_1)}$ der Formel (21.) Seite 88 entsprechen, mithin den Werth haben:



$$(3.)\quad \mathfrak{E}^{(p_1)}dt = u_1 q_1 Ds_1 \left\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E}\right\} + (du_1) q_1 Ds_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}].$$

Das Volumen $D\tau_1$ des Elementes DM_1 ist unendlich klein; so dass also jene Prismata (p_1), in welche DM_1 zerlegt ist, alle einander unendlich nahe liegen. Die den einzelnen Prismaten (p_1) zugehörigen Formeln (3.) sind also nur allein dadurch voneinander verschieden, dass der Factor $q_1 Ds_1$ von Formel zu Formel eine andere Bedeutung hat, nämlich das Volumen des jedesmaligen Prismas repräsentirt. Durch Addition all' dieser Formeln (3.) gelangt man daher zu einer Formel von analoger Gestalt, in welcher jedoch $\mathfrak{E}^{(p_1)}$ und $q_1 Ds_1$ vertreten sein werden durch die betreffenden Summen:

$$\sum \mathfrak{E}^{(p_1)} \quad \text{und} \quad \sum q_1 Ds_1 = D\tau_1.$$

Die erste dieser Summen repräsentirt alsdann offenbar diejenige elektromotorische Kraft, welche von all' jenen Prismaten (p_1) zusammengenommen, d. i. von dem ganzen idealen Stromelement $u_1 DM_1$ hervorgebracht wird. Bezeichnet man diese Kraft kurzweg mit $\mathfrak{E}^{(u_1)}$:

$$\mathfrak{E}^{(u_1)} = \sum \mathfrak{E}^{(p_1)},$$

so gelangt man also durch Addition all' jener Formeln (3.) zu folgendem Resultat:

$$(4.)\quad \mathfrak{E}^{(u_1)}dt = u_1 D\tau_1 \left\{[\varkappa\Theta\Theta_1 + \varkappa^*\mathsf{E}]dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathsf{E}\right\} + (du_1) D\tau_1 [\pi\Theta\Theta_1 + \pi^*\mathsf{E}].$$

In (3.) und (4.) ist offenbar:

$$(4\text{a.})\quad \begin{aligned} \Theta &= \cos(r, Ds), \\ \Theta_1 &= \cos(r, u_1) = \cos(r, x), \\ \mathsf{E} &= \cos(Ds, u_1) = \cos(Ds, x), \end{aligned}$$

wobei unter r die gerade Linie $(DM_1 \longrightarrow Ds)$ zu verstehen ist. Bezeichnet man also die Richtungscosinus von r und Ds respective mit a, b, c und A, B, C, so erhält man:

$$(4\text{b.})\quad \begin{aligned} \Theta_1 &= a, \\ \mathsf{E} &= A. \end{aligned}$$

Substituirt man aber diese Werthe von Θ_1, E in (4.), so ergiebt sich die erste Formel folgenden Systems:

$$(5.)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}^{(u_1)}dt = u_1\, D\tau_1\Big\{[\varkappa\Theta a + \varkappa^* A]dr + \lambda a d\Theta + \mu\,\Theta da + \nu dA\Big\} \\ \qquad\qquad + (du_1)\, D\tau_1[\pi\Theta a + \pi^* A], \\ \mathfrak{E}^{(v_1)}dt = v_1\, D\tau_1\Big\{[\varkappa\Theta b + \varkappa^* B]dr + \lambda b d\Theta + \mu\Theta db + \nu dB\Big\} \\ \qquad\qquad + (dv_1) D\tau_1[\pi\Theta b + \pi^* B], \\ \mathfrak{E}^{(w_1)}dt = w_1 D\tau_1\Big\{[\varkappa\Theta c + \varkappa^* C]dr + \lambda c d\Theta + \mu\Theta dc + \nu dC\Big\} \\ \qquad\qquad + (dw_1) D\tau_1[\pi\Theta c + \pi^* C], \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Dabei sind alsdann $\mathfrak{E}^{(u_1)}$, $\mathfrak{E}^{(v_1)}$, $\mathfrak{E}^{(w_1)}$ diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche von den drei idealen Elementen $u_1 DM_1$, $v_1 DM_1$, $w_1 DM_1$ im Elemente Ds in der Richtung Ds hervorgebracht werden. Es sind mithin diese drei Kräfte alle von einerlei Richtung. Und nach unserer Hypothese Delta (Seite 131) wird daher die *eigentlich gesuchte Kraft, nämlich die vom Elemente $i_1 DM_1$ in Ds in der Richtung Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft* $\mathfrak{E}$ gleich sein der Summe dieser drei Kräfte:

$$(6.)\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}^{(u_1)} + \mathfrak{E}^{(v_1)} + \mathfrak{E}^{(w_1)}.$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{E}^{(u_1)}$, $\mathfrak{E}^{(v_1)}$, $\mathfrak{E}^{(w_1)}$ die Werthe (5.), so erhält man schliesslich:

$$(7.)\quad \mathfrak{E}dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa\Theta(au_1 + \cdot\cdot) + \varkappa^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ + \lambda(au_1 + \cdot\cdot)d\Theta + \mu\Theta(u_1 da + \cdot\cdot) + \nu(u_1 dA + \cdot\cdot) \\ + \pi\Theta(adu_1 + \cdot\cdot) + \pi^*(Adu_1 + \cdot\cdot) \end{Bmatrix}.$$

Wollte man, zur Vereinfachung, in dieser Formel die beiden Trinome

$$adu_1 + bdv_1 + cdw_1 \quad \text{und} \quad Adu_1 + Bdv_1 + Cdw_1$$

durch

$$d(au_1 + bv_1 + cw_1) \quad \text{und} \quad d(Au_1 + Bv_1 + Cw_1)$$

ersetzen, so würde das offenbar ganz *fehlerhaft* sein, weil a, b, c und A, B, C im Allgemeinen Functionen der Zeit sind. — Trotzdem aber kann man zu einer derartigen Vereinfachung gelangen, falls man nur der Charakteristiken δ, Δ (Seite 125—129) sich bedient. Es ist nämlich:

$$(\alpha.)\quad d(au_1 + bv_1 + cw_1) = \delta(au_1 + bv_1 + cw_1) + \Delta(au_1 + bv_1 + cw_1),$$

und ferner

$$(\beta.)\quad \delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = u_1\delta a + v_1\delta b + w_1\delta c = u_1 da + v_1 db + w_1 db,$$

$$(\gamma.)\quad \Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = a\Delta u_1 + b\Delta v_1 + c\Delta w_1 = adu_1 + bdv_1 + cdw_1.$$

In der That ergeben sich die beiden letzten Formeln (β.), (γ.) sofort, falls man die Bedeutung der Charakteristiken δ, Δ, und zugleich auch

die Situation des hier benutzten Axensystems $[x, y, z]$, vgl. (1.), im Auge behält.

Mit (α.), (β.), (γ.) analoge Gleichungen ergeben sich offenbar für das Trinom $Au_1 + Bv_1 + Cw_1$. Und mit Rücksicht auf all' diese *sechs* Gleichungen gewinnt nun endlich unsere Formel (7.) folgende Gestalt:

$$(8.)\quad \mathfrak{E}dt = D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varkappa\Theta(au_1 + \cdot\cdot) + \varkappa^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ + \lambda(au_1 + \cdot\cdot)d\Theta + \mu\Theta\delta(au_1 + \cdot\cdot) + \nu\delta(Au_1 + \cdot\cdot) \\ + \pi\Theta\Delta(au_1 + \cdot\cdot) + \pi^*\Delta(Au_1 + \cdot\cdot) \end{array} \right\}.$$

Dies also ist diejenige Kraft $\mathfrak{E}$, *welche das gegebene körperliche Stromelement* $i_1 DM_1 (D\tau_1)$ *im linearen Elemente* Ds *in der Richtung* Ds *hervorbringt.* In Betreff dieser Formel (8.) ist zweierlei zu bemerken.

Erstens. — Das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem $[x, y, z]$ kommt in der Formel (8.) nur insofern in Betracht, als es zur Berechnung der dortigen beiden Trinome

$$au_1 + bv_1 + cw_1 \quad \text{und} \quad Au_1 + Bv_1 + Cw_1$$

dient. Diese Trinome haben aber ihre einfachen physikalischen Bedeutungen*), und werden daher, welche Lage oder Bewegung man jenem Axensystem auch zuertheilen mag, stets *ein und dieselben* Werthe besitzen. Folglich darf man beim Gebrauch der Formel (8.), an Stelle des eigentlich in (1.) eingeführten, mit M_1 festverbundenen Axensystems, irgend ein *anderes* Axensystem $[x, y, z]$ anwenden, z. B. auch ein solches, dessen relative Lage gegen die beiden Körper M und M_1 von Augenblick zu Augenblick in ganz beliebiger Weise sich ändert. — Ueberdies kann man offenbar in (8.) für Θ und $\mathfrak{E}$ folgende Ausdrücke substituiren:

$$\Theta = aA + bB + cC,$$
$$\mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C,$$

wo alsdann $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten *jener in Wirklichkeit in* Ds *hervorgebrachten elektromotorischen Kraft* $\mathfrak{R}$ sind, deren Componente nach der Richtung Ds von uns mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet worden ist. [Vgl. Seite 76 (β.)].

Zweitens. — Jene in Wirklichkeit inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ ist nach unserem allgemeinem Axiom (Seite 76) von der Grösse, Gestalt und Beschaffenheit des inducirten Körpers ganz unabhängig. Denkt man sich also z. B. einen in beliebiger Bewegung begriffenen *starren*

---

*) Jene beiden Trinome repräsentiren nämlich gewisse Componenten der Strömung $i_1(u_1, v_1, w_1)$, und zwar die Componenten derselben nach der Richtung $r(a, b, c)$ und nach der Richtung $Ds(A, B, C)$.

Körper M von ganz beliebiger Gestalt, und bezeichnet man irgend zwei einander benachbarte Molecüle dieses Körpers mit P und Q, so wird man die in (8.) für das Trinom

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C$$

aufgestellte Formel ohne Weiteres auch anwenden können auf die in dem starren Körper M im Punkte P inducirte Kraft $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und auf die nach der Richtung PQ gebildete Componente $\mathfrak{E}$ dieser Kraft. Selbstverständlich wird man dabei für $r(a, b, c)$ die Linie $(DM_1 \longrightarrow P)$, und für A, B, C die Richtungscosinus der Linie PQ zu nehmen haben.

Auf Grund dieser beiden Bemerkungen gelangt man nun, hinsichtlich der Formel (8.), sofort zu folgendem Resultat:

Satz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1, und überdies ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$M, \; M_1 \quad \textit{und} \quad [x, y, z] \tag{9.}$$

in ganz beliebigen und voneinander unabhängigen Bewegungen begriffen. Auch mögen in den Körpern M und M_1 irgend welche elektrische Strömungen vorhanden sein.

Es seien nun P und Q zwei einander benachbarte ponderable Massenpunkte des Körpers M; und die Richtungscosinus der Linie PQ seien bezeichnet mit A, B, C:

$$PQ(A, B, C). \tag{10.}$$

Ferner seien für irgend ein Massenelement DM_1 des Körpers M_1 die Bezeichnungen eingeführt:

$$DM_1, \; D\tau_1, \; i_1, \; u_1, \; v_1, \; w_1. \tag{11.}$$

Es sollen nämlich $D\tau_1$ und i_1 das Volumen des Elementes DM_1 und die in ihm vorhandene elektrische Strömung sein. Zugleich sollen u_1, v_1, w_1 die rechtwinkligen Componenten von i_1 vorstellen.

Bezeichnet man alsdann die von diesem Elemente DM_1 im Punkte P inducirte elektromotorische Kraft mit $\mathfrak{R}$, und bezeichnet man ferner die den Coordinatenaxen x, y, z und der Richtung PQ entsprechenden Componenten dieser Kraft $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{E}$, so wird stets folgende Formel gelten:

$$\mathfrak{E}dt = (\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C)\,dt = \tag{12.}$$

$$= D\tau_1 \left\{ \begin{aligned} & [\varkappa(aA + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) + \varkappa^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ & + \lambda(au_1 + \cdot\cdot) \cdot d(aA + \cdot\cdot) \\ & + \mu(aA + \cdot\cdot) \cdot \delta(au_1 + \cdot\cdot) + \nu \cdot \delta(Au_1 + \cdot\cdot) \\ & + \pi(aA + \cdot\cdot) \cdot \Delta(au_1 + \cdot\cdot) + \pi^* \cdot \Delta(Au_1 + \cdot\cdot) \end{aligned} \right\}.$$

Hier sind unter a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \rightarrow P)$ zu verstehen. Auch ist die Länge r dieser Linie als Argument zu denken in den Functionen $\varkappa$, $\varkappa^*$, λ, μ, ν, π, π^*.

Mittelst dieser Formel (12.) kann man offenbar *beliebige Componenten* jener in Wirklichkeit im Punkte P inducirten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ berechnen, z. B. die der Richtung $PQ(A, B, C)$ entsprechende Componente:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C,$$

ebenso die der Richtung $PQ'(A', B', C')$ entsprechende Componente:

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{X}A' + \mathfrak{Y}B' + \mathfrak{Z}C',$$

u. s. w., wo alsdann unter Q' irgend ein *anderer*, dem Punkte P benachbarter Massenpunkt des Körpers M zu verstehen ist.

Somit sieht man, dass die Formel (12.), nach Fortlassung ihres ersten Gliedes $\mathfrak{E}dt$, in Gültigkeit bleiben wird, wenn man, ohne sonst in ihr irgend etwas zu ändern, die Richtungscosinus A, B, C durch irgend welche *andere* Richtungscosinus A', B', C' ersetzt. *Hieraus folgt sofort, dass die rechte Seite der Formel, ebenso wie ihre linke Seite, eine homogene lineare Function von A, B, C sein muss. Und hieraus folgt alsdann weiter, dass die Coefficienten von A, B, C links und rechts einzeln einander gleich sein müssen; so dass man also, auf Grund dieser Formel* (12.), *zur Bestimmung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu gelangen im Stande sein muss.*

Zur Erreichung dieses Zieles sind zuvörderst auf der *rechten* Seite der Formel (12.) die Coefficienten von A, B, C wirklich zu Tage zu fördern.

Sind $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die kleinen Drehungen, welche der starre Körper M während der Zeit dt um die drei Axen x, y, z (9.) respective im Sinne yz, zx, xy erleidet, so haben die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse der Richtungscosinus A, B, C [nach dem Satz (7.) Seite 124] folgende Werthe:

$$\begin{aligned} dA &= Cd\mathfrak{b} - Bd\mathfrak{c}, \\ dB &= Ad\mathfrak{c} - Cd\mathfrak{a}, \\ dC &= Bd\mathfrak{a} - Ad\mathfrak{b}. \end{aligned} \tag{13.}$$

Nun ist offenbar:

$$d(aA + bB + cC) = (Ada + Bdb + Cdc) + (adA + bdB + cdC),$$

also, falls man rechter Hand für dA, dB, dC die Werthe (13.) substituirt:

$$\begin{aligned} d(aA+bB+cC) = A(da + bd\mathfrak{c} - cd\mathfrak{b}) &+ B(db + cd\mathfrak{a} - ad\mathfrak{c}) \\ &+ C(dc + ad\mathfrak{b} - bd\mathfrak{a}). \end{aligned} \tag{14.}$$

Ferner ist ohne Zweifel:

$$\delta(Au_1+Bv_1+Cw_1)=(A\delta u_1+B\delta v_1+C\delta w_1)+(u_1\delta A+v_1\delta B+w_1\delta C).$$

Die δA, δB, δC sind aber [vgl. Seite 129 (20a.)] identisch mit den dA, dB, dC, und besitzen also die in (13.) angegebenen Werthe. Und durch Substitution dieser Werthe geht die vorstehende Formel über in:

$$(15.)\quad \delta(Au_1+Bv_1+Cw_1)=A(\delta u_1+v_1 d\mathfrak{c}-w_1 d\mathfrak{b})+B(\delta v_1+w_1 d\mathfrak{a}-u_1 d\mathfrak{c}) \\ +C(\delta w_1+u_1 d\mathfrak{b}-v_1 d\mathfrak{a}).$$

Ferner ist offenbar:

$$\Delta(Au_1+Bv_1+Cw_1)=(A\Delta u_1+B\Delta v_1+C\Delta w_1)+(u_1\Delta A+v_1\Delta B+w_1\Delta C).$$

Die ΔA, ΔB, ΔC sind aber [vgl. Seite 129 (20.)] alle $=0$. Somit folgt:

$$(16.)\qquad \Delta(Au_1+Bv_1+Cw_1)=A\Delta u_1+B\Delta v_1+C\Delta w_1.$$

Substituirt man jetzt in der Formel (12.) die Werthe (14.), (15.), (16.), so erhält man sofort:

$$(17.)\quad (\mathfrak{X}A+\mathfrak{Y}B+\mathfrak{Z}C)\,dt =$$

$$= D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varkappa(aA+\cdot\cdot)(au_1+\cdot\cdot)+\varkappa^*(Au_1+\cdot\cdot)]\,dr \\ +\lambda(au_1+\cdot\cdot)\,[A(da+b\,d\mathfrak{c}-c\,d\mathfrak{b})+\cdot\cdot] \\ +\mu(aA+\cdot\cdot)\,\delta(au_1+\cdot\cdot)+\nu[A(\delta u_1+v_1 d\mathfrak{c}-w_1 d\mathfrak{b})+\cdot\cdot] \\ +\pi(aA+\cdot\cdot)\,\Delta(au_1+\cdot\cdot)+\pi^*(A\Delta u_1+\cdot\cdot) \end{array} \right\}.$$

Hier nun aber präsentirt sich in der That (wie zu erwarten stand) die rechte Seite als eine homogene lineare Function von A, B, C. Die Coefficienten von A, B, C müssen, wie schon bemerkt wurde, auf beiden Seiten der Formel einander gleich sein. Und man gelangt also z. B. durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten von A zu folgender Formel:

$$(18.)\quad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varkappa a(au_1+\cdot\cdot)+\varkappa^* u_1]\,dr \\ +\lambda(au_1+\cdot\cdot)\cdot(da+b\,d\mathfrak{c}-c\,d\mathfrak{b}) \\ +\mu a\,\delta(au_1+\cdot\cdot)+\nu(\delta u_1+v_1 d\mathfrak{c}-w_1 d\mathfrak{b}) \\ +\pi a\Delta(au_1+\cdot\cdot)+\pi^*\Delta u_1 \end{array} \right\};$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$(19.)\qquad M,\ M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z]$$

in ganz beliebigen und voneinander unabhängigen Bewegungen begriffen. Ueberdies mögen innerhalb der Körper M und M_1 irgend welche elektrische Bewegungen stattfinden.

Es sei P irgend ein ponderabler Massenpunkt des Körpers M. Ferner sei DM_1 irgend ein ponderables Massenelement des Körpers M_1; und mit Bezug auf dieses Element DM_1 seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$DM_1,\ D\tau_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1, \quad \text{[vgl. Seite 137 (11.)]}. \tag{20.}$$

Endlich seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die rechtwinkligen Componenten der vom Elemente DM_1 im Punkte P inducirten elektromotorischen Kraft. Alsdann gilt z. B. für die Componente $\mathfrak{X}$ folgende Formel:

$$\mathfrak{X}dt = D\tau_1 \left\{ \begin{aligned} &[\varkappa a(au_1 + bv_1 + cw_1) + \varkappa^* u_1]\,dr \\ &+ \lambda(au_1 + bv_1 + cw_1)(d\mathfrak{a} + b\,d\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\,d\mathfrak{b}) \\ &+ \mu a\delta(au_1 + bv_1 + cw_1) + \nu(\delta u_1 + v_1 d\mathfrak{c} - w_1 d\mathfrak{b}) \\ &+ \pi a\Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) + \pi^*\Delta u_1 \end{aligned} \right\}. \tag{21.}$$

Hier sind a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \longrightarrow P)$. Auch ist die Länge r dieser Linie als Argument zu denken in den Functionen $\varkappa$, $\varkappa^*$, λ, μ, ν, π, π^*. Endlich bezeichnen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die kleinen Drehungen, welche der Körper M während der Zeit dt erleidet um die Axen x, y, z (19.), respective im Sinne yz, zx, xy.

Selbstverständlich gelten mit (21.) analoge Formeln für $\mathfrak{Y}dt$ und $\mathfrak{Z}dt$.

Uebrigens sind in der Formel (21.) eigentlich nicht nur die Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ des Körpers M, sondern ebenso auch die der Zeit dt entsprechenden Drehungen $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ des Körpers M_1 enthalten; wie man solches sofort erkennt aus den bekannten Bedeutungen von δu_1, δv_1, δw_1. Es ist nämlich [vgl. Seite 127 (16.), (16a.)]:

$$\begin{aligned} du_1 &= \Delta u_1 + \delta u_1, & \delta u_1 &= w_1 d\mathfrak{b}_1 - v_1 d\mathfrak{c}_1, \\ dv_1 &= \Delta v_1 + \delta v_1, & \delta v_1 &= u_1 d\mathfrak{c}_1 - w_1 d\mathfrak{a}_1, \\ dw_1 &= \Delta w_1 + \delta w_1, & \delta w_1 &= v_1 d\mathfrak{a}_1 - u_1 d\mathfrak{b}_1. \end{aligned} \tag{22.}$$

Auch mag, was die Formel (21.) betrifft, beachtet werden, dass

$$\begin{aligned} &\delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = (a\delta u_1 + \cdot\cdot) + (u_1\delta a + \cdot\cdot), \quad \text{und} \\ &\Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = (a\Delta u_1 + \cdot\cdot) + (u_1\Delta a + \cdot\cdot) \end{aligned} \tag{23.}$$

ist. Die δa, δb, δc sind aber [nach Seite 129 (20a.)] identisch mit den da, db, dc. Andererseits sind die Δa, Δb, Δc [nach Seite 129 (20.)] alle $= 0$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} &\delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = (a\delta u_1 + b\delta v_1 + c\delta w_1) + (u_1 da + v_1 db + w_1 dc), \\ &\Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = a\Delta u_1 + b\Delta v_1 + c\Delta w_1. \end{aligned} \tag{24.}$$

Bemerkung. — Ebenso wie unser früherer Satz Seite 88 auf *lineare* Stromelemente sich bezog, ebenso bezieht sich der gegenwärtige Satz (21.) auf *körperliche* Stromelemente. Und zwar ist der Uebergang vom einen Satz zum andern bewerkstelligt worden auf Grund des allgemeinen Axioms (Seite 76), und namentlich auch auf Grund unserer Hypothese Delta (Seite 131)

§ 8.

Erster Specialfall: Der inducirte Körper M und der Inducent M_1 befinden sich beide in Ruhe.

Nach wie vor sei P irgend ein Punkt des inducirten Körpers M, und andererseits DM_1 ein Massenelement des Inducenten M_1. Befinden sich nun M und M_1, mithin auch P und DM_1 in *Ruhe*, so gilt Gleiches z. B. auch von der Linie $r(DM_1 \rightarrow P)$. Bedient man sich also irgend eines *ruhenden* Axensystems $[x, y, z]$, so werden für die Länge r dieser Linie und für ihre Richtungscosinus a, b, c die Formeln stattfinden:

$$(\alpha.) \qquad dr = da = db = dc = 0.$$

Auch wird alsdann

$$(\beta.) \qquad d\mathfrak{a} = d\mathfrak{b} = d\mathfrak{c} = d\mathfrak{a}_1 = d\mathfrak{b}_1 = d\mathfrak{c}_1 = 0$$

sein. Hieraus folgt, mit Hinblick auf (22.) sofort:

$$(\gamma.) \qquad \begin{array}{l} \delta u_1 = \delta v_1 = \delta w_1 = 0, \quad \text{und ferner:} \\ \Delta u_1 = du_1, \quad \Delta v_1 = dv_1, \quad \Delta w_1 = dw_1. \end{array}$$

Ueberdies ergiebt sich aus (α.), (γ.) und (24.):

$$(\delta.) \qquad \delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = 0,$$

$$(\varepsilon.) \qquad \Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = a\,du_1 + b\,dv_1 + c\,dw_1.$$

Substituirt man aber diese Werthe (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.) in der Formel (21.), so erhält man sofort die erste Gleichung folgenden Systems:

$$(25.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}dt = D\tau_1[\varkappa a(adu_1 + bdv_1 + cdw_1) + \varkappa^*\, du_1], \\ \mathfrak{Y}dt = D\tau_1[\varkappa b(adu_1 + bdv_1 + cdw_1) + \varkappa^*\, dv_1], \\ \mathfrak{Z}dt = D\tau_1[\varkappa c(adu_1 + bdv_1 + cdw_1) + \varkappa^* dw_1], \end{cases}$$

dessen übrige Gleichungen in analoger Weise zu erhalten sind.

Diese Formeln (25.) werden z. B. auch dann anzuwenden sein, wenn Inducent und inducirter Körper beide durch *ein und denselben* starren Körper dargestellt sind, vorausgesetzt, dass das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem $[x, y, z]$ mit diesem Körper fest verbunden ist.

§ 9.

Zweiter Specialfall: Der inducirte Körper M sei in völliger Ruhe, während der Inducent M_1 um eine ruhende Axe A_1 rotirt.

Auch mag in diesem Fall zum inducirenden Element DM_1 ein unendlich kleiner Cylinder genommen werden, dessen geometrische Axe zusammenfällt mit jener Rotationsaxe A_1. Ist nun P_1 ein auf dieser

Axe A_1 gelegener Punkt des kleinen Cylinders DM_1, so wird man zur Linie r die Linie $(P_1 \longrightarrow P)$ nehmen können, wo P (ebenso wie bisher) die inducirte Stelle des Körpers M vorstellen soll.

Denkt man sich das rechtwinklige Axensystem $[x, y, z]$ als ein *ruhendes*, so wird die soeben genannte Linie $r(P_1 \longrightarrow P)$ ihrer Länge und Lage nach unveränderlich sein; so dass man also erhält:

$$(\alpha.) \qquad dr = da = db = dc = 0.$$

Ferner wird im gegenwärtigen Fall

$$(\beta.) \quad d\mathfrak{a} = d\mathfrak{b} = d\mathfrak{c} = 0, \text{ hingegen } d\mathfrak{a}_1 = \alpha_1 d\psi_1, \; d\mathfrak{b}_1 = \beta_1 d\psi_1, \; d\mathfrak{c}_1 = \gamma_1 d\psi_1$$

sein, wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungscosinus der Rotationsaxe A_1, und $d\psi_1$ die Drehung des Körpers M_1 um diese Axe A_1 während der Zeit dt vorstellen. Somit ergiebt sich aus (22.) und (β.):

$$(\gamma.) \qquad \begin{aligned} \delta u_1 &= (w_1\beta_1 - v_1\gamma_1)\,d\psi_1, \\ \delta v_1 &= (u_1\gamma_1 - w_1\alpha_1)\,d\psi_1, \\ \delta w_1 &= (v_1\alpha_1 - u_1\beta_1)\,d\psi_1. \end{aligned}$$

Ferner ist nach (24.), und mit Rücksicht auf (α.):

$$\delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = a\delta u_1 + b\delta v_1 + c\delta w_1,$$

also, falls man für δu_1, δv_1, δw_1 ihre Werthe (γ.) einsetzt:

$$(\delta.) \qquad \delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = \begin{vmatrix} a & \alpha_1 & u_1 \\ b & \beta_1 & v_1 \\ c & \gamma_1 & w_1 \end{vmatrix} d\psi_1.$$

Endlich ist nach (24.):

$$(\varepsilon.) \qquad \Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = a\Delta u_1 + b\Delta v_1 + c\Delta w_1.$$

Substituirt man nun die Werthe (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.) in der Formel (21.), so erhält man:

$$(26.) \qquad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \left\{ \mu a \begin{vmatrix} a & \alpha_1 & u_1 \\ b & \beta_1 & v_1 \\ c & \gamma_1 & w_1 \end{vmatrix} d\psi_1 + \nu(w_1\beta_1 - v_1\gamma_1)\,d\psi_1 \right\}$$
$$+ D\tau_1[\pi a(a\Delta u_1 + b\Delta v_1 + c\Delta w_1) + \pi^*\Delta u_1].$$

Zu unseren bisherigen Annahmen wollen wir jetzt endlich noch die hinzutreten lassen, dass das Element DM_1 ein *constantes* Stromelement sei, und zwar wollen wir voraussetzen, dass die in diesem kleinen Cylinder DM_1 vorhandene constante elektrische Strömung i_1 parallel sei mit der Cylinderaxe A_1. Alsdann ist offenbar

$$(\zeta.) \qquad u_1 = \alpha_1 i_1, \quad v_1 = \beta_1 i_1, \quad w_1 = \gamma_1 i_1, \quad \text{und}$$

$$(\eta.) \qquad \Delta u_1 = \Delta v_1 = \Delta w_1 = 0;$$

so dass also in diesem Fall die Formel (26.) übergeht in $\mathfrak{X} dt = 0$. Demgemäss ergiebt sich also:

$$(27.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = 0, \\ \mathfrak{Y} = 0, \\ \mathfrak{Z} = 0. \end{cases}$$

Bei den hier gemachten Voraussetzungen ist offenbar das betrachtete cylindrische Element DM_1 nichts Andres als ein gewöhnliches *lineares* Stromelement von *constanter* Stromstärke. Demgemäss kann das erhaltene Resultat (27.) folgendermassen ausgesprochen werden:

Satz. — *Ist ein lineares Stromelement von constanter Stromstärke um seine eigne Axe in Rotation begriffen, so wird die von ihm in irgend einem Punkt eines ruhenden Körpers inducirte elektromotorische Kraft stets* $= 0$ *sein.*

Das war wohl *a priori* zu erwarten. Der Satz liefert also nichts Neues, sondern dient nur zur Controle unserer Untersuchungen. Wesentlich Neues aber wird sich ergeben bei dem folgenden Specialfall.

§ 10.

Dritter Specialfall: Der inducirte Körper M rotirt um eine ruhende Axe A, während der Inducent M_1 in völliger Ruhe sich befindet.

Auch mag in diesem Fall zur inducirten Stelle ein Punkt P erwählt werden, der *auf der Axe A liegt.* Alsdann wird die Linie $r(DM_1 \rightarrow P)$ ihrer Länge und Lage nach unveränderlich sein. Bedient man sich also eines *ruhenden* Axensystems $[x, y, z]$, so ergiebt sich:

$$(\alpha.) \qquad dr = da = db = dc = 0.$$

Ueberdies wird offenbar:

$$(\beta.) \quad d\mathfrak{a} = \alpha d\psi, \; d\mathfrak{b} = \beta d\psi, \; d\mathfrak{c} = \gamma d\psi, \; \text{und} \; d\mathfrak{a}_1 = d\mathfrak{b}_1 = d\mathfrak{c}_1 = 0$$

sein, wo α, β, γ die Richtungscosinus der Axe A vorstellen, während $d\psi$ die kleine Drehung des Körpers M um diese Axe A während der Zeit dt bezeichnet. Aus (22.) ergiebt sich nun, mit Hinblick auf (β.), sofort:

$$(\gamma.) \qquad \delta u_1 = \delta v_1 = \delta w_1 = 0, \quad \text{und}$$

$$(\delta.) \qquad \Delta u_1 = du_1, \quad \Delta v_1 = dv_1, \quad \Delta w_1 = dw_1.$$

Ferner folgt aus (24.), mit Rücksicht auf (α.), (γ.):

$$(\varepsilon) \qquad \delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = 0.$$

Endlich folgt aus (24.), mit Rücksicht auf (δ.):

$$(\zeta.) \qquad \Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = adu_1 + bdv_1 + cdw_1.$$

Substituirt man jetzt diese Werthe (α.), (β.), (γ.), (δ.), (ε.), (ζ.) in der Formel (21.), so erhält man sofort:

$$(28.)\quad \mathfrak{X}dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} \lambda(au_1 + bv_1 + cw_1)(b\gamma - c\beta)d\psi + \nu(v_1\gamma - w_1\beta)d\psi \\ + \pi a(adu_1 + bdv_1 + cdw_1) + \pi^* du_1 \end{Bmatrix}.$$

Nehmen wir nun schliesslich noch an, dass DM_1 ein *constantes* Stromelement ist, dass also die in diesem Element DM_1 vorhandenen Strömungscomponenten u_1, v_1, w_1 von der Zeit unabhängig sind, so ist:

$$(\eta.)\qquad du_1 = dv_1 = dw_1 = 0;$$

so dass also in diesem Falle die Formel (28.) übergeht in:

$$(29.)\quad \mathfrak{X}dt = D\tau_1[\lambda(au_1 + bv_1 + cw_1)(b\gamma - c\beta) + \nu(v_1\gamma - w_1\beta)]d\psi.$$

Das Trinom $(au_1 + bv_1 + cw_1)$ können wir dadurch zum Verschwinden bringen, dass wir die constante Strömung $i_1(u_1, v_1, w_1)$ uns *senkrecht* denken gegen die Linie $r(DM_1 \longrightarrow P)$. Alsdann reducirt sich die Formel (29.) auf

$$(30.)\qquad \mathfrak{X}dt = D\tau_1 \cdot \nu(v_1\gamma - w_1\beta) \cdot d\psi;$$

so dass wir zu folgendem Satz gelangen:

Satz. — *Der inducirte Körper M sei in Rotation begriffen um eine ruhende Axe A; und es sei P ein auf dieser Axe A gelegner ponderabler Massenpunkt des Körpers. Alsdann wird die im Punkte P durch ein ruhendes constantes Stromelement DM_1 inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ folgende Componenten besitzen*):*

$$(31.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = D\tau_1 \dfrac{d\psi}{dt}\,\nu(r)\cdot(v_1\gamma - w_1\beta), \\[2ex] \mathfrak{Y} = D\tau_1 \dfrac{d\psi}{dt}\,\nu(r)\cdot(w_1\alpha - u_1\gamma), \\[2ex] \mathfrak{Z} = D\tau_1 \dfrac{d\psi}{dt}\,\nu(r)\cdot(u_1\beta - v_1\alpha), \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die constante Strömung $i_1(u_1, v_1, w_1)$ jenes inducirenden Elementes DM_1 senkrecht ist gegen die Linie $r(DM_1 \longrightarrow P)$.

Diese Formeln (31.) sind bezogen zu denken auf irgend ein ruhendes rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$. Die α, β, γ bezeichnen die Richtungscosinus der Rotationsaxe A, und $\frac{d\psi}{dt}$ repräsentirt die Rotationsgeschwindigkeit des um A sich drehenden Körpers M. Endlich ist unter $D\tau_1$ das Volumen des inducirenden Elementes DM_1 zu verstehen.

Zufolge der Formeln (31.) steht die inducirte Kraft $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ senkrecht gegen die Rotationsaxe $A(\alpha, \beta, \gamma)$, und ebenso auch senk-

*) Bekanntlich ist ν eine Function von r. Demgemäss ist in (31.) $\nu(r)$ für ν geschrieben.

recht gegen die inducirende Strömung $i_1(u_1, v_1, w_1)$. Auch die *Stärke* dieser Kraft $\mathfrak{R}$ ist leicht genauer angebbar. Aus den Formeln (31.) erhält man nämlich leicht:

$$\mathfrak{R} = i_1 D\tau_1 \frac{d\psi}{dt} \nu(r) \cdot \sin\sigma, \tag{32.}$$

wo σ den Winkel bezeichnet, unter welchem die beiden Richtungen $A(\alpha, \beta, \gamma)$ und $i_1(u_1, v_1, w_1)$ gegen einander geneigt sind.

Bemerkung. — Von ganz ausserordentlicher Wichtigkeit ist es, bei unserm zweiten allgemeinen Axiom [Seite 129] zwischen der *punktuellen* und *elementaren* Auffassung zu unterscheiden.

Wollte man nämlich die *punktuelle* Auffassung acceptiren, so würde die soeben in (31.), (32.) besprochene Kraft $\mathfrak{R}$ gleich *Null* sein müssen, weil die Lage des *Punktes* P zum inducirenden Elemente DM_1 ungeändert bleibt. Aus dem Nullsein der Kraft $\mathfrak{R}$ würde alsdann aber, vermöge der Formeln (31.), (32.), sofort sich ergeben, dass $\nu(r)$ identisch $= 0$ sein muss.

Acceptirt man hingegen die *elementare* Auffassung jenes zweiten Axioms, so fallen derartige Schlussfolgerungen von selber fort. Denn alsdann ist die inducirte Stelle P als ein unendlich kleines *Element* des inducirten Körpers M anzusehen. Und die relative Lage eines solchen Elementes P zum inducirenden Element DM_1 ist keineswegs constant, vielmehr (in Folge der Rotation des Körpers M) von Augenblick zu Augenblick sich ändernd.

Wir wollen jetzt zur Formel (29.) zurückkehren, und in derselben das Glied $(v_1\gamma - w_1\beta)$ zum Verschwinden bringen. Dies erreichen wir dadurch, dass wir die constante inducirende Strömung $i_1(u_1, v_1, w_1)$ der Rotationsaxe $A(\alpha, \beta, \gamma)$ parallel machen, also

$$u_1 = i_1\alpha, \quad v_1 = i_1\beta, \quad w_1 = i_1\gamma$$

setzen. Alsdann reducirt sich jene Formel (29.) auf:

$$\mathfrak{X}dt = D\tau_1 \lambda \cdot i_1(a\alpha + b\beta + c\gamma)(b\gamma - c\beta)d\psi; \tag{33.}$$

so dass wir also zu folgendem Satz gelangen:

Satz. — *Der inducirte Körper M sei in Rotation begriffen um eine* **ruhende** *Axe A; und es sei P ein auf dieser Axe A gelegener Punkt des Körpers. Alsdann wird die im Punkte P durch ein* **ruhendes constantes** *Stromelement DM_1 inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ folgende Componenten haben*):*

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= i_1 D\tau_1 \frac{d\psi}{dt} \lambda(r) \cdot (a\alpha + b\beta + c\gamma)(b\gamma - c\beta), \\ \mathfrak{Y} &= i_1 D\tau_1 \frac{d\psi}{dt} \lambda(r) \cdot (a\alpha + b\beta + c\gamma)(c\alpha - a\gamma), \\ \mathfrak{Z} &= i_1 D\tau_1 \frac{d\psi}{dt} \lambda(r) \cdot (a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\beta - b\alpha), \end{aligned}\right. \tag{34.}$$

*) λ ist eine Function von r. Demgemäss ist in (34.) $\lambda(r)$ für λ geschrieben.



vorausgesetzt, dass die in jenem Element DM_1 vorhandene constante Strömung $i_1(u_1, v_1, w_1)$ parallel ist zur Rotationsaxe $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Dabei sollen α, β, γ die Richtungscosinus der Axe A, und a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \rightarrow P)$ sein. Ueberdies bezeichnet $\frac{d\psi}{dt}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers M, und $D\tau_1$ das Volumen des Elementes DM_1.

Das den Formeln (34.) zu Grunde liegende Axensystem $[x, y, z]$ ist als ein ruhendes zu denken.

Nach den Formeln (34.) steht die Kraft $\mathfrak{R}$ senkrecht gegen die durch die beiden Linien $r(a, b, c)$ und $A(\alpha, \beta, \gamma)$ gelegte Ebene. Ihre *Stärke* hat, wie sich aus (34.) leicht ergiebt, folgenden Werth:

$$\mathfrak{R} = i_1 D\tau_1 \frac{d\psi}{dt} \frac{\lambda(r) \sin(2\tau)}{2}, \tag{35.}$$

wo τ den Winkel bezeichnet, unter welchem die beiden Linien $r(a, b, c)$ und $A(\alpha, \beta, \gamma)$ gegen einander geneigt sind.

Bemerkung. — Bei diesem Satze (34.), (35.) ist Aehnliches zu sagen wie vorhin bei dem Satze (31.), (32.).

Wollte man nämlich, was das zweite allgemeine Axiom [Seite 129] betrifft, für die *punktuelle* Auffassung sich entscheiden, so würde aus dem früheren Satze (31.), (32.), wie bereits dargelegt wurde, mit Nothwendigkeit folgen, dass die Function $\nu = \nu(r)$ identisch $= 0$ ist. Und ebenso würde, bei Annahme einer solchen *punktuellen* Auffassung des genannten Axioms, aus dem gegenwärtigen Satze (34.), (35.) sich ergeben, dass die Function $\lambda = \lambda(r)$ identisch $= 0$ sein muss.

Auch würden diese beiderlei Ergebnisse: $\nu = 0$ und $\lambda = 0$ miteinander in vollem Einklang sein, insofern, als früher bereits [Seite 116 (10.)] constatirt ist, dass zwischen λ und ν die Relation stattfindet:

$$\lambda = r \frac{d\nu}{dr}.$$

Immerhin aber wird es gut sein, jene Frage, ob das zweite allgemeine Axiom in seiner punktuellen oder aber in seiner elementaren Auffassung zu acceptiren sei, einstweilen *in suspenso* zu lassen.

§ 11.

Die von zwei körperlichen Stromelementen aufeinander ausgeübten elektromotorischen Arbeiten.

Wir kehren zurück zu den allgemeinen Vorstellungen des Satzes Seite 139. Ebenso wie damals mögen

$$M, \quad M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z] \tag{1.}$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen



sein. Auch mögen für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper die Bezeichnungen eingeführt sein:

$$(2.)\quad \begin{aligned} &DM,\ D\tau,\ i,\ u,\ v,\ w,\\ &DM_1,\ D\tau_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1,\quad \text{[vgl. Seite 137 (11.)]}. \end{aligned}$$

Die Richtungscosinus der geraden Linie $r(DM_1 \rightarrow DM)$ seien mit a, b, c bezeichnet. Und endlich mag zur Abkürzung gesetzt werden:

$$(3.)\quad \begin{aligned} T &= au + bv + cw,\\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1,\\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned}$$

Auf Grund des genannten Satzes [Seite 140 (21.)] sind alsdann die vom Elemente DM_1 in irgend einem Punkte des Elementes DM inducirten elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sofort angebbar. So z. B. wird, nach jenem Satze und unter Benutzung der Abbreviaturen (3.), die Kraft $\mathfrak{X}$ den Werth haben:

$$(4.)\quad \mathfrak{X}dt = D\tau_1 \left\{ \begin{aligned} &[\varkappa a T_1 + \varkappa^* u_1]\,dr + \lambda T_1 (da + b\,d\mathfrak{c} - c\,d\mathfrak{b})\\ &+ \mu a \delta T_1 + \nu(\delta u_1 + v_1 d\mathfrak{c} - w_1 d\mathfrak{b}) + \pi a \Delta T_1 + \pi^* \Delta u_1 \end{aligned} \right\}.$$

Analoge Formeln gelten für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$.

Da nun $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die von DM_1 in DM hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte sind, so wird [vgl. Seite 64, 65] der Ausdruck

$$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau\,dt$$

zu bezeichnen sein als die *während der Zeit dt vom Elemente DM_1 im Elemente DM hervorgebrachte elektromotorische Arbeit.* Für diese Arbeit benutzen wir [vgl. Seite 65 (6.)] das bekannte Symbol:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1},$$

und schreiben also:

$$(5.)\quad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau\,dt.$$

Es handelt sich nun darum, diesen Ausdruck (5.), *unter Einsetzung der Werthe der $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, weiter zu entwickeln.*

Nach (3.) ist:

$$(6.)\quad \delta T = (u\delta a + v\delta b + w\delta c) + (a\delta u + b\delta v + c\delta w),$$

$$(7.)\quad \delta S = (u\delta u_1 + v\delta v_1 + w\delta w_1) + (u_1\delta u + v_1\delta v + w_1\delta w).$$

Substituirt man hier für $\delta u, \delta v, \delta w$ ihre bekannten Werthe [vgl. Seite 127 (16a.)]:

$$(8.)\quad \begin{aligned} \delta u &= w\,d\mathfrak{b} - v\,d\mathfrak{c},\\ \delta v &= u\,d\mathfrak{c} - w\,d\mathfrak{a},\\ \delta w &= v\,d\mathfrak{a} - u\,d\mathfrak{b}, \end{aligned}$$

und beachtet man überdies [vgl. Seite 129 (20a.)], dass die $\delta a, \delta b, \delta c$ mit den da, db, dc identisch sind, so erhält man:

$$\delta T = u(da + b\,d\mathfrak{c} - c\,d\mathfrak{b}) + v(db + c\,d\mathfrak{a} - a\,d\mathfrak{c}) + w(dc + a\,d\mathfrak{b} - b\,d\mathfrak{a}), \tag{9.}$$

$$\delta S = u(\delta u_1 + v_1 d\mathfrak{c} - w_1 d\mathfrak{b}) + v(\delta v_1 + w_1 d\mathfrak{a} - u_1 d\mathfrak{c}) + w(\delta w_1 + u_1 d\mathfrak{b} - v_1 d\mathfrak{a}). \tag{10.}$$

Substituirt man nun in (5.) für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die in (4.) angedeuteten Werthe, so gelangt man, mit Rücksicht auf (3.), (9.), (10.), sofort zu folgender Formel:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa T T_1 + \varkappa^* S]\,dr + \lambda T_1 \delta T + \mu T \delta T_1 + \nu \delta S \\ + \pi T \Delta T_1 + \pi^*(u \Delta u_1 + v \Delta v_1 + w \Delta w_1) \end{Bmatrix}.$$

Man gelangt somit zu folgendem Resultat:

Satz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1 und überdies ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$M, \quad M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z] \tag{11.}$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Gleichzeitig mögen in M und M_1 irgend welche elektrische Bewegungen vorhanden sein.

Für irgend zwei Massenelemente DM und DM_1 der beiden Körper seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{matrix} DM, & D\tau, & u, & v, & w, & \\ DM_1, & D\tau_1, & u_1, & v_1, & w_1, & [\text{vgl. Seite 137 (11.)}]. \end{matrix} \tag{12.}$$

Ueberdies mag gesetzt werden:

$$\begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1, \end{aligned} \tag{13.}$$

wo a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \longrightarrow DM)$ vorstellen.

Alsdann wird die vom Elemente DM_1 während der Zeit dt auf das Element DM ausgeübte elektromotorische Arbeit den Werth haben:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa T T_1 + \varkappa^* S]\,dr + \lambda T_1 \delta T + \mu T \delta T_1 + \nu \delta S \\ + \pi T \Delta T_1 + \pi^*(u \Delta u_1 + v \Delta v_1 + w \Delta w_1) \end{Bmatrix}. \tag{14.}$$

Desgleichen wird offenbar die umgekehrt von DM auf DM_1 während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit folgenden Werth besitzen):*

$$(d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa T T_1 + \varkappa^* S]\,dr + \lambda T \delta T_1 + \mu T_1 \delta T + \nu \delta S \\ + \pi T_1 \Delta T + \pi^*(u_1 \Delta u + v_1 \Delta v + w_1 \Delta w) \end{Bmatrix}. \tag{15.}$$

*) Man wird nämlich den Werth dieser Arbeit aus dem Werth der Arbeit (14.) dadurch erhalten, dass man die Grössen T, u, v, w und T_1, u_1, v_1, w_1 mit einander vertauscht.



Demgemäss ergiebt sich für die Summe dieser beider Arbeiten:

$$(16.)\qquad d\mathfrak{L} = (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}$$

folgender Ausdruck:

$$(17.)\quad d\mathfrak{L} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} 2[\varkappa TT_1 + \varkappa^* S]dr + (\lambda + \mu)\,\delta(TT_1) + 2\nu\delta S \\ + \pi\Delta(TT_1) + \pi^*\Delta S \end{Bmatrix}.$$

§ 12.

Die ponderomotorische Einwirkung zwischen einem körperlichen und einem linearen Stromelement.

Es seien gegeben ein *dünner Draht* M und irgend ein *starrer Körper* M_1, in dessen ponderable Masse ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$ eingefügt ist. Und zwar mögen beide Objecte

$$(1.)\qquad M \quad \text{und} \quad \boxed{M_1\,[x, y, z]}$$

in ganz beliebigen Bewegungen sich befinden. Im Drahte M sei ein elektrischer Strom J vorhanden; und auch im Körper M_1 mögen irgend welche elektrische Bewegungen stattfinden.

Für irgend zwei Massenelemente DM und DM_1 der beiden Körper seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$(2.)\qquad \begin{array}{l} DM,\ Ds,\ J, \\ DM_1,\ D\tau_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1, \quad \text{[vgl. Seite 133 (2.)]}. \end{array}$$

Es handelt sich darum, diejenige ponderomotorische Arbeit dL *zu finden, welche von diesen beiden Stromelementen* JDM *und* i_1DM_1 *während der Zeit* dt *aufeinander ausgeübt wird.*

Nach unserer Hypothese Delta [Seite 131] ist das körperliche Stromelement i_1DM_1 ersetzbar durch die drei idealen Elemente u_1DM_1, v_1DM_1, w_1DM_1. Wir betrachten zuvörderst das Element u_1DM_1, zerlegen dasselbe parallel zur x-Axe in lauter unendlich dünne Prismata (p_1), und bezeichnen Länge und Querschnitt eines solchen Prismas (p_1) mit Ds_1 und q_1; so dass also die in diesem Prisma (p_1) vorhandene Stromstärke $J_1 = q_1u_1$ ist. Die von diesem Prisma (p_1) und von dem gegebenen linearen Stromelement JDs während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit mag $dL^{(p_1)}$ heissen. Sie wird, nach dem Satz Seite 95, folgenden Werth haben:

$$dL^{(p_1)} = JJ_1DsDs_1\Big\{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^*\mathsf{E}]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}\Big\};$$

wofür man, weil $J_1 = q_1u_1$ ist, auch schreiben kann:

$$(3.)\quad dL^{(p_1)} = Ju_1\cdot Ds\cdot q_1Ds_1\Big\{[\varrho\Theta\Theta_1 + \varrho^*\mathsf{E}]dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}\Big\}\cdot$$

Diese Formel wollen wir uns nun der Reihe nach aufgestellt denken für *sämmtliche* das Element DM_1 erfüllenden Prismata (p_1). Durch Addition all' dieser Formeln wird sich alsdann [weil DM_1 unendlich klein ist, mithin all' jene Prismata (p_1) unendlich nahe aneinander liegen] eine Formel von analoger Gestalt ergeben, in welcher jedoch $dL^{(p_1)}$ und $q_1 Ds_1$ vertreten sein werden durch

$$\sum dL^{(p_1)} \quad \text{und durch} \quad \sum q_1 Ds_1 = D\tau_1.$$

Die erste dieser beiden Summen ist offenbar nichts Anderes als die von dem *ganzen* idealen Element $u_1 DM_1$ und dem Element JDs aufeinander ausgeübte Arbeit. Bezeichnet man diese letztere also mit $dL^{(u_1)}$:

$$dL^{(u_1)} = \sum dL^{(p_1)},$$

so gelangt man durch Addition all' jener Formeln (3.) zu folgendem Resultat:

$$(4.) \quad dL^{(u_1)} = Ju_1 \cdot Ds \cdot D\tau_1 \Big\{ [\varrho \Theta \Theta_1 + \varrho^* \mathsf{E}]\, dr + \varphi\, d(\Theta \Theta_1) + \chi\, d\mathsf{E} \Big\}.$$

In (3.) und (4.) ist offenbar:

$$(4a.) \quad \begin{aligned} \Theta &= \cos(r, Ds), \\ \Theta_1 &= \cos(r, u_1) = \cos(r, x), \\ \mathsf{E} &= \cos(Ds, u_1) = \cos(Ds, x), \end{aligned}$$

wo r die gerade Linie $(DM_1 \longrightarrow Ds)$ bezeichnet. Sind also a, b, c die Richtungscosinus dieser Linie r, und sind ferner A, B, C die Richtungscosinus von Ds, so wird offenbar

$$(4b.) \quad \begin{aligned} \Theta_1 &= a, \\ \mathsf{E} &= A \end{aligned}$$

sein. Substituirt man aber diese Werthe von Θ_1 und E in (4.), so erhält man die erste Formel folgenden Systems:

$$(5.) \quad \begin{cases} dL^{(u_1)} = JDs \cdot u_1 D\tau_1 \Big\{ [\varrho \Theta a + \varrho^* A]\, dr + \varphi\, d(\Theta a) + \chi\, dA \Big\}, \\ dL^{(v_1)} = JDs \cdot v_1 D\tau_1 \Big\{ [\varrho \Theta b + \varrho^* B]\, dr + \varphi\, d(\Theta b) + \chi\, dB \Big\}, \\ dL^{(w_1)} = JDs \cdot w_1 D\tau_1 \Big\{ [\varrho \Theta c + \varrho^* C]\, dr + \varphi\, d(\Theta c) + \chi\, dC \Big\}, \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Selbstverständlich haben hier $dL^{(v_1)}$, $dL^{(w_1)}$ für die idealen Elemente $v_1 DM_1$, $w_1 DM_1$ dieselben Bedeutungen, welche $dL^{(u_1)}$ für das ideale Element $u_1 DM_1$ besitzt.

Bezeichnet nun endlich dL (ohne Index) die eigentlich gesuchte Arbeit, nämlich die während der Zeit dt von den beiden gegebenen

Elementen $i_1 DM_1$ und JDs aufeinander ausgeübte Arbeit, so ist, *auf Grund unserer Hypothese Delta* [Seite 131]:

$$dL = dL^{(u_1)} + dL^{(v_1)} + dL^{(w_1)}; \tag{6.}$$

und hieraus folgt durch Substitution der Werthe (5.):

$$dL = JDs \cdot D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho\Theta(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot)d\Theta + \varphi\Theta(u_1 da + \cdot\cdot) + \chi(u_1 dA + \cdot\cdot) \end{array} \right\}. \tag{7.}$$

Nun ist aber [vgl. Seite 135 (β.)]:

$$\delta(au_1 + bv_1 + cw_1) = u_1 da + v_1 db + w_1 dc, \quad \text{und ebenso:} \tag{ε.}$$

$$\delta(Au_1 + Bv_1 + Cw_1) = u_1 dA + v_1 dB + w_1 dC; \tag{ζ.}$$

so dass man also der Formel (7.) folgende Gestalt geben kann:

$$dL = JDs\, D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho\Theta(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot)d\Theta + \varphi\Theta\,\delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi\,\delta(Au_1 + \cdot\cdot) \end{array} \right\}. \tag{9.}$$

Das der Betrachtung zu Grunde gelegte, mit M_1 starr verbundene Axensystem (1.) kommt in dieser Formel (9.) nur in sofern in Betracht, als es zur Berechnung der beiden Trinome

$$au_1 + bv_1 + cw_1 \quad \text{und} \quad Au_1 + Bv_1 + Cw_1$$

dient. Hieraus aber folgt sofort [vgl. Seite 136], dass die Formel (9.) auch dann noch gültig ist, wenn man jenes Axensystem (1.) mit irgend welchem andern in ganz *beliebiger Bewegung* begriffenem Axensysteme vertauscht; so dass man also schliesslich zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Es seien gegeben ein dünner Draht M, ferner ein starrer Körper M_1, und endlich ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$M, \ M_1 \ \text{ und } \ [x, y, z] \tag{10.}$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Der Draht M sei durchflossen von einem elektrischen Strom J; und auch im Körper M_1 mögen irgend welche elektrische Bewegungen vorhanden sein.

Ferner seien für irgend zwei Elemente DM und DM_1 des Drahtes M und des Körpers M_1 die Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{array}{l} DM, \ Ds, \ J, \\ DM_1, \ D\tau_1, \ i_1, \ u_1, \ v_1, \ w_1, \quad [\textit{vgl. Seite 133 (2.)}]. \end{array} \tag{11.}$$

Alsdann wird die von diesen beiden Stromelementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit dL den Werth haben:

$$dL = JDs\, D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho\Theta(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot)d\Theta + \varphi\Theta\,\delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi\,\delta(Au_1 + \cdot\cdot) \end{array} \right\}, \tag{12.}$$

wo Θ die Bedeutung hat:

(13.) $$\Theta = aA + bB + cC.$$

Dabei bezeichnen a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \rightarrow DM)$, und A, B, C die Richtungscosinus des Elementes $DM(Ds)$.

§ 13.

Die ponderomotorische Einwirkung zweier körperlicher Stromelemente aufeinander.

In die ponderable Masse des starren Körpers M sei ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$ eingefügt. Ueberdies sei noch ein zweiter starrer Körper M_1 gegeben. Und zwar mögen beide Objecte

(14.) $$\boxed{M[x, y, z]} \quad \text{und} \quad M_1$$

in ganz beliebigen Bewegungen begriffen sein. Mit Bezug auf irgend zwei Massenelemente DM und DM_1 der beiden Körper seien die Bezeichnungen eingeführt:

(15.) $$\begin{array}{l} DM,\ D\tau,\ i,\ u,\ v,\ w, \\ DM_1,\ D\tau_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1, \end{array} \quad \text{[vgl. Seite 133 (2.)].}$$

*Es handelt sich darum, diejenige **ponderomotorische Arbeit** dL zu finden, welche von diesen beiden Stromelementen iDM und i_1DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübt wird.*

Nach unserer Hypothese Delta [Seite 131] ist das Element iDM ersetzbar durch die drei idealen Elemente uDM, vDM, wDM. Wir betrachten zuvörderst das ideale Element uDM, zerlegen dasselbe parallel der x-Axe [vgl. (14.)] in lauter dünne Prismata (p), und bezeichnen Länge und Querschnitt eines solchen Prismas (p) mit q und Ds; so dass also die in (p) vorhandene Stromstärke $J = qu$ ist. Die von diesem Prisma (p) und dem Element i_1DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit $dL^{(p)}$ wird alsdann, nach dem soeben gefundenem Satze (12.), den Werth haben:

(16.) $$dL^{(p)} = JDsD\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho\Theta(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(Au_1 + \cdot\cdot)]\,dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot)d\Theta + \varphi\Theta\delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi\delta(Au_1 + \cdot\cdot) \end{array} \right\}.$$

Im gegenwärtigen Fall sind aber offenbar A, B, C die Richtungscosinus jenes zur x-Axe parallelen Prismas (p). Mithin ist:

(f.) $$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

und folglich [nach (13.)]:

(g.) $$\Theta = a.$$

Ueberdies ist, wie schon bemerkt wurde:

$$\text{(h.)} \qquad J = qu.$$

Mittelst dieser Relationen (f.), (g.), (h.) geht die Formel (16.) über in:

$$\text{(17.)} \quad dL^{(p)} = u \cdot qDs \cdot D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho a(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^* u_1]\, dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot) da + \varphi a \delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi \delta u_1 \end{array} \right\}.$$

Diese Formel (17.) wollen wir uns nun der Reihe nach aufgestellt denken für *sämmtliche* das Element DM erfüllenden Prismata (p). Durch Addition all' dieser Formeln wird alsdann [weil all' jene Prismata (p) einander unendlich nahe liegen] eine Formel von analoger Gestalt entstehen, in welcher jedoch $dL^{(p)}$ und qDs vertreten sein werden durch die betreffenden Summen:

$$\sum dL^{(p)} \quad \text{und} \quad \sum q\, Ds = D\tau.$$

Die erste dieser beiden Summen ist offenbar nichts Anderes als die vom *ganzen* idealen Element uDM und vom gegebenen Elemente $i_1 DM_1$ während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit. Bezeichnet man also diese Arbeit kurzweg mit $L^{(u)}$, so gelangt man durch jene Addition zur ersten Formel folgenden Systems:

$$\text{(18.)} \left\{ \begin{array}{l} dL^{(u)} = uD\tau D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho a(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^* u_1]\, dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot) da + \varphi a \delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi \delta u_1 \end{array} \right\}, \\ dL^{(v)} = vD\tau D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho b(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^* v_1]\, dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot) db + \varphi b \delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi \delta v_1 \end{array} \right\}, \\ dL^{(w)} = wD\tau D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho c(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^* w_1]\, dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot) dc + \varphi c \delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi \delta w_1 \end{array} \right\}, \end{array} \right.$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Selbstverständlich haben hier $dL^{(v)}$, $dL^{(w)}$ für die idealen Elemente vDM, wDM dieselbe Bedeutung, welche $dL^{(u)}$ für das ideale Element uDM besitzt.

Bezeichnet nun endlich dL (ohne Index) die eigentlich gesuchte Arbeit, nämlich die während der Zeit dt von den beiden gegebenen Elementen iDM und $i_1 DM_1$ aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit, so ist, *auf Grund unserer Hypothese Delta* [Seite 131]:

$$\text{(19.)} \qquad dL = dL^{(u)} + dL^{(v)} + dL^{(w)};$$

und hieraus folgt durch Substitution der Werthe (18.):

$$\text{(20.)} \quad dL = D\tau D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varrho(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(uu_1 + \cdot\cdot)]\, dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot)(uda + \cdot\cdot) + \varphi(au + \cdot\cdot)\delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi(u\delta u_1 + \cdot\cdot) \end{array} \right\}.$$

Offenbar ist:

$$(\alpha.)\quad \delta(au + bv + cw) = (u\delta a + v\delta b + w\delta c) + (a\delta u + b\delta v + c\delta w),$$

$$(\beta.)\quad \delta(uu_1 + vv_1 + ww_1) = (u\delta u_1 + v\delta v_1 + w\delta w_1) + (u_1\delta u + v_1\delta v + w_1\delta w),$$

und zugleich [nach Seite 127 (16a.)]:

$$(\gamma.)\quad \begin{aligned} \delta u &= w d\mathfrak{b} - v d\mathfrak{c}, \\ \delta v &= u d\mathfrak{c} - w d\mathfrak{a}, \\ \delta w &= v d\mathfrak{a} - u d\mathfrak{b}. \end{aligned}$$

Im gegenwärtigen Fall ist aber [vgl. (14.)] das Axensystem $[x, y, z]$ eingefügt in die ponderable Masse des starren Körpers M. Folglich sind die Drehungen $d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{c}$, welche der Körper M um diese Axen x, y, z während der Zeit dt ausführt, alle $= 0$; so dass also die Formeln $(\gamma.)$ übergehen in

$$(\delta.)\quad \delta u = \delta v = \delta w = 0.$$

Ueberdies ist [vgl. Seite 129 (20a.)]:

$$(\varepsilon.)\quad \delta a = da, \quad \delta b = db, \quad \delta c = dc.$$

Durch diese Relationen $(\delta.)$, $(\varepsilon.)$ gewinnen aber die Gleichungen $(\alpha.)$, $(\beta.)$ folgende Gestalt:

$$(\mathsf{A}.)\quad \delta(au + bv + cw) = u da + v db + w dc,$$

$$(\mathsf{B}.)\quad \delta(uu_1 + vv_1 + ww_1) = u\delta u_1 + v\delta v_1 + w\delta w_1.$$

Und mit Rücksicht auf diese Gleichungen (A.), (B.) ist die Formel (20.) auch so darstellbar:

$$(21.)\quad dL = D\tau D\tau_1 \begin{cases} [\varrho(au + \cdot\cdot)(au_1 + \cdot\cdot) + \varrho^*(uu_1 + \cdot\cdot)]\, dr \\ + \varphi(au_1 + \cdot\cdot)\delta(au + \cdot\cdot) + \varphi(au + \cdot\cdot)\delta(au_1 + \cdot\cdot) + \chi\delta(uu_1 + \cdot\cdot \end{cases}$$

Das der Betrachtung zu Grunde gelegte, mit M starr verbundene Axensystem (14.) kommt in dieser Formel (21.) nur in sofern in Betracht, als es zur Berechnung der Trinome

$$au + bv + cw, \quad au_1 + bv_1 + cw_1, \quad \text{und} \quad uu_1 + vv_1 + ww_1$$

dient. Hieraus aber folgt sofort [vgl. Seite 136], dass die Formel (21.) auch dann noch in Kraft bleibt, wenn man bei ihrer Anwendung jenes Axensystem (14.) durch ein beliebiges anderes, etwa in *beliebiger Bewegung* begriffenes Axensystem ersetzt. Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1 und überdies ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$(22.)\quad M, \; M_1 \quad \textit{und} \quad [x, y, z]$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Ueberdies mögen innerhalb der Körper M und M_1 irgend welche elektrische Bewegungen vorhanden sein.

Mit Bezug auf irgend zwei Massenelemente DM und DM_1 der beiden Körper seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} &DM,\ D\tau,\ i,\ u,\ v,\ w, \\ &DM_1,\ D\tau_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1, \quad [\textit{vgl. Seite 133 } (2.)] \end{aligned} \tag{23.}$$

Zugleich mag zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1, \end{aligned} \tag{24.}$$

wo a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \longrightarrow DM)$ sein sollen. Alsdann wird die von den beiden Stromelementen iDM und $i_1 DM_1$ während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit

$$dL = (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM} \tag{25.}$$

folgenden Werth haben [vgl. (21.)]:

$$dL = D\tau D\tau_1 \Big\{ [\varrho T T_1 + \varrho^* S]\, dr + \varphi\delta(TT_1) + \chi\,\delta S \Big\}, \tag{26.}$$

wo als Argumente der Functionen ϱ, ϱ^*, φ, χ jene Linie $r(DM_1 \rightarrow DM)$ zu denken ist.

§ 14.

Das Helmholtz'sche Princip des vollständigen Differentials, in seiner Anwendung auf körperliche Stromelemente.

Wir haben früher [Seite 113 (8.)] die Bedingungen dafür aufgestellt, dass die elektromotorischen und ponderomotorischen Kräfte mit dem Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials in Einklang sind für *lineare* Stromelemente. Für *körperliche* Stromelemente bedarf es in dieser Beziehung einer *neuen* Untersuchung, wie schon daraus hervorgeht, dass beim Uebergange von linearen zu körperlichen Elementen in unsere Untersuchungen eine *neue* Annahme, nämlich die Hypothese Delta, hineingetreten ist.

Wir wollen nun, um näher auf diese Dinge einzugehen, an den Vorstellungen unseres letzten Satzes festhalten, so dass also nach (26.) die Formel zu notiren ist:

$$dL = D\tau D\tau_1 \Big\{ [\varrho T T_1 + \varrho^* S]\, dr + \varphi\,\delta(TT_1) + \chi\delta S \Big\}. \tag{27.}$$

Gleichzeitig wird aber nach Seite 149 (17.) auch folgende Formel stattfinden:

$$(28.)\quad d\mathfrak{L} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} 2[\varkappa TT_1 + \varkappa^* S]\,dr + (\lambda + \mu)\,\delta(TT_1) + 2\nu\delta S \\ + \pi\Delta(TT_1) + \pi^*\Delta S \end{Bmatrix}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt durch Addition:

$$(29.)\quad dL + d\mathfrak{L} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [(\varrho + 2\varkappa)TT_1 + (\varrho^* + 2\varkappa^*)S]\,dr + (\varphi + \lambda + \mu)\delta(TT_1) \\ + (\chi + 2\nu)\,\delta S + \pi\Delta(TT_1) + \pi^*\Delta S \end{Bmatrix}$$

Nun hatten sich früher [Seite 113 (8.)], durch Anwendung des Helmholtz'schen Princips des vollständigen Differentials auf *lineare* Elemente, folgende vier Relationen ergeben:

$$(30.)\quad \begin{cases} \varrho + 2\varkappa = \dfrac{d\pi}{dr}, & \varphi + \lambda + \mu = \pi, \\ \varrho^* + 2\varkappa^* = \dfrac{d\pi^*}{dr}, & \chi + 2\nu = \pi^*. \end{cases}$$

Nimmt man an, dass diese vier Relationen wirklich erfüllt sind, so verwandelt sich hiedurch der in (29.) in den geschweiften Klammern stehende Ausdruck in:

$$\left[\frac{d\pi}{dr}TT_1 + \frac{d\pi^*}{dr}S\right]dr + \pi\,\delta(TT_1) + \pi^*\delta S$$
$$+ \pi\Delta(TT_1) + \pi^*\Delta S.$$

Dieser Ausdruck aber ist (weil $\delta + \Delta = d$ ist) auch so darstellbar:

$$\left[\frac{d\pi}{dr}TT_1 + \frac{d\pi^*}{dr}S\right]dr + \pi d(TT_1) + \pi^* dS,$$

oder auch so:

$$d[\pi TT_1 + \pi^* S];$$

so dass also die Formel (29.) die Gestalt erhält:

$$(31.)\quad dL + d\mathfrak{L} = d\Big\{D\tau D\tau_1[\pi TT_1 + \pi^* S]\Big\};$$

und dieser Ausdruck entspricht dem in Rede stehenden Princip.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Durch Anwendung des Helmholtz'schen Princips des vollständigen Differentials auf lineare Stromelemente haben sich früher die vier Relationen (30.) *ergeben. Sind aber diese vier Relationen erfüllt, so wird jenes Princip, wie die gegenwärtige Betrachtung zeigt, auch bereits erfüllt sein für körperliche Stromelemente.*



Achter Abschnitt.

Nähere Bestimmung des ponderomotorischen und elektromotorischen Elementargesetzes. Die Helmholtz'schen Differentialgleichungen.

Die eilf unbekannten (blos von r abhängenden) Functionen

$$\varrho,\ \varrho^*,\ \varphi,\ \chi,$$
$$\varkappa,\ \varkappa^*,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \pi,\ \pi^*$$

sind im sechsten Abschnitt [vgl. Seite 116], bis auf zwei derselben, berechnet worden. Zur vollständigen Bestimmung derselben soll nun gegenwärtig Gebrauch gemacht werden von dem allgemeinen *Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction*, sowie auch von einer gewissen gelegentlich schon von Helmholtz gemachten Annahme. Da ich auf die Uebereinstimmung mit einem so hervorragenden Forscher wie Helmholtz grosses Gewicht lege, so werde ich mir erlauben, die in Rede stehende Annahme als *Helmholtz'sche Annahme* zu bezeichnen.

Diese beiden Hülfsmittel werden ausreichend sein, um jene eilf Functionen, bis auf eine noch unbekannt bleibende Constante k, vollständig zu bestimmen. Die Constante k ist übrigens ohne Einfluss auf das von uns gesuchte *ponderomotorische Elementargesetz*. In der That wird dieses letztere, im Laufe unserer Untersuchungen, in völlig bestimmter und fertiger Gestalt uns entgegentreten, und zwar als völlig identisch mit dem berühmten *Ampère'schen Gesetz;* so dass also in solcher Weise ein vielfach angegriffener und von Vielen wohl schon aufgegebener Pfeiler des theoretischen Gebäudes der Elektrodynamik durch mühsame Untersuchungen zurückerobert sein dürfte.

Andrerseits aber wird sich im Verlaufe unserer Untersuchungen für das *Elementargesetz der elektromotorischen Kräfte* eine sehr complicirte, noch mit jener Constanten k behaftete Formel ergeben. Allerdings wird sich zeigen, dass diese complicirte Formel einen recht einfachen Charakter anzunehmen im Stande ist, jedoch nur dann, wenn $k = -1$ gedacht wird.



Schliesslich werden wir, auf Grund dieses elektromotorischen Elementargesetzes, zu den berühmten *Helmholtz'schen Differentialgleichungen von 1870* gelangen; wobei sich zeigen wird, dass jene Constante k völlig identisch ist mit der Helmholtz'schen Constante k.

§ 1.

Zwei neue Stützpunkte für die anzustellenden Untersuchungen.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dass das allgemeine Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction auch für die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs volle Gültigkeit besitzen muss, und zwar für Körper, in denen ganz beliebige elektrische Strömungen stattfinden. Dies aber überträgt sich, weil jene Strömungen ganz *beliebig* zu denken sind, ohne Weiteres auf die einzelnen *Elemente* der Körper; so dass man also sagen kann:

Das Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction *wird gültig sein für diejenigen ponderomotorischen Wirkungen, welche zwei elektrische Stromelemente gegenseitig aufeinander ausüben.*

Ueberdies werden wir im Folgenden, als einen weiteren Stützpunkt für unsere Untersuchungen, eine gewisse gelegentlich schon von Helmholtz gemachte Annahme benutzen. Dieselbe lautet:

Eine Helmholtz'sche Annahme: *Die ponderomotorischen und elektromotorischen Fernwirkungen ungeschlossener elektrischer Ströme sind ebenderselben Potenz der Entfernung proportional, wie die betreffenden Fernwirkungen geschlossener elektrischer Ströme.*

In seiner Abhandlung von 1870 sagt nämlich Helmholtz [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 549], er mache die Annahme, dass die Fernwirkungen *„ungeschlossener"* Ströme keiner andern Potenz der Entfernung proportional seien, als die aller *„andern"* elektrischen Wirkungen. Dass diese Worte in dem soeben genannten Sinne zu verstehen sind, geht theils aus ihrer Umständlichkeit, theils aber auch aus der Art und Weise hervor, in welcher die in Rede stehende Annahme von Helmholtz zur Anwendung gebracht wird.

Beispiel. — Sind zwei lineare elektrische Stromringe M und M_1 gegeben, mit den Stromstärken J und J_1, so hat die vom Ringe M_1 auf den Ring M während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit, nach dem betreffenden F. Neumann'schen Integralgesetz, folgenden Werth [vgl. Seite 67 (15.)]:

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = Jd(J_1 Q).$$

Substituirt man hier für Q seine eigentliche Bedeutung [Seite 57 (9.)], so folgt:

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = -A^2 J d\left(J_1 \iint \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds\, Ds_1\right).$$

Zur Vereinfachung wollen wir jetzt voraussetzen, dass die beiden Ringe M und M_1 nicht in drehenden, sondern nur in irgend welchen *fortschreitenden* Bewegungen begriffen sind, und dass überdies J_1 *constant* sei. Alsdann geht die vorstehende Formel über in:

(A.) $$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = +A^2 J J_1 \iint \frac{(\cos\varepsilon)\, dr}{r^2} Ds\, Ds_1.$$

Fassen wir nun aber zwei einzelne *Elemente* $DM(Ds)$ und $DM_1(Ds_1)$ der beiden Ringe ins Auge, so wird die von DM_1 auf DM während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit, zufolge des von uns gefundenen Elementargesetzes [Seite 89 (27.)], den Werth haben:

(B.) $$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = J J_1 Ds\, Ds_1 [\varkappa \cos\vartheta \cos\vartheta_1 + \varkappa^* \cos\varepsilon]\, dr;$$

denn es ist zu beachten, dass, in Folge jener soeben von uns gemachten Voraussetzungen, die Winkel ϑ, ϑ_1, ε und ebenso auch J_1 *constant* bleiben, und dass daher alle übrigen Glieder des citirten Gesetzes wegfallen.

Die Formel (A.) bezieht sich auf *geschlossene* Ströme, andrerseits aber die Formel (B.) auf *ungeschlossene* Ströme, nämlich auf zwei einzelne Stromelemente. Zufolge jener Helmholtz'schen Annahme müssen nun die Wirkungen (A.) und (B.) *ein und derselben* Potenz von r entsprechen. Folglich müssen die Functionen

(C.) $$\varkappa \text{ und } \varkappa^*$$

umgekehrt proportional mit r^2 sein.

Nun ist, wie früher [Seite 116 (12.)] constatirt wurde:

(D.) $$r\varkappa^* = r\frac{dv}{dr} - \omega,$$

wo ω seine bekannte Bedeutung hat [Seite 114 (4.)]:

(E.) $$\omega = -\frac{A^2}{r}.$$

Substituirt man diesen Werth von ω in der Formel (D.), so erhält man sofort:

(F.) $$r\varkappa^* = r\frac{dv}{dr} + \frac{A^2}{r}.$$

Da nun, nach (C.), $\varkappa^*$ umgekehrt proportional mit r^2 ist, so ergiebt sich aus (F.), dass die Function v umgekehrt proportional mit r selber ist; so dass man also schreiben kann:



(G.) $$v = -\frac{A^2 K}{r},$$

wo alsdann K eine noch unbekannte Constante vorstellt. Von den Formeln (E.) und (G.) ist weiterhin Gebrauch zu machen.

§ 2.

Die allgemeinen Vorstellungen und Bezeichnungen des gegenwärtigen Abschnitts.

Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte

(1.) $$M, \ M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z]$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Ueberdies mögen im Innern der Körper M und M_1 irgend welche elektrische Bewegungen stattfinden.

Mit Bezug auf irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

(2.) $$\begin{aligned} &DM, \ D\tau, \ x, \ y, \ z, \ i, \ u, \ v, \ w, \\ &DM_1, \ D\tau_1, \ x_1, \ y_1, \ z_1, \ i_1, \ u_1, \ v_1, \ w_1, \end{aligned}$$ [vgl. Seite 133 (2.)],

Ferner sei gesetzt:

(3.) $$\begin{gathered} r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ a = \frac{x - x_1}{r}, \quad b = \frac{y - y_1}{r}, \quad c = \frac{z - z_1}{r}. \end{gathered}$$

Hieraus ergiebt sich z. B., was die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse betrifft, folgende Formel:

(4.) $$r\,dr = (x - x_1)\,d(x - x_1) + (y - y_1)\,d(y - y_1) + (z - z_1)\,d(z - z_1),$$

wofür man, unter Anwendung der in (3.) genannten Richtungscosinus a, b, c, auch schreiben kann:

(5.) $$dr = a\,d(x - x_1) + b\,d(y - y_1) + c\,d(z - z_1).$$

Ferner sollen

(6.) $$d\mathfrak{a}, \ d\mathfrak{b}, \ d\mathfrak{c} \quad \text{und} \quad d\mathfrak{a}_1, \ d\mathfrak{b}_1, \ d\mathfrak{c}_1$$

die kleinen Drehungen sein, welche die Körper M und M_1 während der Zeit dt um die Axen x, y, z (1.) respective im Sinne yz, zx, xy ausführen; so dass also z. B. die der Zeit dt entsprechenden convectiven Zuwüchse $\delta u, \delta v, \delta w$ und $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ folgende Werthe besitzen [vgl. Seite 127 (16a.)]:

(7.) $$\begin{aligned} \delta u &= w\,d\mathfrak{b} - v\,d\mathfrak{c}, & \delta u_1 &= w_1\,d\mathfrak{b}_1 - v_1\,d\mathfrak{c}_1, \\ \delta v &= u\,d\mathfrak{c} - w\,d\mathfrak{a}, & \delta v_1 &= u_1\,d\mathfrak{c}_1 - w_1\,d\mathfrak{a}_1, \\ \delta w &= v\,d\mathfrak{a} - u\,d\mathfrak{b}, & \delta w_1 &= v_1\,d\mathfrak{a}_1 - u_1\,d\mathfrak{b}_1. \end{aligned}$$

Was übrigens jene kleinen Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ betrifft, so kann man z. B. die Grösse

$$d\mathfrak{a} \tag{8.}$$

auch bezeichnen als die Drehung des Körpers M um irgend eine zur x-Axe *parallele* Axe x'. [Vgl. den ersten Satz Seite 123].

Endlich mag zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\begin{aligned} T &= au + bv + cw\,, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1\,, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1\,; \end{aligned} \tag{9.}$$

so dass also z. B. T die Componente der Strömung $i(u, v, w)$ nach der Richtung $r(a, b, c)$ vorstellt.

§ 3.

Nähere Untersuchung des ponderomotorischen Elementargesetzes.

Für die von den beiden Stromelementen DM, DM_1 (2.) während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit*

$$dL = (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM} \tag{10.}$$

werden wir im gegenwärtigen Paragraph zwei ganz verschiedene Ausdrücke aufstellen, und sodann diese beiden Ausdrücke miteinander vergleichen.

Erster Ausdruck für dL. — Diese Arbeit dL hat offenbar, ihrer eigentlichen Definition nach, den Werth

$$dL = (Xdx + Ydy + Zdz) + (X_1dx_1 + Y_1dy_1 + Z_1dz_1), \tag{11.}$$

wo X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 die von DM_1 auf DM, und die umgekehrt von DM auf DM_1 ausgeübten ponderomotorischen Kräfte bezeichnen, während dx, dy, dz und dx_1, dy_1, dz_1 die Verschiebungen der beiden Elemente DM und DM_1 während der Zeit dt vorstellen.

Es lässt sich nun für dL noch ein zweiter Ausdruck angeben. Und durch Vergleichung dieser beiden Ausdrücke werden wir sodann die Werthe der noch völlig *unbekannten* Kräfte X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 näher zu bestimmen suchen.

Zweiter Ausdruck für dL. — Nach dem schon früher von uns gefundenen Elementargesetz [Seite 155 (26.)] ist:

$$dL = D\tau D\tau_1 \Big\{[\varrho TT_1 + \varrho^* S]\,dr + \varphi(T_1\delta T + T\delta T_1) + \chi\delta S\Big\}. \tag{12.}$$

Hier sind T, T_1, S die in (9.) genannten Trinome; und es ist daher z. B.:

$$\delta T = (u\delta a + v\delta b + w\delta c) + (a\delta u + b\delta v + c\delta w).$$

Die $\delta a, \delta b, \delta c$ sind aber identisch mit den da, db, dc [vgl. Seite 129 (20a.)]; so dass man also zur ersten Formel folgenden Systems gelangt:

$$(13.)\quad \begin{cases} \delta T = (u\,da + v\,db + w\,dc) + (a\delta u + b\delta v + c\delta w), \\ \delta T_1 = (u_1 da + v_1 db + w_1 dc) + (a\delta u_1 + b\delta v_1 + c\delta w_1), \\ \delta S = (u_1\delta u + v_1\delta v + w_1\delta w) + (u\delta u_1 + v\delta v_1 + w\delta w_1), \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind.

Nun ist nach (3.): $ra = x - x_1$, mithin:

$$rda + adr = dx - dx_1,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(14.)\qquad da = \frac{dx - dx_1}{r} - \frac{adr}{r}.$$

Analoge Ausdrücke gelten für db, dc. Multiplicirt man diese für da, db, dc geltenden Formeln mit u, v, w, und addirt, so erhält man:

$$(15.)\quad uda + vdb + wdc = \frac{u(dx - dx_1) + v(dy - dy_1) + w(dz - dz_1)}{r} - \frac{Tdr}{r},$$

wo T das Trinom (9.) vorstellt. Desgleichen ergiebt sich offenbar:

$$(16.)\quad u_1da + v_1db + w_1dc = \frac{u_1(dx - dx_1) + v_1(dy - dy_1) + w_1(dz - dz_1)}{r} - \frac{T_1dr}{r}.$$

Substituirt man diese Werthe (15.), (16.) und zugleich auch die Werthe (7.) in den Formeln (13.), so erhält man:

$$(17.)\quad \begin{cases} \delta T = \dfrac{u(dx - dx_1) + \cdot\cdot}{r} - \dfrac{Tdr}{r} + [(cv - bw)\,d\mathfrak{a} + \cdot\cdot], \\ \delta T_1 = \dfrac{u_1(dx - dx_1) + \cdot\cdot}{r} - \dfrac{T_1dr}{r} + [(cv_1 - bw_1)\,d\mathfrak{a}_1 + \cdot\cdot], \\ \delta S = [(w_1v - v_1w)\,d\mathfrak{a} + \cdot\cdot] + [(wv_1 - vw_1)\,d\mathfrak{a}_1 + \cdot\cdot]. \end{cases}$$

Substituirt man nun ferner diese Werthe (17.) in der Formel (12.), so ergiebt sich:

$$(18.)\quad dL = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varrho TT_1 + \varrho^* S]\,dr \\ + \varphi\Big[\dfrac{T_1u + Tu_1}{r}(dx - dx_1) + \cdot\cdot\Big] - 2\varphi\,\dfrac{TT_1dr}{r} \\ + [(\varphi T_1(cv - bw) + \chi(w_1v - v_1w))\,d\mathfrak{a} + \cdot\cdot] \\ + [(\varphi T(cv_1 - bw_1) + \chi(wv_1 - vw_1))\,d\mathfrak{a}_1 + \cdot\cdot] \end{Bmatrix}.$$

Dieser Ausdruck aber kann dadurch, dass man für dr seinen Werth (5.) einsetzt:

$$(19.)\qquad dr = a(dx - dx_1) + b(dy - dy_1) + c(dz - dz_1),$$

in folgende Gestalt versetzt werden:

$$(20.)\quad dL = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} + (\Xi dx + \mathsf{H} dy + \mathsf{Z} dz) + (\Xi_1 dx_1 + \mathsf{H}_1 dy_1 + \mathsf{Z}_1 dz_1) \\ + (\mathsf{A} d\mathfrak{a} + \mathsf{B} d\mathfrak{b} + \Gamma d\mathfrak{c}) + (\mathsf{A}_1 d\mathfrak{a}_1 + \mathsf{B}_1 d\mathfrak{b}_1 + \Gamma_1 d\mathfrak{c}_1) \end{Bmatrix}.$$

Hier haben alsdann Ξ, Ξ_1 die Bedeutungen:

$$(21.)\qquad \begin{cases} \Xi = \left([\varrho TT_1 + \varrho^* S] - 2\varphi \frac{TT_1}{r}\right) a + \varphi \frac{T_1 u + T u_1}{r}, \\ \Xi_1 = -\Xi; \end{cases}$$

analoge Bedeutungen haben H, H_1 und Z, Z_1. Ferner haben A, A_1 die Bedeutungen:

$$(22.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \varphi T_1 (cv - bw) + \chi (w_1 v - v_1 w), \\ \mathsf{A}_1 = \varphi T (cv_1 - bw_1) + \chi (w v_1 - v w_1); \end{cases}$$

und analoge Bedeutungen haben B, B_1 und Γ, Γ_1.

Vergleichung der beiden Ausdrücke. — Die beiden für dL erhaltenen Ausdrücke (11.) und (20.) müssen unter allen Umständen, also z. B. für beliebige Werthe von dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1, $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$, einander gleich sein; so dass man also zu folgenden zwölf Gleichungen gelangt:

$$(23.)\qquad \begin{cases} X = \Xi\, D\tau D\tau_1, \\ Y = \mathsf{H}\, D\tau D\tau_1, \\ Z = \mathsf{Z}\, D\tau D\tau_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = \Xi_1 D\tau D\tau_1, \\ Y_1 = \mathsf{H}_1 D\tau D\tau_1, \\ Z_1 = \mathsf{Z}_1 D\tau D\tau_1, \end{cases}$$

$$(24.)\qquad \begin{cases} 0 = \mathsf{A}\, D\tau D\tau_1, \\ 0 = \mathsf{B}\, D\tau D\tau_1, \\ 0 = \Gamma\, D\tau D\tau_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \mathsf{A}_1 D\tau D\tau_1, \\ 0 = \mathsf{B}_1 D\tau D\tau_1, \\ 0 = \Gamma_1 D\tau D\tau_1. \end{cases}$$

Dabei ist beständig im Auge zu behalten, dass Ξ, H, Z, Ξ_1, H_1, Z_1, A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 nur *Abbreviaturen* sind für die in (21.), (22.) angegebenen Ausdrücke.

Nach (24.) müssen die sechs Grössen

$$(25.)\qquad \mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \Gamma,\ \mathsf{A}_1,\ \mathsf{B}_1,\ \Gamma_1 \text{ alle } = 0$$

sein, und zwar für *beliebige* Werthe der Argumente r, a, b, c, u, v, w, u_1, v_1, w_1. Hieraus aber folgt, falls man die eigentlichen Bedeutungen (22.) jener sechs Grössen beachtet, dass die Functionen φ und χ identisch $= 0$ sein müssen:

$$(26.)\qquad \varphi = 0, \quad \chi = 0.$$

Solches constatirt, reduciren sich die Ausdrücke Ξ, Ξ_1 (21.) auf:

$\Xi = (\varrho TT_1 + \varrho^* S) a$, und $\Xi_1 = -\Xi$. Desgleichen wird:

$\mathsf{H} = (\varrho TT_1 + \varrho^* S) b$, und $\mathsf{H}_1 = -\mathsf{H}$, und ferner:

$\mathsf{Z} = (\varrho TT_1 + \varrho^* S) c$, und $\mathsf{Z}_1 = -\mathsf{Z}$;

so dass also die Formeln (23.) übergehen in:

$$(27.)\quad \begin{cases} X = D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,a, \\ Y = D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,b, \\ Z = D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,c, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 = -X, \\ Y_1 = -Y, \\ Z_1 = -Z. \end{cases}$$

Hiemit aber sind die gesuchten Kräfte X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 völlig bestimmt, bis auf die noch unbekannten (blos von r abhängenden) Functionen ϱ und ϱ^*. Insbesondre zeigt sich, dass diese beiden Kräfte einander gleich und entgegengesetzt sind, ferner dass sie in die Linie $r(a, b, c)$ fallen, kurz, dass sie gewöhnliche Centralkräfte sind. Uebrigens ist es leicht, jene unbekannten Functionen ϱ, ϱ^* zu finden. Durch die Formeln (26.) reduciren sich nämlich die früher für ϱ, ϱ^* erhaltenen Relationen [Seite 116 (12.)] auf

$$\varrho + \varrho^* = \frac{d\omega}{dr} \quad \text{und} \quad \varrho^* = \frac{2\omega}{r}.$$

Bekanntlich ist aber [vgl. Seite 114 (4.)]: $\omega = -\frac{A^2}{r}$. Somit erhält man:

$$(28.)\qquad \varrho = \frac{3A^2}{r^2} \quad \text{und} \quad \varrho^* = -\frac{2A^2}{r^2}.$$

So schön und einfach diese Resultate aber auch sein mögen, so sind dieselben doch noch gewissen Bedenken unterworfen, auf welche im folgenden Paragraph näher eingegangen werden soll.

§ 4.

Ersetzung des vorigen Paragraphs durch eine tiefer greifende Untersuchung von grösserer Sicherheit.

Man könnte der Ansicht sein, dass die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zweier elektrischer Stromelemente DM und DM_1 nicht nur in gewöhnlichen Kräften, sondern daneben auch noch in gewissen *Drehungsmomenten* bestünde. Kurz, man könnte der schon früher [Seite 62 und Seite 90] besprochenen Conjectur beipflichten.

Der erste Ausdruck für dL (11.) würde alsdann zu streichen, und durch folgenden zu ersetzen sein:

$$(29.)\quad dL = \begin{Bmatrix} +(Xdx + Ydy + Zdz) + (X_1dx_1 + Y_1dy_1 + Z_1dz_1) \\ +(\Delta^x d\mathfrak{a} + \Delta^y d\mathfrak{b} + \Delta^z d\mathfrak{c}) + (\Delta_1^x d\mathfrak{a}_1 + \Delta_1^y d\mathfrak{b}_1 + \Delta_1^z d\mathfrak{c}_1) \end{Bmatrix},$$

wo Δ^x, Δ^y, Δ^z und Δ_1^x, Δ_1^y, Δ_1^z das von DM_1 auf DM, und das umgekehrt von DM auf DM_1 ausgeübte Drehungsmoment bezeichnen, während X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 nach wie vor die gewöhnlichen Kräfte vorstellen. [Vgl. Seite 62 (14α.)]. Dabei haben $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ und $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ die schon in (6.), (8.) genannten Bedeutungen.

Wenn nun aber auch, in Folge der hier gemachten Conjectur, der *erste* Ausdruck für dL in solcher Weise sich modificirt, so wird dabei doch

Der zweite Ausdruck für dL (20.) ungeändert derselbe bleiben, also nach wie vor lauten:

$$(30.)\quad dL = D\tau D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} +(\Xi dx + \mathsf{H} dy + \mathsf{Z} dz) + (\Xi_1 dx_1 + \mathsf{H}_1 dy_1 + \mathsf{Z}_1 dz_1) \\ +(\mathsf{A} d\mathfrak{a} + \mathsf{B} d\mathfrak{b} + \Gamma d\mathfrak{c}) + (\mathsf{A}_1 d\mathfrak{a}_1 + \mathsf{B}_1 d\mathfrak{b}_1 + \Gamma_1 d\mathfrak{c}_1) \end{array} \right\},$$

wo Ξ, H, Z, Ξ_1, H_1, Z_1, A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 die in (21.), (22.) angegebenen Abbreviaturen vorstellen.

Vergleichung der beiden Ausdrücke. — Die beiden Ausdrücke (29.) und (30.) müssen für beliebige Werthe von dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1, $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$, $d\mathfrak{a}_1$, $d\mathfrak{b}_1$, $d\mathfrak{c}_1$ einander gleich sein. Somit ergeben sich folgende zwölf Gleichungen:

$$(31.)\quad \left\{ \begin{array}{l} X = \Xi D\tau D\tau_1, \\ Y = \mathsf{H} D\tau D\tau_1, \\ Z = \mathsf{Z} D\tau D\tau_1, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \Xi_1 D\tau D\tau_1, \\ Y_1 = \mathsf{H}_1 D\tau D\tau_1, \\ Z_1 = \mathsf{Z}_1 D\tau D\tau_1, \end{array} \right.$$

$$(32.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^x = \mathsf{A} D\tau D\tau_1, \\ \Delta^y = \mathsf{B} D\tau D\tau_1, \\ \Delta^z = \Gamma D\tau D\tau_1, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^x = \mathsf{A}_1 D\tau D\tau_1, \\ \Delta_1^y = \mathsf{B}_1 D\tau D\tau_1, \\ \Delta_1^z = \Gamma_1 D\tau D\tau_1. \end{array} \right.$$

Substituirt man hier für Ξ, H, Z, Ξ_1, H_1, Z_1, A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 ihre eigentlichen Bedeutungen (21.), (22.), so erhält man durch Addition sofort:

$$(33.)\quad \left\{ \begin{array}{l} X + X_1 = 0, \\ Y + Y_1 = 0, \\ Z + Z_1 = 0, \end{array} \right.$$

und ferner:

$$(34.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^x + \Delta_1^x = \varphi[T_1(cv - bw) + T(cv_1 - bw_1)], \\ \Delta^y + \Delta_1^y = \varphi[T_1(aw - cu) + T(aw_1 - cu_1)], \\ \Delta^z + \Delta_1^z = \varphi[T_1(bu - av) + T(bu_1 - av_1)]. \end{array} \right.$$

Nun repräsentiren offenbar

$$X + X_1,\ Y + Y_1,\ Z + Z_1 \quad \text{und} \quad \Delta^x + \Delta_1^x,\ \Delta^y + \Delta_1^y,\ \Delta^z + \Delta_1^z$$

diejenige translatorische Kraft und dasjenige Drehungsmoment, welche auf die beiden Elemente DM, DM_1 zusammengenommen, in Folge ihrer gegenseitigen Einwirkung, ausgeübt werden würden, falls sie starr mit einander verbunden wären. Jene translatorische Kraft ist, nach (33.), $= 0$; hingegen hat das Drehungsmoment, nach (34.), einen bestimmten Werth.

Die Formeln (33.), (34.) zeigen also, dass die gegenseitige Einwirkung der beiden Elemente DM und DM_1 aufeinander ein gewisses Drehungsmoment erzeugt, welches die beiden Elemente, falls sie starr miteinander verbunden wären, in Bewegung zu setzen suchen würde. Dies aber widerspricht dem Gesetze der Gleichheit der Action und Reaction [Seite 158]. Folglich muss jenes Drehungsmoment (34.) stets $= 0$ sein, und zwar für *beliebige* Werthe der Argumente $r, a, b, c, u, v, w, u_1, v_1, w_1$. Und hieraus folgt weiter, dass die Function φ identisch $= 0$ sein muss:

$$\varphi = 0. \tag{35.}$$

Nun ist aber, wie schon früher [Seite 116 (10.)] constatirt wurde: $\varphi = r\frac{d\chi}{dr}$. Somit ergiebt sich:

$$\chi = (\text{Const.}). \tag{36.}$$

Durch diese Ergebnisse (35.), (36.) reduciren sich nun jene in (21.), (22.) mit Ξ, H, Z, Ξ_1, H_1, Z_1 und mit A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 bezeichneten Ausdrücke auf:

$$\begin{aligned} \Xi &= (\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,a, & \Xi_1 &= -\Xi, \\ \mathsf{H} &= (\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,b, & \mathsf{H}_1 &= -\mathsf{H}, \\ \mathsf{Z} &= (\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,c, & \mathsf{Z}_1 &= -\mathsf{Z}, \end{aligned}$$

und auf:

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= (\text{Const.})\,(w_1 v - v_1 w), & \mathsf{A}_1 &= -\mathsf{A}, \\ \mathsf{B} &= (\text{Const.})\,(u_1 w - w_1 u), & \mathsf{B}_1 &= -\mathsf{B}, \\ \Gamma &= (\text{Const.})\,(v_1 u - u_1 v), & \Gamma_1 &= -\Gamma; \end{aligned}$$

so dass also unsere zwölf Gleichungen (31.), (32.) folgende Gestalt gewinnen:

$$\left\{\begin{aligned} X &= D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,a, \\ Y &= D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,b, \\ Z &= D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)\,c, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= -X, \\ Y_1 &= -Y, \\ Z_1 &= -Z, \end{aligned}\right. \tag{37.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^x &= D\tau D\tau_1(\text{Const.})\,(w_1 v - v_1 w), \\ \Delta^y &= D\tau D\tau_1(\text{Const.})\,(u_1 w - w_1 u), \\ \Delta^z &= D\tau D\tau_1(\text{Const.})\,(v_1 u - u_1 v), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_1^x &= -\Delta^x, \\ \Delta_1^y &= -\Delta^y, \\ \Delta_1^z &= -\Delta^z. \end{aligned}\right. \tag{38.}$$

Zufolge (38.) würden die von den beiden Elementen DM und DM_1 aufeinander ausgeübten Drehungsmomente Δ^x, Δ^y, Δ^z und Δ_1^x, Δ_1^y, Δ_1^z von der Entfernung r *unabhängig* sein, also (unter sonst gleichen Umständen) ein und dieselben Werthe haben, einerlei ob der gegenseitige Abstand der beiden Elemente wenige Millimeter oder Tausende von Meilen beträgt; — was offenbar absurd ist. Folglich muss die in (38.) enthaltene (Const.) $= 0$ sein.

Solches eruirt, ergiebt sich nun aus (35.), (36.):

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \chi = 0, \tag{39.}$$

und andrerseits aus (37.), (38.):

$$\left\{\begin{array}{l} X = D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)a, \\ Y = D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)b, \\ Z = D\tau D\tau_1(\varrho TT_1 + \varrho^* S)c, \\ \Delta^x = \Delta^y = \Delta^z = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = -X, \\ Y_1 = -Y, \\ Z_1 = -Z, \\ \Delta_1^x = \Delta_1^y = \Delta_1^z = 0. \end{array}\right. \tag{40.}$$

Ueberdies aber nehmen die Relationen Seite 116 (12.), mit Hinblick auf (39.), die einfache Gestalt an:

$$\varrho + \varrho^* = \frac{d\omega}{dr} \quad \text{und} \quad \varrho^* = \frac{2\omega}{r}, \quad \text{wo } \omega = -\frac{A^2}{r};$$

und hieraus folgt sofort:

$$\varrho = \frac{3A^2}{r^2} \quad \text{und} \quad \varrho^* = -\frac{2A^2}{r^2}. \tag{41.}$$

Diese Resultate (39.), (40.), (41.) *sind völlig identisch mit den Resultaten* (26.), (27.), (28.) *des vorigen Paragraphs. Wenn man also auch solche ponderomotorischen Drehungsmomente, mit denen die beiden Stromelemente einander zu drehen bestrebt sind, a priori als möglich erachtet, so ergiebt sich doch, auf Grund der soeben angestellten Untersuchungen* [*vgl.* (40.)], *dass die Werthe dieser Drehungsmomente* $= 0$ *sein müssen.*

§ 5.

Vervollständigung der erhaltenen Resultate. Man gelangt zum Ampère'schen Gesetz.

Substituirt man die Werthe (41.) in (40.), so ergiebt sich sofort:

$$\left\{\begin{array}{l} X = A^2 D\tau\, D\tau_1 \dfrac{(3TT_1 - 2S)a}{r^2}, \\ Y = A^2 D\tau\, D\tau_1 \dfrac{(3TT_1 - 2S)b}{r^2}, \\ Z = A^2 D\tau\, D\tau_1 \dfrac{(3TT_1 - 2S)c}{r^2}, \\ \Delta^x = \Delta^y = \Delta^z = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = -X, \\ Y_1 = -Y, \\ Z_1 = -Z, \\ \Delta_1^x = \Delta_1^y = \Delta_1^z = 0. \end{array}\right. \tag{42.}$$

Zufolge dieser Formeln (42.) besteht also die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung der betrachteten beiden Stromelemente blos in einer *gewöhnlichen Centralkraft* R, welche, repulsiv gerechnet, den Werth hat:

$$R = A^2 D\tau\, D\tau_1 \frac{3TT_1 - 2S}{r^2}; \tag{43.}$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Das ponderomotorische Elementargesetz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M, M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$(44.)\qquad M,\ M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z]$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Ueberdies mögen innerhalb M und M_1 irgend welche elektrische Strömungen vorhanden sein. Ueberhaupt halte man fest an den früher [*Seite 160* (1.), (2.), ... (9.)] *angegebenen Vorstellungen und Bezeichnungen.*

Alsdann wird die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung der beiden elektrischen Stromelemente DM und DM_1 von äusserst einfachem Charakter sein, nämlich in einer gewöhnlichen Centralkraft bestehen, welche, repulsiv gerechnet, den Werth hat:

$$(45.)\qquad R = A^2 D\tau\, D\tau_1 \frac{3TT_1 - 2S}{r^2}.$$

Substituirt man hier für T, T_1, S ihre eigentlichen Bedeutungen (9.), *so erhält man:*

$$(46.)\quad R = A^2 D\tau D\tau_1 \frac{3(au+bv+cw)(au_1+bv_1+cw_1) - 2(uu_1+vv_1+ww_1)}{r^2}.$$

Dies aber ist das berühmte Ampère'sche Gesetz; wie solches sehr bald noch deutlicher sich herausstellen wird bei der Anwendung der Formel auf lineare Stromelemente. [*Vgl.* (49.)].

Zusatz. — *Die von den beiden Stromelementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit*

$$(47.)\qquad dL = (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM}$$

hat nach (12.) *den Werth:*

$$dL = D\tau D\tau_1 \Big\{ [\varrho TT_1 + \varrho^* S]\, dr + \varphi\,\delta(TT_1) + \chi\,\delta S \Big\}.$$

Hieraus aber folgt, durch Substitution der Werthe (39.) *und* (41.), *sofort:*

$$(48.)\qquad dL = A^2 D\tau D\tau_1 \frac{(3TT_1 - 2S)\, dr}{r^2},$$

eine Formel, die mit dem Satze (45.) *in bestem Einklang sich befindet.*

Bemerkung. — Die ponderablen Massen DM und DM_1 der beiden betrachteten Stromelemente sind, sowohl ihrer Gestalt, wie auch ihrer Bewegung nach, ganz beliebig zu denken. Es können z. B. DM und DM_1 zwei kleine Kugeln sein, von denen jede um einen Durchmesser rotirt. Es kann ferner die elektrische Strömungsrichtung im Innern einer solchen Kugel von Augenblick zu Augenblick sich ändern, bald mit diesem, bald mit jenem Durchmesser parallel sein. Es kann überdies das Axensystem $[x, y, z]$, (44.), in beliebiger Bewegung sein. — Stets werden die Formeln (45.), (46.), (47.), (48.) in Gültigkeit sein.

Nach (46.) ist aber die Kraft R, abgesehen von der relativen Lage der beiden Elemente zu einander, nur noch abhängig von den augenblicklichen Werthen der u, v, w, u_1, v_1, w_1. Demgemäss kann man sagen:

Zwei körperliche elektrische Stromelemente sind, was ihre gegenseitige ponderomotorische Einwirkung betrifft, vollständig charakterisirt durch Angabe ihrer augenblicklichen Strömungscomponenten, wobei das dieser Angabe zu Grunde gelegte Axensystem ein ganz beliebiges sein kann.

Uebergang zu linearen Stromelementen. — Wir wollen jetzt annehmen, DM und DM_1 seien *lineare* Stromelemente, mit den Längen Ds und Ds_1 und mit den Stromstärken J und J_1. Alsdann ist [nach Seite 66 (12.)]:

$$uD\tau = JADs, \qquad vD\tau = JBDs, \qquad wD\tau = JCDs,$$
$$u_1 D\tau_1 = J_1 A_1 Ds_1, \quad v_1 D\tau_1 = J_1 B_1 Ds_1, \quad w_1 D\tau_1 = J_1 C_1 Ds_1,$$

wo A, B, C und A_1, B_1, C_1 die Richtungscosinus von Ds und Ds_1 vorstellen. Substituirt man diese Werthe in der Formel (46.), so erhält man sofort:

$$R = A^2 JJ_1 Ds\, Ds_1 \frac{3(aA + bB + cC)(aA_1 + bB_1 + cC_1) - 2(AA_1 + BB_1 + CC_1)}{r^2},$$

oder einfacher geschrieben:

$$R = A^2 JJ_1 Ds Ds_1 \frac{3 \cos\vartheta \cos\vartheta_1 - 2 \cos\varepsilon}{r^2}. \tag{49.}$$

wo ϑ, ϑ_1, ε die Ampère'schen Winkel vorstellen. Dies aber ist offenbar die *bekannte Formel des Ampère'schen Gesetzes.*

Sich anschliessende Betrachtungen. — Nach Seite 159 (E.), (G.) ist

$$\omega = -\frac{A^2}{r}, \qquad \nu = -\frac{A^2 K}{r}, \tag{50.}$$

wo K eine noch unbekannte Constante vorstellt. Ferner ist nach Seite 167 (39.):

$$\varphi = 0, \qquad \chi = 0. \tag{51.}$$

Mittelst dieser Formeln (50.), (51.) gewinnen aber die früher von uns für die Functionen λ, μ, ν, etc. etc. gefundenen Ausdrücke [Seite 116 (10.), (11.), (12.)] folgende Gestalt:

$$\begin{cases} \lambda = +\dfrac{A^2 K}{r}, \\ \mu = -\dfrac{A^2(1-K)}{r}, \\ \nu = -\dfrac{A^2 K}{r}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \chi = 0, \end{cases} \tag{52.}$$

ferner:

$$\begin{cases} \pi = -\dfrac{A^2(1-2K)}{r}, \\ \pi^* = -\dfrac{A^2 \cdot 2K}{r}, \end{cases} \tag{53.}$$

endlich:

$$(54.)\quad \begin{cases} \varrho + \varrho^* = + \frac{A^2}{r^2}, \\ \qquad \varrho^* = - \frac{2A^2}{r^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa + \varkappa^* = 0, \\ \qquad \varkappa^* = + \frac{A^2(1+K)}{r^2}. \end{cases}$$

Hiemit sind also jetzt sämmtliche Functionen λ, μ, ν, φ, χ, π, π^*, ϱ, ϱ^*, $\varkappa$, $\varkappa^*$, bis auf die noch unbekannte Constante K, völlig bestimmt. Die Constante K werden wir übrigens, um äusserlich eine bessere Uebereinstimmung mit den Helmholtz'schen Untersuchungen herbeizuführen, durch k ersetzen, indem wir

$$(55.)\qquad K = \frac{1+k}{4}$$

machen.

Bemerkung. — Acceptirt man das zweite allgemeine Axiom der elektromotorischen Kräfte in seiner *punktuellen* Auffassung, so werden bekanntlich [vgl. die Bemerkung Seite 146] die Functionen λ und ν identisch $= 0$ sein. Folglich wird alsdann, nach (52.), die Constante K ebenfalls $= 0$, und die Constante $k = -1$ werden.

§ 6.

Nähere Untersuchung des elektromotorischen Elementargesetzes.

Wir halten fest an den zu Anfang dieses Abschnittes [Seite 160 (1.), (2.), ... (9.)] angegebenen allgemeinen Vorstellungen und Benennungen, und bezeichnen überdies die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *elektromotorische Arbeit* mit

$$(1.)\qquad d\mathfrak{L} = (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}.$$

Der erste Theil dieser Arbeit besitzt alsdann [nach Seite 148 (14.)] folgenden Werth:

$$(d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa T T_1 + \varkappa^* S]\, dr + \lambda T_1 \delta T + \mu T \delta T_1 \\ + \nu \delta S + \pi T \Delta T_1 + \pi^*(u \Delta u_1 + \cdot\cdot) \end{Bmatrix}.$$

Hieraus aber ergiebt sich, durch Substitution der soeben [Seite 169 (52.), (53.), (54.)] gefundenen Werthe, sofort:

$$(2.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = - A^2 D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} \frac{(1+K)(TT_1 - S)\, dr}{r^2} - \frac{K T_1 \delta T}{r} + \frac{(1-K) T \delta T_1}{r} \\ + \frac{K \delta S}{r} + \frac{(1-2K) T \Delta T_1}{r} + \frac{2K(u \Delta u_1 + \cdot\cdot)}{r} \end{Bmatrix}.$$

Der hier in den geschweiften Klammern befindliche Ausdruck lautet, besser geordnet, folgendermassen:

$$+\frac{(TT_1-S)\,dr}{r^2}+\frac{T\delta T_1+T\Delta T_1}{r}$$
$$-K\left(-\frac{(TT_1-S)\,dr}{r^2}+\frac{T_1\delta T+T\delta T_1-\delta S}{r}\right)$$
$$-2K\left(\frac{T\Delta T_1}{r}-\frac{u\Delta u_1+v\Delta v_1+w\Delta w_1}{r}\right);$$

und die *mittlere* von diesen drei Zeilen ist, wie man sofort übersieht [vgl. Seite 129 (20a.)], identisch mit

$$-K\cdot\delta\left(\frac{TT_1-S}{r}\right).$$

Beachtet man dies, und beachtet man ausserdem, dass $\delta+\Delta=d$ ist, und substituirt man zugleich für K seinen Werth $K=\frac{1+k}{4}$ [Seite 170 (55.)], so geht die Formel (2.) über in:

$$(3.)\quad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1}=-A^2 D\tau D\tau_1\left\{\begin{array}{l}\frac{(TT_1-S)\,dr}{r^2}+\frac{T\,dT_1}{r}-\frac{1+k}{4}\,\delta\left(\frac{TT_1-S}{r}\right)\\ -\frac{1+k}{2}\left(\frac{T\Delta T_1}{r}-\frac{u\Delta u_1+v\Delta v_1+w\Delta w_1}{r}\right)\end{array}\right\}.$$

Denkt man sich die analoge Formel für $(d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}$ hingeschrieben, und addirt man sodann diese Formel zur Formel (3.), so ergiebt sich, mit Hinblick auf (1.), sofort:

$$(4.)\quad d\mathfrak{L}=-A^2 D\tau D\tau_1\left\{\begin{array}{l}\frac{(2TT_1-2S)\,dr}{r^2}+\frac{d(TT_1)}{r}-\frac{1+k}{2}\,\delta\left(\frac{TT_1-S}{r}\right)\\ -\frac{1+k}{2}\left[\frac{\Delta(TT_1)}{r}-\frac{\Delta(uu_1+vv_1+ww_1)}{r}\right]\end{array}\right\}.$$

Der hier in den eckigen Klammern befindliche Ausdruck ist offenbar [vgl. Seite 161 (9.) und Seite 129 (20.)]

$$=\frac{\Delta(TT_1-S)}{r},\quad \text{d. i.}=\Delta\left(\frac{TT_1-S}{r}\right).$$

Beachtet man dies, und beachtet man ferner, dass $\delta+\Delta=d$ ist, so verwandelt sich die Formel (4.) in:

$$(5.)\quad d\mathfrak{L}=-A^2 D\tau D\tau_1\left\{\frac{(2TT_1-2S)\,dr}{r^2}+\frac{d(TT_1)}{r}-\frac{1+k}{2}\,d\left(\frac{TT_1-S}{r}\right)\right\}.$$

Dies also ist die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt auf einander ausgeübte elektromotorische *Arbeit.*

Andererseits gilt für die von den beiden Elementen während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *ponderomotorische* Arbeit die schon früher [Seite 168 (48.)] gefundene Formel:

$$(6.)\qquad dL=+A^2 D\tau D\tau_1\,\frac{(3TT_1-2S)\,dr}{r^2}.$$

Aus (5.) und (6.) folgt durch Addition:



$$dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left\{ -\frac{TT_1\,dr}{r^2} + \frac{d(TT_1)}{r} - \frac{1+k}{2} d\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) \right\},$$

eine Formel, die man offenbar auch so schreiben kann:

$$dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left\{ d\left(\frac{TT_1}{r}\right) - \frac{1+k}{2} d\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) \right\},$$

oder auch so:

$$(7.)\qquad dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \cdot d\left(\frac{1-k}{2}\frac{TT_1}{r} + \frac{1+k}{2}\frac{S}{r}\right);$$

was in vollem Einklang steht mit dem Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials.

Dass ein solcher Einklang sich herausstellen würde, war übrigens, auf Grund des im vorigen Abschnitt [Seite 156 (31.)] bemerkten Einklanges, *a priori* zu erwarten. Denn durch die im gegenwärtigen Abschnitt [Seite 158] hinzugetretenen neuen Stützpunkte sind die damaligen Gesetze ihrem Wesen nach ungeändert geblieben, und nur ihrer Form nach näher bestimmt worden.

§ 7.

Fortsetzung. Man erhält für das elektromotorische Elementargesetz eine sehr complicirte, noch mit der unbekannten Constanten k behaftete Formel.

Die während der Zeit dt von DM_1 auf DM ausgeübte elektromotorische Arbeit hat bekanntlich, was ihre eigentliche Definition betrifft, den Werth [vgl. Seite 64, 65]:

$$(8.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,D\tau\,dt,$$

wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten der von DM_1 in irgend einem Punkt des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft vorstellen; so dass also die Formel (3.) folgendermassen darstellbar ist:

$$(9.)\qquad (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,dt =$$

$$= -A^2 D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(TT_1 - S)\,dr}{r^2} + \dfrac{T\,dT_1}{r} - \dfrac{1+k}{4}\,\delta\left(\dfrac{TT_1 - S}{r}\right) \\ -\dfrac{1+k}{2}\left(\dfrac{T\Delta T_1}{r} - \dfrac{u\Delta u_1 + v\Delta v_1 + w\Delta w_1}{r}\right) \end{array} \right\}.$$

Es handelt sich nun darum, mittelst dieser Formel (9.) *die Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der von DM_1 auf DM ausgeübten* e l e k t r o m o t o r i s c h e n K r a f t *näher zu bestimmen.*

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sind [nach dem allgemeinen Axiom Seite 76] unabhängig vom inducirten Körper, also z. B. unabhängig von u, v, w; so dass also die *linke* Seite der Formel (9.) als eine homogene lineare Function

von u, v, w zu bezeichnen ist. Gelingt es nun, die *rechte* Seite dieser Formel ebenfalls als eine homogene lineare Function von u, v, w darzustellen, so müssen in dieser Formel die Coefficienten von u, v, w auf beiden Seiten einander gleich sein; so dass man also in solcher Weise zu den Werthen der $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ hinzugelangen im Stande sein dürfte.

Bekanntlich ist [vgl. Seite 161 (9.)]:

$$\begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned} \tag{10.}$$

Demgemäss unterliegt es keinem Zweifel, dass alle Glieder der *rechten* Seite der Formel (9.) homogene lineare Functionen von u, v, w sind, mit alleiniger Ausnahme des Gliedes:

$$\frac{1+k}{4}\,\delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right). \tag{11.}$$

Nehmen wir einstweilen an (was allerdings noch einer näheren Untersuchung bedarf), dieses Glied (11.) sei ebenfalls eine homogene lineare Function von u, v, w, es sei also

$$\delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) = \xi u + \eta v + \zeta w, \tag{12.}$$

so werden wir aus jener Formel (9.), durch Vergleichung der beiderseitigen Coefficienten von u, sofort erhalten:

$$\mathfrak{X}dt = -A^2 D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(aT_1 - u_1)\,dr}{r^2} + \dfrac{a\,dT_1}{r} - \dfrac{1+k}{4}\,\xi \\ -\dfrac{1+k}{2}\left(\dfrac{a\Delta T_1}{r} - \dfrac{\Delta u_1}{r}\right) \end{array} \right\}. \tag{13.}$$

Was nun jenen Ausdruck (11.) oder (12.) betrifft, so ist Folgendes zu bemerken. Aus (10.) ergiebt sich sofort [vgl. Seite 162 (13.)]:

$$\begin{aligned} \delta T &= (uda + vdb + wdc) + (a\,\delta u + b\,\delta v + c\,\delta w), \\ \delta S &= (u\delta u_1 + v\delta v_1 + w\delta w_1) + (u_1\delta u + v_1\delta v + w_1\delta w). \end{aligned} \tag{α.}$$

Substituirt man hier für $\delta u, \delta v, \delta w$ ihre bekannten Werthe [Seite 160 (7.)]:

$$\begin{aligned} \delta u &= wd\mathfrak{b} - vd\mathfrak{c}, \\ \delta v &= ud\mathfrak{c} - wd\mathfrak{a}, \\ \delta w &= vd\mathfrak{a} - ud\mathfrak{b}, \end{aligned} \tag{β.}$$

so erhält man sofort:

$$\begin{aligned} \delta T &= u(da + b\,d\mathfrak{c} - c\,d\mathfrak{b}) + \cdots, \\ \delta S &= u(\delta u_1 + v_1 d\mathfrak{c} - w_1 d\mathfrak{b}) + \cdots \end{aligned} \tag{γ.}$$

Nun ist offenbar [vgl. Seite 129 (20a.)]:

$$(\delta.)\qquad \delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) = -\frac{(TT_1 - S)\,dr}{r^2} + \frac{T\delta T_1 + T_1\,\delta T - \delta S}{r}.$$

Substituirt man hier für δT und δS die Werthe (γ.), so folgt:

$$(\varepsilon.)\quad \delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) = -\frac{(TT_1 - S)\,dr}{r^2} + \frac{T\delta T_1}{r}$$
$$+ \frac{T_1\,[u(d\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,d\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\,d\mathfrak{b}) + \cdot\cdot] - [u(\delta u_1 + v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b}) + \cdot\cdot]}{r}.$$

Denkt man sich endlich hier noch für T und S die Werthe (10.) eingesetzt, so sieht man sofort, dass der Ausdruck (ε.) in der That eine homogene lineare Function von u, v, w ist. Und zwar erhält man:

$$(14.)\qquad \delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) = \xi u + \eta v + \zeta w,$$

wo z. B. ξ den Werth hat:

$$(15.)\quad \xi = -\frac{(\mathfrak{a}T_1 - u_1)\,dr}{r^2} + \frac{\mathfrak{a}\,\delta T_1}{r} + \frac{T_1\,(d\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,d\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\,d\mathfrak{b}) - (\delta u_1 + v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b})}{r}.$$

Dieser Ausdruck ist übrigens noch einer gewissen Reduction fähig, nämlich in folgende Gestalt versetzbar [vgl. Seite 129 (20a.)]:

$$(16.)\qquad \xi = \delta\left(\frac{\mathfrak{a}T_1 - u_1}{r}\right) + \frac{T_1\,(\mathfrak{b}\,d\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\,d\mathfrak{b}) - (v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b})}{r}.$$

Substituirt man endlich diesen Werth von ξ in (13.), so gelangt man zu folgendem Resultat:

Das elektromotorische Elementargesetz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M, M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem* $[x, y, z]$; *und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$(17.)\qquad M,\ M_1\ \text{ und }\ [x,\ y,\ z]$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Auch mögen innerhalb M und M_1 irgend welche elektrische Strömungen stattfinden. Ueberhaupt halte man fest an den früher [*Seite 160* (1.), (2.), ... (9.)] *angegebenen allgemeinen Vorstellungen und Bezeichnungen.*

Sind nun $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Componenten der vom Elemente DM_1 in irgend einem Punkt des Elementes DM inducirten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$, so wird z. B. $\mathfrak{X}$ folgenden Werth haben:

$$(18.)\qquad \mathfrak{X}\,dt = A^2 D\tau_1 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{(\mathfrak{a}T_1 - u_1)\,dr}{r^2} - \frac{\mathfrak{a}\,dT_1}{r} \\ & + \frac{1+k}{4}\left[\delta\left(\frac{\mathfrak{a}T_1 - u_1}{r}\right) + \frac{T_1\,(\mathfrak{b}\,d\mathfrak{c} - \mathfrak{c}\,d\mathfrak{b}) - (v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b})}{r}\right] \\ & + \frac{1+k}{2}\left(\frac{\mathfrak{a}\,\Delta T_1 - \Delta u_1}{r}\right) \end{aligned} \right\}.$$

*Hieraus ergeben sich die Werthe von $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ durch cyklische Vertauschung**).

Dieses durch (18.) repräsentirte Elementargesetz ist offenbar ein höchst *unangenehmes*. Denn, trotz der durch die Charakteristiken δ, Δ bereits bewirkten Vereinfachung, ist dasselbe immerhin noch ein ausserordentlich complicirtes. Auch erfüllt es mit Misstrauen, dass in dem Gesetz jene Drehungen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ enthalten sind, welche das inducirte Element DM während der Zeit dt um die *zufällig* gewählten Coordinatenaxen x, y, z (17.) erleidet. Das einzige Mittel zur Beseitigung all' dieser Unannehmlichkeiten besteht darin, dass man die Constante $k = -1$ macht, und in solcher Weise die beiden letzten Zeilen des Ausdruckes (18.) zum Verschwinden bringt.

Auch würde aus der *punktuellen* Auffassung des zweiten Axioms sich ergeben, dass k wirklich $= -1$ sein muss. [Vgl. die Bemerkung Seite 170].

Trotz alledem wollen wir der Versuchung, $k = -1$ zu setzen, *nicht* nachgeben, sondern das Elementargesetz in seiner unanfechtbaren Gestalt (18.) beibehalten, und die daraus sich ergebenden Consequenzen zu entwickeln suchen.

Specialfall. — *Gehören DM und DM_1 ein und demselben starren Körper an, und denkt man sich das Axensystem $[x, y, z]$ in die ponderable Masse dieses Körpers eingefügt*, so sind offenbar dr, da, db, dc, $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ alle $= 0$; so dass also in diesem Fall die Formel (18.) sich reducirt auf:

$$(19.) \qquad \mathfrak{X}\,dt = A^2 D\tau_1 \left\{ -\frac{a\,dT_1}{r} + \frac{1+k}{2} \left(\frac{a\Delta T_1 - \Delta u_1}{r} \right) \right\}.$$

Offenbar ist aber im gegenwärtigen Fall:

$$dT_1 = a du_1 + b dv_1 + c dw_1,$$

ferner: $\Delta u_1 = du_1$, $\Delta v_1 = dv_1$, $\Delta w_1 = dw_1$, und folglich:

$$\Delta T_1 = a\Delta u_1 + b\Delta v_1 + c\Delta w_1 = a du_1 + b dv_1 + c dw_1.$$

Somit folgt aus (19.):

$$(20.) \quad \mathfrak{X}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left\{ \frac{a(a\,du_1 + \cdot\cdot)}{r} - \frac{1+k}{2} \left(\frac{a(a\,du_1 + \cdot\cdot) - du_1}{r} \right) \right\},$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(21.) \quad \mathfrak{X} = -A^2 D\tau_1 \left\{ \frac{1-k}{2} \left(\frac{a(a\,du_1 + b\,dv_1 + c\,dw_1)}{r\,dt} \right) + \frac{1+k}{2} \left(\frac{du_1}{r\,dt} \right) \right\},$$

eine Formel, von der weiterhin Gebrauch zu machen sein wird.

---

*) Zur Formel (18.) kann man übrigens auch auf anderem Wege gelangen, nämlich dadurch, dass man in der im vorigen Abschnitt erhaltenen Formel (21.) Seite 140 für λ, μ, ν, π, π^*, $\varkappa$, $\varkappa^*$ die in (52.), (53.), (54.) Seite 169 gefundenen Werthe substituirt.

§ 8.

Anwendung des gefundenen elektromotorischen Elementargesetzes auf lineare Stromelemente.

Wir halten fest an den Vorstellungen des Satzes (18.). Nur wollen wir gegenwärtig die beiden Körper M und M_1 als *lineare* Körper, nämlich als dünne inextensible Drähte uns denken; so dass also DM und DM_1 zwei *lineare inextensible* Stromelemente sind. Die Längen dieser Elemente seien mit Ds, Ds_1, ihre Richtungscosinus mit A, B, C und A_1, B_1, C_1, endlich ihre Stromstärken mit J und J_1 bezeichnet; so dass also [vgl. Seite 66 (12.)] die Relationen zu notiren sind:

$$(22.)\qquad \begin{aligned} uD\tau &= JADs, & u_1D\tau_1 &= J_1A_1Ds_1,\\ vD\tau &= JBDs, & v_1D\tau_1 &= J_1B_1Ds_1,\\ wD\tau &= JCDs, & w_1D\tau_1 &= J_1C_1Ds_1. \end{aligned}$$

Demgemäss ergiebt sich:

$$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)D\tau = (\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B + \mathfrak{Z}C)JDs,$$

d. i. $$(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)D\tau = \mathfrak{E}JDs,$$

wo $\mathfrak{E}$ die der Richtung $Ds(A, B, C)$ entsprechende Componente der Kraft $\mathfrak{K}$ $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ vorstellt. Hiedurch aber erhält die Formel (9.) folgende Gestalt:

$$(23.)\qquad \mathfrak{E}JDs\,dt =$$
$$= -A^2D\tau D\tau_1\left\{\begin{aligned}&\frac{(TT_1 - S)\,dr}{r^2} + \frac{T\,dT_1}{r} - \frac{1+k}{4}\,\delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right)\\ &-\frac{1+k}{2}\left(\frac{T\Delta T_1}{r} - \frac{u\Delta u_1 + v\Delta v_1 + w\Delta w_1}{r}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Die vom Elemente $DM_1(Ds_1)$ im Elemente $DM(Ds)$ in der Richtung Ds inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ soll nun mittelst dieser Formel (23.) näher zu bestimmen gesucht werden.

Aus (22.) folgt sofort:

$$(24.)\qquad (au + bv + cw)D\tau = (aA + bB + cC)\,JDs,$$

oder einfacher geschrieben:

$$TD\tau = (\cos\vartheta)\,JDs. \quad \text{Ebenso ergiebt sich:}$$

$$(25.)\qquad \begin{aligned} T_1D\tau_1 &= (\cos\vartheta_1)\,J_1Ds_1,\\ SD\tau D\tau_1 &= (\cos\varepsilon)\,JDsJ_1Ds_1. \end{aligned}$$

Diese drei Formeln kann man offenbar auch so darstellen:

$$(26.)\qquad \left\{\begin{aligned} TD\tau &= J\Theta Ds,\\ T_1D\tau_1 &= J_1\Theta_1Ds_1,\\ SD\tau D\tau_1 &= JJ_1\mathsf{E}\,DsDs_1, \end{aligned}\right.$$

wo alsdann $\Theta = \cos\vartheta$, $\Theta_1 = \cos\vartheta_1$ und $\mathsf{E} = \cos\varepsilon$ die den beiden Elementen Ds, Ds_1 entsprechenden Ampère'schen Argumente sind.

Aus (26.) folgt durch Differentiation nach der Zeit:

$$(27.)\quad \begin{cases} dT \cdot D\tau = d(J\Theta) \cdot Ds, \\ dT_1 \cdot D\tau_1 = d(J_1\Theta_1) \cdot Ds_1, \\ dS \cdot D\tau D\tau_1 = d(JJ_1\mathsf{E}) \cdot DsDs_1, \end{cases}$$

und ferner:

$$(28.)\quad \begin{cases} \delta T \cdot D\tau = Jd\Theta \cdot Ds, \\ \delta T_1 \cdot D\tau_1 = J_1 d\Theta_1 \cdot Ds_1, \\ \delta S \cdot D\tau D\tau_1 = JJ_1 d\mathsf{E} \cdot DsDs_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta T \cdot D\tau = (dJ)\Theta \cdot Ds, \\ \Delta T_1 \cdot D\tau_1 = (dJ_1)\Theta_1 \cdot Ds_1, \\ \Delta S \cdot D\tau D\tau_1 = (d(JJ_1))\mathsf{E} \cdot DsDs_1. \end{cases}$$

Ueberdies ergiebt sich aus (26.):

$$(29.)\quad \frac{TT_1 - S}{r} D\tau D\tau_1 = JJ_1 \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r} DsDs_1,$$

und folglich:

$$(30.)\quad \delta\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right) \cdot D\tau D\tau_1 = JJ_1 d\left(\frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r}\right) DsDs_1.$$

Leicht übersieht man, dass auf Grund der Relationen (22.) auch folgende Formel sich ergeben wird:

$$(31.)\quad (u\Delta u_1 + v\Delta v_1 + w\Delta w_1)D\tau D\tau_1 = J(dJ_1)\mathsf{E}\, DsDs_1.$$

Substituirt man jetzt endlich in der Formel (23.) die Werthe (26.), (27.), (28.), (29.), (30.), (31.), so erhält man sofort:

$$(32.)\quad \mathfrak{E} JDs\,dt =$$

$$= -A^2 DsDs_1 \left\{ \begin{aligned} &\frac{JJ_1(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})\,dr}{r^2} + \frac{J\Theta\, d(J_1\Theta_1)}{r} - \frac{(1+k)JJ_1}{4} d\left(\frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r}\right) \\ &- \frac{1+k}{2}\left(\frac{J\Theta(dJ_1)\Theta_1}{r} - \frac{J(dJ_1)\mathsf{E}}{r}\right) \end{aligned} \right\}.$$

Dividirt man aber diese Formel durch JDs, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Das elektromotorische Elementargesetz für lineare Leiter. — *Man denke sich zwei lineare inextensible Stromelemente JDs und J_1Ds_1 in beliebigen Bewegungen begriffen. Alsdann wird die vom Elemente J_1Ds_1 in irgend einem Punkt des Elementes JDs, in der Richtung Ds inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ den Werth haben:*

$$(33.)\quad \mathfrak{E}\,dt = -A^2 Ds_1 \left\{ \begin{aligned} &\frac{J_1(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})\,dr}{r^2} + \frac{\Theta\, d(J_1\Theta_1)}{r} - \frac{(1+k)J_1}{4} d\left(\frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r}\right) \\ &- \frac{(1+k)\,dJ_1}{2}\left(\frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r}\right) \end{aligned} \right\},$$

wo r, Θ, Θ_1, E die den beiden Elementen zugehörigen Ampère'schen Argumente vorstellen.

Die Formel (33.) ist in Einklang mit einer gelegentlich schon von *Helmholtz* angegebenen Formel (Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 759). Diese Helmholtz'sche Formel lautet, in unsere Bezeichnungsweise übersetzt, folgendermassen:

$$(\alpha.) \qquad \mathfrak{E}\, dt = -A^2 J_1 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(\Theta\Theta_1 - \mathrm{E})\, dr \cdot Ds_1}{r^2} + \dfrac{\Theta\, d(\Theta_1\, Ds_1)}{r} \\ -\dfrac{1+k}{4}\, d\left(\dfrac{(\Theta\Theta_1 - \mathrm{E}) Ds_1}{r}\right) \end{array} \right\}.$$

Dabei hat Helmholtz die Länge Ds_1 des inducirenden Elementes als *extensibel* angenommen, so dass also $d(Ds_1)$ den Zuwachs dieser Länge Ds_1 während der Zeit dt vorstellt. Für den von uns betrachteten Fall *inextensibler* Elemente ist daher $d(Ds_1) = 0$, mithin z. B.

$$d(\Theta_1 Ds_1) = (d\Theta_1) Ds_1;$$

so dass also (α.) übergeht in:

$$(\beta.) \quad \mathfrak{E}\, dt = -A^2 J_1 Ds_1 \left\{ \frac{(\Theta\Theta_1 - \mathrm{E})\, dr}{r^2} + \frac{\Theta\, d\Theta_1}{r} - \frac{1+k}{4}\, d\left(\frac{\Theta\Theta_1 - \mathrm{E}}{r}\right) \right\}.$$

Diese Formel (β.) ist aber in der That mit unserer Formel (33.) in vollem Einklang, falls man nur beachtet, dass Helmholtz an der betreffenden Stelle die Stromstärke J_1 als *constant*, mithin dJ_1 als *Null* vorausgesetzt hat.

§ 9.

Die elektromotorische Einwirkung eines geschlossenen linearen Stromes.

Zwei *inextensible lineare* Leiter M und M_1 seien in beliebigen Bewegungen (also z. B. auch in beliebigen Gestaltsveränderungen) begriffen. Auch mögen dieselben durchflossen sein von irgend welchen elektrischen Strömen. Für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Leiter seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$(34.) \qquad \begin{array}{l} DM,\ Ds,\ J, \\ DM_1,\ Ds_1,\ J_1, \quad \text{[vgl. Seite 133 (2.)]}. \end{array}$$

Die vom Elemente $J_1 Ds_1$ im Elemente Ds in der Richtung Ds inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ wird alsdann den Werth (33.) haben, einen Werth, den man offenbar auch so schreiben kann:

$$(35.) \quad \mathfrak{E}\, dt = -A^2 Ds_1 \left\{ \begin{array}{l} J_1 \left(\dfrac{(\Theta\Theta_1 - \mathrm{E})\, dr}{r^2} + \dfrac{\Theta\, d\Theta_1}{r} \right) + (dJ_1) \dfrac{\Theta\Theta_1}{r} \\ -\dfrac{1+k}{4} \left[J_1 d\left(\dfrac{\Theta\Theta_1 - \mathrm{E}}{r}\right) + 2(dJ_1)\left(\dfrac{\Theta\Theta_1 - \mathrm{E}}{r}\right) \right] \end{array} \right\}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, der lineare Leiter M_1 sei ein *in sich zurücklaufender*, und seine Stromstärke J_1 sei eine *blosse Function der*

Zeit. Ueberdies mag die von diesem ganzen geschlossenen linearen Strom im Elemente Ds in der Richtung Ds inducirte elektromotorische Kraft bezeichnet sein durch ein eingeklammertes $(\mathfrak{E})$.

Alsdann wird offenbar $(\mathfrak{E})dt$ dadurch erhalten werden, dass man den Ausdruck (35.) über alle Elemente Ds_1 des Ringes M_1 integrirt. Nun ist aber

$$\int \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r} Ds_1 = 0, \quad \text{[vgl. die Bemerkung Seite 17].}$$

Somit gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz. — *Zwei inextensible lineare Leiter M und M_1 mit den Elementen Ds und Ds_1 seien in beliebigen Bewegungen (also z. B. auch in beliebigen Gestaltsveränderungen) begriffen.*

Der lineare Leiter M_1 sei geschlossen, und von einem elektrischen Strome durchflossen, dessen Stromstärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist.

Alsdann wird die von diesem geschlossenen Strome J_1 in einem Punkt des Elementes Ds in der Richtung Ds inducirte elektromotorische Kraft $(\mathfrak{E})$ folgenden Werth haben:

$$(36.) \qquad (\mathfrak{E})dt =$$
$$= - A^2\left\{J_1\int\left(\frac{(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})\,dr}{r^2} + \frac{\Theta\,d\Theta_1}{r}\right)Ds_1 + (dJ_1)\int\left(\frac{\Theta\Theta_1}{r}\right)Ds_1\right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds_1 des geschlossenen Stromes. Dabei bezeichnen r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente der Elemente Ds, Ds_1.

§ 10.

Die Helmholtz'schen Differentialgleichungen von 1870.

Sind in einem starren homogenen Conductor, *auf den von Aussen her keinerlei elektrische Kräfte einwirken,* irgend welche elektrische Ladungen und Strömungen vorhanden, so werden diese Ladungen und Strömungen (in Folge ihrer gegenseitigen Einwirkungen) von Augenblick zu Augenblick sich ändern. *Es sollen die diesem Process entsprechenden Differentialgleichungen aufgestellt werden.*

In die ponderable Masse M des gegebenen Conductors sei ein rechtwinkliges Axensystem eingefügt:

$$(1.) \qquad \boxed{M[x, y, z]};$$

und mit Bezug auf dieses System seien für irgend zwei Elemente DM und DM_1 des gegebenen Conductors die Bezeichnungen eingeführt:



$$(2.)\qquad \begin{array}{l} DM,\ D\tau,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w, \\ DM_1,\ D\tau_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1,\ \text{[vgl. Seite 133 (2.)]}. \end{array}$$

Ferner werde gesetzt:

$$(3.)\qquad \begin{array}{l} r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ a = \frac{x - x_1}{r},\quad b = \frac{y - y_1}{r},\quad c = \frac{z - z_1}{r}. \end{array}$$

Hieraus folgt sofort:

$$(3\alpha.)\qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x_1} = \frac{(x - x_1)^2}{r^3} - \frac{1}{r},$$

also mit Hinblick auf (3.):

$$(3\beta.)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x_1} = \frac{aa}{r} - \frac{1}{r}, & \text{und in ähnlicher Weise:} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y_1} = \frac{ab}{r}, \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z_1} = \frac{ac}{r}. \end{cases}$$

Nach (2.) sind u, v, w die in irgend einem Augenblick t im Punkte (x, y, z) vorhandenen elektrischen Strömungen. Für diese Strömungen gelten die bekannten Formeln [vgl. Seite 63 (1.)]:

$$(4.)\qquad u = \lambda\mathfrak{A},\quad v = \lambda\mathfrak{B},\quad w = \lambda\mathfrak{C},$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die im Punkte (x, y, z) im Augenblick t vorhandenen elektromotorischen Kräfte bezeichnen, während λ die Leitungsfähigkeit des Conductors vorstellt. Die Kräfte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sind im Allgemeinen theils elektrostatischen, theils elektrodynamischen Ursprungs; so dass man also setzen kann:

$$(5.)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\mathfrak{X}),\quad \mathfrak{B} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\mathfrak{Y}),\quad \mathfrak{C} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\mathfrak{Z}).$$

Hier bezeichnet alsdann φ das Potential aller im Conductor enthaltenen freien Elektricität in Bezug auf den Punkt (x, y, z); während $(\mathfrak{X}), (\mathfrak{Y}), (\mathfrak{Z})$ diejenigen elektromotorischen Kräfte sind, welche alle im ganzen Conductor vorhandenen elektrischen Strömungen auf den Punkt (x, y, z) ausüben.

Die Werthe der $(\mathfrak{X}), (\mathfrak{Y}), (\mathfrak{Z})$ sind sofort angebbar auf Grund einer schon früher [Seite 175 (21.)] aufgestellten Formel. So ist z. B.:

$$(6.)\qquad (\mathfrak{X}) = -A^2 \int \left(\frac{1-k}{2} \frac{a(a\,du_1 + b\,dv_1 + c\,dw_1)}{r\,dt} + \frac{1+k}{2} \frac{du_1}{r\,dt} \right) D\tau_1,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau_1$ des gegebenen Conductors M.

Der Conductor M soll starr sein. Auch sollte das Axensystem mit dem Conductor M starr verbunden sein [vgl. (1.)]. Folglich sind

die Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1 und ebenso auch r, a, b, c *constant*, d. h. unabhängig von der Zeit. Demgemäss kann man die Formel (6.) auch so schreiben:

$$(\mathfrak{X}) = -A^2\frac{dU}{dt}, \quad \text{wo } U = \int\left(\frac{1-k}{2}\,\frac{a(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2}\,\frac{u_1}{r}\right)D\tau_1.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für $(\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{Z})$; so dass also die Formeln (5.) übergehen in

$$(7.)\quad \mathfrak{A} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - A^2\frac{dU}{dt}, \quad \mathfrak{B} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - A^2\frac{dV}{dt}, \quad \mathfrak{C} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - A^2\frac{dW}{dt}.$$

Substituirt man endlich diese Werthe von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in den Formeln (4.), so erhält man:

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{u}{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - A^2\dfrac{dU}{dt}, \\ \dfrac{v}{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - A^2\dfrac{dV}{dt}, \\ \dfrac{w}{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - A^2\dfrac{dW}{dt}, \end{cases}$$

wo alsdann U, V, W die Bedeutungen haben:

$$(9.)\quad \begin{cases} U = \displaystyle\int\left(\frac{1-k}{2}\,\frac{a(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2}\,\frac{u_1}{r}\right)D\tau_1, \\ V = \displaystyle\int\left(\frac{1-k}{2}\,\frac{b(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2}\,\frac{v_1}{r}\right)D\tau_1, \\ W = \displaystyle\int\left(\frac{1-k}{2}\,\frac{c(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2}\,\frac{w_1}{r}\right)D\tau_1. \end{cases}$$

Diese Formeln (8.), (9.) *sind nichts Anderes als die Helmholtz'schen Differentialgleichungen von 1870.* [*Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 573* (3b.) *und Seite 568* (1a.)]. *Zugleich ergiebt sich hiebei, dass die von uns* [*auf Seite 170* (55.)] *eingeführte Constante k völlig identisch ist mit der Helmholtz'schen Constanten k.*

Bemerkung. — Wollte man $k = -1$ setzen, so würden die Differentialgleichungen (8.), (9.) in diejenigen sich verwandeln, welche im Jahre 1857 von *Kirchhoff* auf ganz anderem Wege, nämlich auf Grund des *Weber'schen Gesetzes* gefunden sind. [Vgl. Kirchhoff's Ges. Abh. Seite 155].

Helmholtz hat bekanntlich, in seiner berühmten Abhandlung von 1870, auf Grund der Formeln (8.), (9.) gezeigt, dass das elektrische Gleichgewicht des Conductors *labil* sein würde, falls $k < 0$ wäre, und dass also diese Constante k z. B. nicht $= -1$ sein kann. Wenn ich im gegenwärtigen Abschnitt auf die betreffenden Helmholtz'schen Untersuchungen näher einzugehen beabsichtige, so geschieht das vor Allem in Anbetracht ihrer ganz ausserordentlichen Wichtigkeit, dann aber auch deswegen, weil ich die in Rede stehenden Untersuchungen ein wenig zu vereinfachen gedenke.

Zum Zweck der Vereinfachung werde ich annehmen, dass die Grenze zwischen dem gegebenen Conductor und zwischen dem umgebenden isolirenden Medium keine absolut scharfe ist, dass vielmehr eine *dünne Uebergangsschicht* vorhanden sei, und dass also die eine Substanz, wenn auch schnell, so doch *allmählig* in die andere Substanz übergeht.

Analoges gilt alsdann von λ und u, v, w. In der That wird alsdann die Grösse λ (die elektrische Leitungsfähigkeit) eine gegebene Function der Coordinaten sein, welche von ihrem constanten Werth innerhalb des Conductors *allmählig* zum Werthe 0 ausserhalb übergeht. Und Aehnliches ist von u, v, w zu sagen.

Analoges gilt übrigens auch von dem für irgend ein Volumelement $D\tau$ gebildeten Ausdruck

$$\frac{(u^2 + v^2 + w^2)\, D\tau}{\lambda}. \tag{10.}$$

Dieser Ausdruck hat für ein *ausserhalb* des Conductors befindliches Volumelement $D\tau$ scheinbar den Werth $\frac{0}{0}$, in Wirklichkeit aber den Werth 0; denn er repräsentirt nach dem Joule'schen Gesetz die im Element $D\tau$ sich entwickelnde Wärmemenge, bezogen auf die Zeiteinheit*).

Uebrigens kann man die Vorstellung der Uebergangsschicht, falls es beliebt, nur als vorübergehend, nur als Mittel zum Zweck ansehen. Denn es wird uns ja frei stehen, die Dicke jener Schicht beliebig klein uns zu denken. U. s. w.

§ 11.

Die den Helmholtz'schen Differentialgleichungen entsprechende Energieformel.

In Folge der von uns angenommenen dünnen Uebergangsschicht, haben wir es jetzt eigentlich nur noch mit *einem einzigen*, allerdings *anhomogenen* Körper zu thun, der den ganzen unendlichen Raum erfüllt, und dessen Oberfläche überall im Unendlichen liegt. Dieser ganze anhomogene Körper soll als *starr* angesehen werden, und starr mit ihm verbunden sei das Axensystem $[x, y, z]$.

Die Integrale (9.) *können alsdann hinerstreckt gedacht werden über alle Volumelemente des ganzen unendlichen Raumes (weil die Strömungs-*

*) Man kann übrigens, unter Beiseitesetzung jenes Joule'schen Gesetzes, auch so räsonniren: Die u, v, w sind nach (4.) proportional mit λ. Folglich ist $(u^2 + v^2 + w^2)$ proportional mit λ^2. Folglich ist der in Rede stehende Ausdruck (10.) proportional mit λ selber. U. s. w.

componenten ausserhalb des eigentlich gegebenen Conductors überall $= 0$ *sind). Und Analoges ist, wie sogleich bemerkt sein mag, von allen Integralen zu sagen, die im gegenwärtigen Abschnitt weiterhin vorkommen werden.*

Substituirt man die aus den Relationen (3β.) für aa, ab, ac entspringenden Werthe in (9.), so erhält man sofort:

$$U = \int \left\{ \frac{1-k}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial x_1} u_1 + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y_1} v_1 + \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z_1} w_1 \right) + \frac{u_1}{r} \right] + \frac{1+k}{2} \frac{u_1}{r} \right\} D\tau_1,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$U = \frac{1-k}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} w_1 \right) D\tau_1 + \int \frac{u_1}{r} D\tau_1.$$

In solcher Weise gelangt man zu folgenden Formeln:

$$(11.)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{1-k}{2} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \displaystyle\int \frac{u_1}{r} D\tau_1, \\ V = \dfrac{1-k}{2} \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + \displaystyle\int \frac{v_1}{r} D\tau_1, \\ W = \dfrac{1-k}{2} \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + \displaystyle\int \frac{w_1}{r} D\tau_1, \end{cases}$$

wo alsdann Ψ die Bedeutung hat:

$$(12.)\qquad \Psi = \int \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} w_1 \right) D\tau_1.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar auch so darstellbar:

$$\Psi = \int \left(\frac{\partial (r u_1)}{\partial x_1} + \cdot\cdot \right) D\tau_1 - \int r \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdot\cdot \right) D\tau_1,$$

oder auch so:

$$\Psi = -\int r [u_1 \cos(n_1, x) + \cdot\cdot] Do_1 - \int r \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdot\cdot \right) D\tau_1,$$

das erste Integral ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do_1 des betrachteten anhomogenen Körpers; dabei bezeichnet n_1 die auf Do_1 errichtete innere Normale. Die Oberfläche dieses anhomogenen Körpers liegt aber im Unendlichen, mithin *ausserhalb* des eigentlich gegebenen Conductors. Folglich sind u_1, v_1, w_1 auf der genannten Oberfläche allenthalben $= 0$. Folglich ist das in Rede stehende Oberflächenintegral ebenfalls $= 0$; so dass also die Formel sich reducirt auf:

$$(12a.)\qquad \Psi = -\int r \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) D\tau_1,$$

die Integration, ebenso wie z. B. in (11.) und (12.), ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\tau_1$ des ganzen unendlichen Raumes.

Ferner ergiebt sich aus (12.):

$$\Delta\Psi = \int \left(\frac{\partial \Delta r}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \Delta r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial \Delta r}{\partial z_1} w_1 \right) D\tau_1, \quad \text{wo } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Nun ist aber offenbar $\Delta r = \frac{2}{r}\cdot$ Somit folgt:

$$\Delta \Psi = 2\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} w_1\right) D\tau_1. \tag{13.}$$

Ebenso wie vorhin die Formel (12.) in (12a.) verwandelt wurde, genau in derselben Art und Weise wird die Formel (13.), wie man leicht übersieht, in folgende sich verwandeln lassen:

$$\Delta \Psi = -2\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) D\tau_1. \tag{13a.}$$

Noch sei bemerkt, dass für jedweden Punkt (x, y, z) des betrachteten anhomogenen Körpers die bekannte *Kirchhoff'sche Relation* stattfinden wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \tag{14.}$$

wo ε die Dichtigkeit der daselbst vorhandenen freien Elektricität vorstellt*).

Dies vorangeschickt, gehen wir nun endlich über zum eigentlichen Gegenstande des gegenwärtigen Paragraphs. Aus den Formeln (4.):

$$u = \lambda\mathfrak{A}, \quad v = \lambda\mathfrak{B}, \quad w = \lambda\mathfrak{C} \tag{15.}$$

ergiebt sich sofort [vgl. Seite 63]:

$$\frac{(u^2 + v^2 + w^2)\,D\tau\,dt}{\lambda} = (\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)\,D\tau\,dt. \tag{16.}$$

Die linke Seite dieser Formel (16.) repräsentirt die im Elemente $D\tau$ während der Zeit dt sich entwickelnde Wärmemenge. Und ihre rechte Seite repräsentirt die von allen elektromotorischen Kräften während der Zeit dt auf das Element $D\tau$ ausgeübte Arbeit.

Integrirt man die Formel (16.) über alle Elemente $D\tau$ des betrachteten *anhomogenen* (nach allen Seiten ins Unendliche sich erstreckenden) Körpers, so erhält man:

$$(dt)\int\frac{(u^2 + v^2 + w^2)\,D\tau}{\lambda} = (dt)\int(\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)\,D\tau, \tag{17.}$$

oder, falls man für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Werthe (7.) substituirt:

$$(dt)\int\frac{(u^2+v^2+w^2)\,D\tau}{\lambda} = -(dt)\int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}u + \frac{\partial \varphi}{\partial y}v + \frac{\partial \varphi}{\partial z}w\right) D\tau - (dt)\,A^2\int\left(\frac{dU}{dt}u + \frac{dV}{dt}v + \frac{dW}{dt}w\right) D\tau, \tag{18.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes.

*) Man findet die Ableitung der Relation (14.) im ersten Theil dieses Werkes Seite 4 (9a, b). Statt der Buchstaben u, v, w, x, y, z sind dort die entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ benutzt.



Diese Formel (18.) mag hinfort kurzweg die *Energieformel* heissen. Ihre linke Seite repräsentirt die während der Zeit dt im ganzen Körper sich entwickelnde Wärme. Und ihre rechte Seite repräsentirt die von allen elektrostatischen und elektrodynamischen Kräften während der Zeit dt verrichtete Arbeit.

Diese Energieformel (18.) soll nun im Folgenden einer genauern Untersuchung unterworfen werden. Dabei wird es nothwendig sein die beiden Ausdrücke rechter Hand, den *elektrostatischen* und den *elektrodynamischen* Ausdruck, einer gewissen Transformation zu unterwerfen.

§ 12.

Transformation des elektrostatischen Theils der Energieformel.

Der elektrostatische Theil der Energieformel (18.) lautet im Wesentlichen:

$$\mathfrak{S} = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} u + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w \right) D\tau. \tag{19.}$$

Behandelt man dieses Integral in genau derselben Art, wie vorhin das Integral (12.), so erhält man:

$$\mathfrak{S} = - \int \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) D\tau. \tag{19a.}$$

Nach (14.) ist aber:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t},$$

und überdies: $-4\pi\varepsilon = \Delta\varphi$. Also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Dies in (19a.) substituirt, ergiebt sich:

$$\mathfrak{S} = - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot D\tau. \tag{20.}$$

Nun ist ferner, nach einem bekannten Green'schen Satz:

$$\int \left(\varphi \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \right) D\tau = - \int \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) Do, \tag{α.}$$

die Integrationen links und rechts ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ und über alle Oberflächenelemente Do des betrachteten anhomogenen Körpers; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete innere Normale. Die Oberfläche dieses anhomogenen Körpers liegt aber im Unendlichen. Folglich sind φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ auf dieser Oberfläche überall $= 0$. Demgemäss verschwindet das in Rede stehende Oberflächenintegral; so dass also die Formel (α.) sich reducirt auf:

$$(\beta.)\qquad \int \varphi \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot D\tau = \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \cdot D\tau.$$

Hiedurch gewinnt die Formel (20.) die Gestalt:

$$(21.)\qquad \mathfrak{S} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \cdot D\tau.$$

Addirt man jetzt (20.) und (21.), so erhält man:

$$2\mathfrak{S} = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\varphi \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta \varphi \right) D\tau,$$

oder was dasselbe ist:

$$(22.)\qquad \mathfrak{S} = \frac{df}{dt}, \quad \text{wo} \quad f = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta \varphi \cdot D\tau.$$

Nach einem bekannten Green'schen Satz ist aber:

$$(\gamma.)\ \int (\varphi \Delta \varphi + \square \varphi) D\tau = -\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} Do, \quad \text{wo}\ \square \doteq \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2,$$

die Integrationen links und rechts wiederum ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ und über alle Oberflächenelemente Do des betrachteten anhomogenen Körpers; dabei ist n die auf Do errichtete innere Normale. Die Oberfläche jenes anhomogenen Körpers liegt aber im Unendlichen. U. s. w. Kurz, die Formel (γ.) reducirt sich auf:

$$(\delta.)\qquad \int \varphi \Delta \varphi \cdot D\tau = -\int \square \varphi \cdot D\tau.$$

Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus (22.):

$$(23.)\qquad \mathfrak{S} = \frac{df}{dt}, \quad \text{wo}\ f = \frac{1}{8\pi} \int \square \varphi \cdot D\tau.$$

Der Ausdruck $\square \varphi$ ist offenbar [vgl. (γ.)] stets *positiv*. Gleiches gilt daher nach (23.) auch von f. Man gelangt somit durch die Formeln (23.) zu folgendem einfachen Resultat:

Satz. — *Das zu untersuchende Integral* $\mathfrak{S}$ (19.) *besitzt den Werth:*

$$(24.)\qquad \mathfrak{S} = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} u + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w \right) D\tau = \frac{df}{dt},$$

wo f eine Function vorstellt, die unter allen Umständen positiv ist.

§ 13.

Transformation des elektrodynamischen Theiles der Energieformel.

Der elektrodynamische Theil der Energieformel (18.) lautet im Wesentlichen:

$$(25.)\qquad \mathfrak{T} = \int \left(\frac{dU}{dt} u + \frac{dV}{dt} v + \frac{dW}{dt} w \right) D\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des

ganzen unendlichen Raumes. Die hier auftretenden Grössen U, V, W haben die Werthe (9.), und sind daher folgendermassen darstellbar:

$$(26.)\qquad \begin{aligned} U &= \int (f^{11}u_1 + f^{12}v_1 + f^{13}w_1)\, D\tau_1, \\ V &= \int (f^{21}u_1 + f^{22}v_1 + f^{23}w_1)\, D\tau_1, \\ W &= \int (f^{31}u_1 + f^{32}v_1 + f^{33}w_1)\, D\tau_1, \end{aligned}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau_1$ des ganzen unendlichen Raumes. Dabei haben alsdann die f^{kj} folgende Bedeutungen:

$$(26\text{a.})\qquad \begin{aligned} f^{11} &= \frac{1-k}{2}\frac{a^2}{r} + \frac{1+k}{2}\frac{1}{r}, & f^{23} &= f^{32} = \frac{1-k}{2}\frac{bc}{r}, \\ f^{22} &= \frac{1-k}{2}\frac{b^2}{r} + \frac{1+k}{2}\frac{1}{r}, & f^{31} &= f^{13} = \frac{1-k}{2}\frac{ca}{r}, \\ f^{33} &= \frac{1-k}{2}\frac{c^2}{r} + \frac{1+k}{2}\frac{1}{r}, & f^{12} &= f^{21} = \frac{1-k}{2}\frac{ab}{r}. \end{aligned}$$

Substituirt man die Werthe (26.) in (25.), so erhält man sofort:

$$(27.)\qquad \mathfrak{T} = \iint \left\{ \begin{aligned} &+ u\left(f^{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} + f^{12}\frac{\partial v_1}{\partial t} + f^{13}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right) \\ &+ v\left(f^{21}\frac{\partial u_1}{\partial t} + f^{22}\frac{\partial v_1}{\partial t} + f^{23}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right) \\ &+ w\left(f^{31}\frac{\partial u_1}{\partial t} + f^{32}\frac{\partial v_1}{\partial t} + f^{33}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right) \end{aligned} \right\} D\tau\, D\tau_1;$$

denn es ist zu beachten, dass das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem [vgl. Seite 182] mit dem anhomogenen Körper starr verbunden sein soll, und dass also a, b, c, r mithin [nach (26a.)] auch die f^{kj} *Constanten*, d. i. von der Zeit unabhängige Grössen sind.

Der Ausdruck (27.) wird offenbar ungeändert bleiben, wenn man in ihm die Grössen $D\tau, u, v, w$ und $D\tau_1, u_1, v_1, w_1$ mit einander vertauscht. Denkt man sich nun zur Formel (27.) die durch eine solche Vertauschung entstehende neue Formel hinzuaddirt, und beachtet man, dass die r, a, b, c und f^{kj} *Constanten* sind, so erhält man:

$$2\,\mathfrak{T} = \frac{d}{dt}\iint \left\{ \begin{aligned} &+ u\,(f^{11}u_1 + f^{12}v_1 + f^{13}w_1) \\ &+ v\,(f^{21}u_1 + f^{22}v_1 + f^{23}w_1) \\ &+ w\,(f^{31}u_1 + f^{32}v_1 + f^{33}w_1) \end{aligned} \right\} D\tau\, D\tau_1.$$

Diese Formel aber kann man, mit Hinblick auf (26.), offenbar auch so schreiben:

$$2\,\mathfrak{T} = \frac{d}{dt}\int (uU + vV + wW)\, D\tau,$$

oder auch so:

$$(28.)\qquad \mathfrak{T} = \frac{dF}{dt}, \quad \text{wo } F = \frac{1}{2}\int (uU + vV + wW)\, D\tau.$$

Nun ist nach (11.):

$$U = \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \int \frac{u_1}{r} D\tau_1,$$

etc. etc.

Hieraus folgt einerseits:

$$(29.)\qquad \Delta U = \frac{1-k}{2}\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - 4\pi u,$$

etc. etc.,

und andererseits:

$$(30.)\quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1-k}{2}\Delta\Psi + \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} w_1 \right) D\tau_1.$$

Das hier auftretende Integral ist aber nach (13.) identisch mit $-\frac{\Delta\Psi}{2}$. Somit folgt:

$$(31.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{k}{2}\Delta\Psi.$$

Substituirt man jetzt im Integral F (28.) für u, v, w die aus (29.) entspringenden Werthe:

$$u = -\frac{\Delta U}{4\pi} + \frac{1-k}{8\pi}\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial x},$$

etc. etc.,

so erhält man:

$$(32.)\quad F = -\frac{1}{8\pi}\int (U\Delta U + \cdot\cdot) D\tau + \frac{1-k}{16\pi}\int \left(U\frac{\partial \Delta\Psi}{\partial x} + \cdot\cdot \right) D\tau.$$

Das letzte dieser beiden Integrale kann, ebenso wie früher das Integral (12.) in die Gestalt (12a.) versetzt wurde, in folgende Form gebracht werden:

$$-\int \Delta\Psi \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) D\tau;$$

wofür man nach (31.) auch schreiben kann:

$$+\frac{2}{k}\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 D\tau.$$

Somit ergiebt sich:

$$(33.)\quad F = -\frac{1}{8\pi}\int \big((U\Delta U + \cdot\cdot) D\tau + \frac{1-k}{8\pi k}\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 D\tau.$$

Offenbar ist nun [vgl. Seite 186 (δ.)]:

$$\int U\Delta U \cdot D\tau = -\int \square U \cdot D\tau;$$

und analoge Formeln gelten für V und W. Somit folgt aus (33.):

$$(34.)\quad F = \frac{1}{8\pi}\int (\square U + \square V + \square W) D\tau + \frac{1-k}{8\pi k}\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 D\tau.$$

Dieser Ausdruck F wird offenbar stets *positiv* sein, falls

$$(35.)\qquad \frac{1-k}{k} \geqq 0,$$

d. i. falls

$$(36.)\qquad \frac{1}{k} \geqq 1 \text{ ist,}$$

d. i. falls die Relation stattfindet:

$$(37.)\qquad 1 \geqq k \geqq 0\,{*}).$$

Indessen hat *Helmholtz* in sehr schöner und einfacher Weise gezeigt, dass dieser Spielraum (37.) bedeutend erweitert werden kann, dass nämlich F stets positiv ist, *falls nur* $k \geqq 0$ *ist.* Um auf diese Helmholtz'sche Untersuchung näher einzugehen, sei zuvörderst folgende *identische* Gleichung notirt**):

$$(38.)\quad \int(\square U + \square V + \square W)\,D\tau =$$
$$= \int \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\right) \end{array} \right\} D\tau,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes. Nun ist aber offenbar:

$$\int\left(\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)D\tau = \int\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(W\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(W\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right\}D\tau,$$
$$= -\int\left\{W\frac{\partial V}{\partial z}\cos(n,y) - W\frac{\partial V}{\partial y}\cos(n,z)\right\}Do,$$

das letzte Integral ausgedehnt gedacht über Elemente Do einer den unendlichen Raum umgrenzenden unendlich fernen Fläche; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete innere Normale. Das in Rede stehende Oberflächenintegral wird also (ebenso wie alle früher betrachteten Oberflächenintegrale) $= 0$ sein. Somit folgt:

$$\int\left(\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right)D\tau = 0,$$

---

*) Die Bedingung (35.) ist äquivalent mit (36.). Aber auch (36.) und (37.) sind unter einander äquivalent. Denn aus (36.) folgt zuvörderst, dass k *positiv* sein muss, und sodann zweitens, dass $k \leqq 1$ sein muss. U. s. w.

**) Dass diese Gleichung (38.) in der That eine *identische* ist, erkennt man sofort, wenn man nur beachtet, dass nach Seite 186 (γ.)

$$\square U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$$

ist, und dass $\square V$ und $\square W$ analoge Bedeutungen haben.

oder, was dasselbe ist:

$$(39.)\qquad \int \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} D\tau = \int \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} D\tau.$$

Demgemäss wird man in jener identischen Gleichung (38.) das Product $\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}$ durch $\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}$ ersetzen dürfen. Durch diese Ersetzung und analoge Ersetzungen verwandelt sich aber jene Gleichung (38.) in:

$$(40.)\qquad \int (\Box U + \Box V + \Box W) D\tau =$$
$$= \int \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \end{array} \right\} D\tau.$$

Substituirt man endlich dies in der Formel (34.), so erhält man sofort:

$$(41.)\qquad F = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{8\pi}\int \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] D\tau \\ + \frac{1}{8\pi k}\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 D\tau \end{array} \right\}.$$

Folglich wird F stets positiv sein, falls nur $k \geqq 0$ ist. — Q. e. d.

Demgemäss können wir das Hauptresultat der hier angestellten Betrachtungen folgendermassen formuliren:

Satz. — *Das zu untersuchende Integral* (25.), (28.) *besitzt den Werth:*

$$(42.)\qquad \mathfrak{T} = \int \left(\frac{dU}{dt} u + \frac{dV}{dt} v + \frac{dW}{dt} w\right) D\tau = \frac{dF}{dt},$$

wo F eine Function vorstellt, die mit voller Sicherheit stets positiv sein wird, falls $k \geqq 0$ ist, die aber möglicherweise negativ werden kann, falls $k < 0$ sein sollte.

Zusatz. — *Diese Möglichkeit würde indessen fortfallen, falls man die elektrische Materie als incompressibel betrachten, also annehmen wollte, dass*

$$(43.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \text{ stets } = 0$$

sei. In der That würde, bei Zugrundelegung dieser Annahme, die Function F unter allen Umständen positiv sein, welchen Werth die Constante k auch immer besitzen mag.

Beweis des Zusatzes. — Aus der Annahme (43.) folgt, mit Rücksicht auf (13a.), sofort:

$$\Delta \Psi = 0.$$

Hieraus folgt weiter nach (31.):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Und hieraus folgt endlich nach (34.), dass die Function F unter allen Umständen positiv ist. — *Q. e. d.*

§ 14.

Die Helmholtz'sche Betrachtung über das labile Gleichgewicht.

Substituirt man in der Energieformel (18.):

$$\int\frac{(u^2+v^2+w^2)D\tau}{\lambda}=-\int\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}u+\cdot\cdot\Big)D\tau-A^2\int\Big(\frac{dU}{dt}u+\cdot\cdot\Big)D\tau$$

die Werthe (24.) und (42.), so erhält man sofort:

$$\int\frac{(u^2+v^2+w^2)\,D\tau}{\lambda}=-\frac{df}{dt}-A^2\frac{dF}{dt},$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{d(f+A^2F)}{dt}=-\int\frac{(u^2+v^2+w^2)D\tau}{\lambda}, \tag{44.}$$

eine Formel, deren rechte Seite offenbar *stets negativ* ist. Nun sind zwei Fälle möglich: $k<0$ und $k\geqq 0$.

Erster Fall: $k<0$. — Alsdann kann das Binom $f+A^2F$, zufolge der Sätze (24.), (42.), möglicherweise *negativ* werden. Mithin wird dieses Binom, welches nach (44.) in fortdauerndem Abnehmen begriffen ist, möglicherweise über alle Grenzen hinaus abnehmen und in solcher Weise zu unendlich grossen negativen Werthen gelangen. U. s. w.

Kurz, es würde in diesem Falle die Möglichkeit vorliegen, dass die im Körper vorhandene, vielleicht von Hause aus sehr schwache elektrische Bewegung niemals zum Stillstand käme, sondern zu immer grösserer und grösserer Intensität anschwellen könnte. Denkt man sich also die elektrische Materie im Körper in irgend einem Augenblick im Gleichgewicht, *so würde es fraglich sein, ob dieses Gleichgewicht ein stabiles oder ein labiles ist.*

Bemerkung. — Auch hat Helmholtz durch feine und recht mühsame Untersuchungen dargethan, dass man für einen *kugelförmigen Conductor* einen sehr schwachen elektrischen Bewegungszustand anzugeben im Stande ist, welcher, auf Grund der Differentialgleichungen (8.), (9.) Seite 181, in der That zu unendlicher Stärke anschwellen würde, falls man in jenen Gleichungen die Constante $k<0$ sich denken wollte. [Vgl. Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 551].

Uebrigens bemerkt Helmholtz an einer andern Stelle [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 637], dass für die *experimentellen* Anwendungen der Werth der Constante k einstweilen *einflusslos* zu sein scheint.

Zweiter Fall: $k\geqq 0$. — Alsdann ist das Binom $f+A^2F$, zufolge der beiden Sätze (24.), (42.), *unter allen Umständen positiv*. Es kann daher dieses Binom, welches nach (44.) in fortdauerndem Abnehmen begriffen ist, niemals <0 werden. Und es wird also dasselbe, in Folge seines fortdauernden Abnehmens, gegen eine *feste oberhalb* 0 *liegende*

Grenze convergiren. Diese Grenze erreicht gedacht, wird alsdann das Binom weiterhin *constant*, also nach (39.) der Werth des Integrals

$$\int \frac{(u^2 + v^2 + w^2) D\tau}{\lambda}$$

weiterhin *gleich Null* bleiben. D. h. Von dem Augenblick an, wo jene Grenze erreicht ist, werden die elektrischen Strömungscomponenten u, v, w allenthalben und fortdauernd $= 0$ sein.

Kurz, es wird die im Körper vorhandene elektrische Bewegung, wie schwach oder wie stark sie auch sein mag, stets allmählig zum Stillstand gelangen. Hieraus aber ergiebt sich zugleich, *dass jedweder im Körper gedachte elektrische Gleichgewichtszustand ein stabiler sein wird.*

Schliessliches Resultat. — *Annehmen zu wollen, dass das elektrische Gleichgewicht in einem Conductor ein labiles sei, und dass sehr schwache elektrische Bewegungen allmählig zu unendlicher Stärke anschwellen könnten, würde offenbar absurd sein. Somit ergiebt sich aus der Discussion der betrachteten beiden Fälle sofort, dass die Constante $k \geqq 0$ sein muss.*

Zu Ende des folgenden Abschnitts (Seite 207, 208) werden wir auf diese Dinge von Neuem eingehen.

Neunter Abschnitt.

Digression. Ersetzung des vorigen Abschnitts durch eine ganz andere und bedeutend einfachere Reihe von Schlussfolgerungen, die ihren Ausgangspunkt in der Hypothese Epsilon haben.

Man kann der beiden neuen Stützpunkte (Seite 158) des vorigen Abschnittes ganz entbehren, und überhaupt die dortigen Betrachtungen durch einen andern und einfacheren Gedankengang ersetzen, falls man nur annimmt, *dass elektrische Stromelemente, hinsichtlich ihrer Fernwirkungen, vollständig charakterisirt seien durch blosse Angabe ihrer Strömungscomponenten.*

Diese Annahme — sie mag die Hypothese Epsilon heissen — soll im gegenwärtigen Abschnitt zuvörderst mit der erforderlichen Genauigkeit formulirt werden. Sodann aber soll sie in Anwendung gebracht werden auf die Elementargesetze des *siebenten* Abschnittes, mit völligem Hinwegsehen über die Untersuchungen des *vorigen* (*achten*) Abschnitts.

In solcher Weise werden wir einen neuen Weg gewinnen zur vollständigen Bestimmung jener Elementargesetze des *siebenten* Abschnitts. Uebrigens werden wir dabei zu denselben Resultaten wie im *achten* Abschnitt gelangen, nur mit dem Unterschied, dass $k = -1$ sich ergeben wird.

§ 1.

Die Hypothese Epsilon.

Die in zwei elektrischen Stromelementen DM und DM_1 vorhandenen elektrischen Strömungen i und i_1 sind, ihrer Richtung und Stärke nach, geometrisch darstellbar durch zwei (von DM und DM_1 ausgehende) gerade Linien. Durch Angabe dieser beiden Linien i und i_1 wird die elektrische Beschaffenheit der beiden Elemente *vollständig charakterisirt* sein.



Mögen also die beiden Elemente in Ruhe oder in Bewegung sein, stets werden ihre gegenseitigen Einwirkungen während eines gegebenen beliebig langen Zeitintervalls völlig bestimmt sein, falls nur die Linien i, i_1 und die räumlichen Lagen der Elemente DM, DM_1 für jenes Zeitintervall *von Augenblick zu Augenblick* gegeben sind.

Setzt man also insbesondre voraus, jenes Zeitintervall sei unendlich klein, etwa $= dt$, so wird zu sagen sein, die gegenseitigen Einwirkungen zwischen DM und DM_1 seien für die Zeit dt völlig bestimmt, falls nur die Linien i, i_1 und die räumlichen Lagen der Elemente DM, DM_1 zu *Anfang* der Zeit dt, sowie auch die Aenderungen dieser Dinge *während* der Zeit dt gegeben sind*).

So wahrscheinlich aber all' diese Behauptungen auch klingen mögen, so wird es doch gut sein, dieselben nicht als etwas Selbstverständliches und unwiderruflich Feststehendes anzusehen, sondern den eigentlichen Kern derselben in Form einer bestimmten Hypothese auszusprechen. Und zwar wollen wir dieser Hypothese, indem wir statt der Linien i und i_1 ihre rechtwinkligen Componenten u, v, w und u_1, v_1, w_1 einführen, folgende Gestalt geben:

Hypothese Epsilon**). — *Elektrische Stromelemente sind, was ihre ponderomotorischen und elektromotorischen Fernwirkungen betrifft, vollständig charakterisirt durch Angabe derjenigen Werthe, welche ihre Strömungscomponenten zu Anfang des betrachteten Zeitelementes dt besitzen, und durch gleichzeitige Angabe derjenigen Zuwüchse, welche diese Werthe während des Zeitelementes dt erfahren; wobei das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Axensystem ein ganz beliebiges sein darf.*

Nach dieser Hypothese kommt es also nur auf die genannten Werthe und Werthzuwüchse selber an, nicht aber auf die Entstehungsweise derselben. Ob jene Werthe und Werthzuwüchse durch elektrische oder magnetische Ursachen, ob sie durch chemische oder thermische Processe, ob sie in convectiver oder endogener Weise, oder vielleicht auch in gemischter (theils convectiver theils endogener) Weise entstehen; — das Alles ist für die Beurtheilung der Fernwirkungen vollkommen gleichgültig.

Denkt man sich ein Stromelement DM mit den Strömungscomponenten u, v, w, so werden die Zuwüchse dieser u, v, w während der Zeit dt im Allgemeinen die Gestalt haben [vgl. Seite 127 (16.)]:

---

*) Denn wenn derartige Angaben vorliegen, so werden dadurch die Linien i, i_1 und die räumliche Lage der beiden Elemente DM, DM_1 schon mitgegeben sein für *jedweden Augenblick* der Zeit dt.

**) Man vgl. die Bemerkung zu Ende dieses Paragraphs.



$$\begin{cases} du = \delta u + \Delta u, \\ dv = \delta v + \Delta v, \\ dw = \delta w + \Delta w; \end{cases}$$

der Art, dass δu, δv, δw die convectiven, und Δu, Δv, Δw die endogenen Theile dieser Zuwüchse vorstellen. Nach unserer Hypothese Epsilon ist nun ein solches Stromelement DM, hinsichtlich seiner Fernwirkungen während der Zeit dt, durch Angabe der u, v, w und du, dv, dw vollständig charakterisirt, ohne dass dabei die Beträge jener einzelnen Bestandtheile, aus denen die du, dv, dw zusammengesetzt sind, irgend welche Rolle spielten. Man wird also, ohne die Fernwirkungen des Elementes DM zu ändern, jenen einzelnen Bestandtheilen δu, δv, δw und Δu, Δv, Δw andere und andere Werthe zuertheilen können, falls man nur dafür Sorge trägt, dass die Summen $\delta u + \Delta u$, $\delta v + \Delta v$ und $\delta w + \Delta w$ stets ein und dieselben Werthe behalten.

Oder mit andern Worten: Setzt man:

$$\begin{cases} \delta u = \xi, \\ \delta v = \eta, \\ \delta w = \zeta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = du - \xi, \\ \Delta v = dv - \eta, \\ \Delta w = dw - \zeta, \end{cases}$$

so wird man, ohne die Fernwirkungen des Elementes DM zu ändern, den Grössen ξ, η, ζ andere und andere Werthe zuertheilen können, falls man nur dafür Sorge trägt, dass die Werthe der du, dv, dw stets ein und dieselben bleiben. Gleiches gilt selbstverständlich für jedes andere Stromelement; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Satz. — *Ebenso wie für das Stromelement DM, mit Bezug auf die Zeit dt, gesetzt wurde:*

$$(1.) \qquad \begin{cases} du = \delta u + \Delta u, \\ dv = \delta v + \Delta v, \\ dw = \delta w + \Delta w, \end{cases}$$

und ferner:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \delta u = \xi, \\ \delta v = \eta, \\ \delta w = \zeta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u = du - \xi, \\ \Delta v = dv - \eta, \\ \Delta w = dw - \zeta, \end{cases}$$

ebenso mag für irgend ein anderes Stromelement DM_1, mit Bezug auf die Zeit dt, gesetzt werden:

$$(3.) \qquad \begin{cases} du_1 = \delta u_1 + \Delta u_1, \\ dv_1 = \delta v_1 + \Delta v_1, \\ dw_1 = \delta w_1 + \Delta w_1, \end{cases}$$

und ferner:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \delta u_1 = \xi_1, \\ \delta v_1 = \eta_1, \\ \delta w_1 = \zeta_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_1 = du_1 - \xi_1, \\ \Delta v_1 = dv_1 - \eta_1, \\ \Delta w_1 = dw_1 - \zeta_1. \end{cases}$$

Alsdann wird, zufolge der Hypothese Epsilon, die der Zeit dt entsprechende gegenseitige Einwirkung der beiden Elemente DM und DM_1 von den Grössen

$$(5.)\qquad \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$$

völlig unabhängig sein. Selbstverständlich sind diese sechs Grössen unendlich klein zu denken.

Nach Aufstellung dieses Satzes werden wir nun den letzten (achten) Abschnitt als *nicht vorhanden* betrachten, und zum siebenten Abschnitt zurückgreifen*). Und zwar soll der soeben aufgestellte, aus der Hypothese Epsilon entsprungene Satz in den folgenden Paragraphen der Reihe nach angewendet werden 1) auf die elektromotorischen *Kräfte*, sodann 2) auf die elektromotorische *Arbeit*, und endlich 3) auf die ponderomotorische Arbeit.

Bemerkung. — Die Hypothese Epsilon, welche schon in meiner ersten Publication über diese Dinge, nämlich in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. Wiss. (1872, Seite 162) von mir mit (ε.) bezeichnet wurde, ist im Wesentlichen identisch mit einer schon im ersten Theil dieses Werkes (Seite 187) aufgestellten Hypothese. Auch findet man einige hierauf bezüglichen Betrachtungen in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom Jahre 1874 (Seite 137, 138).

Auch möchte ich hier noch hinweisen auf einen vor wenig Jahren von mir publicirten Aufsatz in den Abhandlungen der K. Sächs. Ges. d. Wiss. (1892 Seite 67, 123 und 145). Aus diesem Aufsatz dürfte ersichtlich sein, wie ausserordentlich complicirt gewisse Untersuchungen sich gestalten würden, wenn man die Hypothese Epsilon *nicht* acceptiren wollte.

So z. B. ist es ein bekannter und bisher wohl niemals bezweifelter Satz, dass die von einem elektrischen Strome in einem gegebenem Conductor inducirten elektromotorischen Kräfte stets $= 0$ sind, falls die Intensität des Stromes und ebenso anch seine relative Lage zum Conductor *constant* bleiben. Dieser Satz aber würde aufhören allgemein richtig zu sein, falls man die Hypothese Epsilon *nicht* acceptiren wollte.

Ausdrücklich aber muss ich schliesslich bemerken, dass ich für diese Hypothese Epsilon die Autorität von Helmholtz *nicht* in Anspruch nehmen kann. Es liegt keinerlei Aeusserung von Helmholtz vor weder für, noch gegen dieselbe.

---

*) Hiemit hängt zusammen, dass im Folgenden in § 2, § 3, § 4 und § 5 nur der *siebente* und *noch frühere* Abschnitte citirt werden sollen.

§ 2.

Anwendung der Hypothese Epsilon auf die elektromotorischen Kräfte.

Es seien gegeben zwei starre Körper M und M_1, und ein in die ponderable Masse des Körpers M eingefügtes rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien diese beiden Objecte

$$(6.) \qquad \boxed{M[x, y, z]} \quad \text{und} \quad M_1$$

in ganz beliebigen Bewegungen begriffen. Auch mögen in den beiden Körpern irgend welche elektrische Strömungen stattfinden.

Sind nun $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten derjenigen elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$, welche ein Element DM_1 des Körpers M_1 in einem bestimmten Punkte P des Körpers M hervorbringt, so gilt z. B. für $\mathfrak{X}$ die Formel [vgl. Seite 140]:

$$(7.) \qquad \mathfrak{X}dt = D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varkappa a(au_1 + bv_1 + cw_1) + \varkappa^* u_1]\,dr \\ + \lambda(au_1 + bv_1 + cw_1)(da + bd\mathfrak{c} - cd\mathfrak{b}) \\ + \mu a\delta(au_1 + bv_1 + cw_1) + \nu(\delta u_1 + v_1 d\mathfrak{c} - w_1 d\mathfrak{b}) \\ + \pi a\Delta(au_1 + bv_1 + cw_1) + \pi^*\Delta u_1 \end{array} \right\}.$$

Hier bezeichnen $D\tau_1$ und u_1, v_1, w_1 das Volumen des Elementes DM_1 und die darin vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten. Ferner bezeichnen a, b, c die Richtungscosinus der geraden Linie $r(DM_1 \to P)$. Endlich bezeichnen $d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{c}$ die kleinen Drehungen, welche der Körper M während der Zeit dt um die Axen x, y, z erleidet. Diese Axen x, y, z sind aber nach (6.) mit dem Körper M fest verbunden. Folglich sind jene Drehungen $d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{c}$ alle $= 0$; so dass also die Formel (7.) sich reducirt auf:

$$(8.) \qquad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} [\varkappa a T_1 + \varkappa^* u_1]\,dr + \lambda T_1 da \\ \quad + \mu a\delta T_1 + \nu\delta u_1 \\ \quad + \pi a\Delta T_1 + \pi^*\Delta u_1 \end{array} \right\},$$

wo T_1 seine bekannte Bedeutung hat:

$$(9.) \qquad T_1 = au_1 + bv_1 + cw_1.$$

Demgemäss ist z. B.:

$$\delta T_1 = (u_1\delta a + v_1\delta b + w_1\delta c) + (a\delta u_1 + b\delta v_1 + c\delta w_1).$$

Bekanntlich aber ist [nach Seite 129 (20a.)]: $\delta a = da$, $\delta b = db$, $\delta c = dc$. Setzt man also, in Uebereinstimmung mit (4.):

$$(10.) \qquad \delta u_1 = \xi_1, \quad \delta v_1 = \eta_1, \quad \delta w_1 = \zeta_1,$$

so erhält man:

$$(11.) \qquad \delta T_1 = (u_1 da + v_1 db + w_1 dc) + (a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1).$$

Die Formel (8.) ist nun, weil $\Delta = d - \delta$ ist, auch so darstellbar:

$$(12.)\qquad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa a T_1 + \varkappa^* u_1]\,dr + \lambda T_1 da \\ + (\mu - \pi) a \delta T_1 + (\nu - \pi^*)\delta u_1 \\ + \pi a\, dT_1 + \pi^* du_1 \end{Bmatrix},$$

also, mit Rücksicht auf (10.), (11.), auch so darstellbar:

$$(13.)\qquad \mathfrak{X}\,dt = D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa a T_1 + \varkappa^* u_1]\,dr + \lambda T_1 da \\ + (\mu - \pi) a[(u_1 da + v_1 db + w_1 dc) + (a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1)] \\ + \pi a d T_1 + \pi^* du_1 + (\nu - \pi^*)\xi_1 \end{Bmatrix}.$$

Wir bringen jetzt den aus der Hypothese Epsilon entsprungenen Satz (5.) *zur Anwendung.* Nach diesem Satz muss die Kraft $\mathfrak{X}$ von ξ_1, η_1, ζ_1 *unabhängig* sein. Folglich müssen im Ausdruck (13.) die Coefficienten von ξ_1, η_1, ζ_1 einzeln $= 0$ sein. Die in solcher Weise entstehenden drei Gleichungen

$$(\mu - \pi)a^2 + (\nu - \pi^*) = 0, \quad (\mu - \pi)ab = 0, \quad (\mu - \pi)ac = 0$$

müssen selbstverständlich stattfinden für beliebige Werthe von r, a, b, c. Somit ergiebt sich, dass

$$(14.)\qquad \begin{cases} \mu = \pi, & \text{und} \\ \nu = \pi^* \end{cases}$$

sein muss. Zu eben denselben Relationen (14.) würde man übrigens gelangt sein, wenn man, an Stelle von $\mathfrak{X}$, die Componente $\mathfrak{Y}$ oder $\mathfrak{Z}$ betrachtet hätte.

§ 3.

Anwendung der Hypothese Epsilon auf die elektromotorische Arbeit.

Abweichend vom vorigen Paragraph [vgl. (6.)] wollen wir gegenwärtig annehmen, dass alle drei Objecte

$$(15.)\qquad M, \quad M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z]$$

in beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sind. Ferner seien $DM(D\tau, u, v, w)$ und $DM_1(D\tau_1, u_1, v_1, w_1)$ irgend zwei Elemente der beiden Körper M und M_1.

Alsdann wird die während der Zeit dt vom Elemente DM_1 auf das Element DM ausgeübte elektromotorische Arbeit den Werth haben [vgl. Seite 148 (14.)]:

$$(16.)\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = D\tau D\tau_1 \begin{Bmatrix} [\varkappa T T_1 + \varkappa^* S]\,dr + \lambda T_1 \delta T + \mu T \delta T_1 + \nu \delta S \\ + \pi T \Delta T_1 + \pi^*(u\Delta u_1 + v \Delta v_1 + w\Delta w_1) \end{Bmatrix},$$

wo T, T_1, S die bekannten Bedeutungen haben:

$$(17.)\quad \begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1; \end{aligned}$$

hier sind a, b, c die Richtungscosinus der Linie $r(DM_1 \rightarrow DM)$. Setzt man nun, in Uebereinstimmung mit (2.), (4.):

$$(18.)\quad \begin{aligned} \delta u &= \xi, \qquad \delta v = \eta, \qquad \delta w = \zeta, \\ \delta u_1 &= \xi_1, \qquad \delta v_1 = \eta_1, \qquad \delta w_1 = \zeta_1, \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus (17.):

$$(19.)\quad \begin{aligned} \delta T &= (u\,da + v\,db + w\,dc) + (a\xi + b\eta + c\zeta), \\ \delta T_1 &= (u_1 da + v_1 db + w_1 dc) + (a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1), \text{ [vgl (11.)]}, \\ \delta S &= (u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta) + (u\xi_1 + v\eta_1 + w\zeta_1). \end{aligned}$$

Bekanntlich ist $\Delta = d - \delta$. Folglich ist die Formel (16.) auch so darstellbar:

$$(20.)\quad (d\Omega)_{DM}^{DM_1} = D\tau D\tau_1 \left\{ \begin{matrix} [\varkappa TT_1 + \varkappa^* S]dr + \pi T dT_1 + \pi^*(u du_1 + \cdot\cdot) \\ + \lambda T_1 \delta T + (\mu - \pi) T \delta T_1 + \nu \delta S - \pi^*(u \delta u_1 + \cdot\cdot) \end{matrix} \right\}.$$

Substituirt man hier die Werthe (18.), (19.), so ergiebt sich:

$$(21.)\quad (d\Omega)_{DM}^{DM_1} = D\tau D\tau_1 \left\{ \begin{matrix} f + \lambda T_1(a\xi + \cdot\cdot) + (\mu - \pi) T(a\xi_1 + \cdot\cdot) \\ + \nu[(u_1\xi + \cdot\cdot) + (u\xi_1 + \cdot\cdot)] - \pi^*(u\xi_1 + \cdot\cdot) \end{matrix} \right\},$$

wo f als augenblickliche Abbreviatur dient für folgenden Ausdruck:

$$(21\text{a.})\quad \begin{aligned} f = [\varkappa TT_1 + \varkappa^* S]dr + \pi T dT_1 + \pi^*(u du_1 + \cdot\cdot) \\ + \lambda T_1(u\,da + \cdot\cdot) + (\mu - \pi) T(u_1 da + \cdot\cdot). \end{aligned}$$

Wir bringen jetzt den aus der Hypothese Epsilon entsprungenen Satz (5.) *zur Anwendung.* Nach diesem Satz muss die während der Zeit dt von DM_1 auf DM ausgeübte elektromotorische Arbeit von $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ *unabhängig* sein. Folglich müssen im Ausdruck (21.) die Coefficienten von $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ einzeln $= 0$ sein. Die in solcher Weise entstehenden sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda T_1 a + \nu u_1 &= 0, \qquad (\mu - \pi) Ta + (\nu - \pi^*) u = 0, \\ \lambda T_1 b + \nu v_1 &= 0, \qquad (\mu - \pi) Tb + (\nu - \pi^*) v = 0, \\ \lambda T_1 c + \nu w_1 &= 0, \qquad (\mu - \pi) Tc + (\nu - \pi^*) w = 0 \end{aligned}$$

müssen offenbar stattfinden für ganz beliebige Werthe von $r, a, b, c, u, v, w, u_1, v_1, w_1$, und führen daher zu der Einsicht, dass die Functionen $\lambda, \mu, \nu, \pi, \pi^*$ folgenden Relationen entsprechen müssen:

$$(22.)\quad \begin{cases} \lambda = 0, \\ \nu = 0, \end{cases} \qquad (23.)\quad \begin{cases} \mu = \pi, \\ \nu = \pi^*. \end{cases}$$

Die Relationen (23.) sind identisch mit (14.). Andererseits stehen die Relationen (22.) in Einklang mit gewissen früheren Ueberlegungen. [Vgl. die Bemerkung auf Seite 146].

§ 4.

Anwendung der Hypothese Epsilon auf die ponderomotorische Arbeit.

Festhaltend an den Vorstellungen des vorigen Paragraphs, können wir die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit dL folgendermassen ausdrücken [vgl. Seite 155 (26.)]:

$$(24.)\quad dL = D\tau D\tau_1 \Big\{ [\varrho T T_1 + \varrho^* S]\, dr + \varphi T_1 \delta T + \varphi T \delta T_1 + \chi \delta S \Big\}.$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Substitution der Werthe (19.) sofort:

$$(25.)\qquad dL = D\tau D\tau_1 \left\{ \begin{array}{l} g + \varphi T_1 (a\xi + \cdot\cdot) + \varphi\, T(a\xi_1 + \cdot\cdot) \\ \quad + \chi\, [(u_1 \xi + \cdot\cdot) + (u \xi_1 + \cdot\cdot)] \end{array} \right\},$$

wo g als augenblickliche Abbreviatur dient für folgenden Ausdruck:

$$(25a.)\quad g = [\varrho T T_1 + \varrho^* S]\, dr + \varphi T_1 (u\,da + \cdot\cdot) + \varphi T (u_1 da + \cdot\cdot).$$

Wir bringen jetzt den aus der Hypothese Epsilon entsprungenen Satz (5.) *zur Anwendung.* Nach diesem Satz muss die hier betrachtete Arbeit dL von ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 *unabhängig* sein. Folglich müssen im Ausdruck (25.) die Coefficienten von ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 einzeln $= 0$ sein. Die in solcher Weise entstehenden sechs Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \varphi T_1 a + \chi u_1 = 0, & \varphi T a + \chi u = 0, \\ \varphi T_1 b + \chi v_1 = 0, & \varphi T b + \chi v = 0, \\ \varphi T_1 c + \chi w_1 = 0, & \varphi T c + \chi w = 0 \end{array}$$

müssen offenbar gültig sein für beliebige Werthe von r, a, b, c, u, v, w, u_1, v_1, w_1, und führen also zu der Einsicht, dass die Functionen φ und χ beide identisch $= 0$ sind:

$$(26.)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0, \\ \chi = 0. \end{array} \right.$$

Alles zusammengenommen *sind wir also im gegenwärtigen Abschnitt, auf Grund der Hypothese Epsilon, zu folgenden sechs Relationen gelangt* [(14.), (22.), (26.)]:

$$(27.)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \pi, \\ \nu = \pi^*, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0, \\ \nu = 0, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0, \\ \chi = 0. \end{array} \right.$$

§ 5.

Bestimmung der unbekannten Functionen.

Wir recapituliren zuvörderst gewisse Formeln des sechsten Abschnittes, bei denen zur Abkürzung

$$\omega = -\frac{A^2}{r} \tag{28.}$$

gesetzt wurde [vgl. Seite 114 (4.)]. Jene Formeln zerfallen in drei Gruppen [Seite 116 (10.), (11.), (12.)]. Sie lauten:

$$(29.)\qquad \begin{cases} \lambda = r\dfrac{d\nu}{dr}, \\ \mu = \omega + r\dfrac{d\nu}{dr}, \\ \nu = \nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = r\dfrac{d\chi}{dr}, \\ \chi = \chi, \end{cases}$$

ferner:

$$(30.)\qquad \begin{cases} \pi = \omega + r\dfrac{d(\chi + 2\nu)}{dr}, \\ \pi^* = \chi + 2\nu, \end{cases}$$

und endlich:

$$(31.)\qquad \begin{cases} \varrho + \varrho^* = \dfrac{d\omega}{dr} + 2\dfrac{d\chi}{dr} + r\dfrac{d^2\chi}{dr^2}, \\ r\varrho^* = 2\omega + r\dfrac{d\chi}{dr}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa + \varkappa^* = 2\dfrac{d\nu}{dr} + r\dfrac{d^2\nu}{dr^2}, \\ r\varkappa^* = r\dfrac{d\nu}{dr} - \omega. \end{cases}$$

Von den im gegenwärtigen Abschnitt auf Grund der Hypothese Epsilon erhaltenen *sechs* Relationen (27.) wollen wir nun vorläufig nur *zwei* benutzen, nämlich die Relationen:

$$\nu = 0 \quad \text{und} \quad \chi = 0.$$

Alsdann gewinnen die Ausdrücke (29.), (30.), (31.), falls man zugleich für ω seine eigentliche Bedeutung (28.) substituirt, folgende Gestalt:

$$(32.)\qquad \begin{cases} \lambda = 0, \\ \mu = -\dfrac{A^2}{r}, \\ \nu = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ \chi = 0, \end{cases}$$

ferner:

$$(33.)\qquad \begin{cases} \pi = -\dfrac{A^2}{r}, \\ \pi^* = 0, \end{cases}$$

und endlich:

$$(34.)\qquad \begin{cases} \varrho + \varrho^* = +\dfrac{A^2}{r^2}, \\ \varrho^* = -\dfrac{2A^2}{r^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varkappa + \varkappa^* = 0, \\ \varkappa^* = +\dfrac{A^2}{r^2}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke (32.), (33.), (34.) aber sind in vollem Einklang mit den *vier* übrigen aus der Hypothese Epsilon entsprungenen Relationen:

$$\mu = \varkappa, \quad \nu = \varkappa^*, \quad \lambda = 0, \quad \varphi = 0.$$

Durch (32.), (33.), (34.) *sind nun die unbekannten Functionen vollständig bestimmt.* Uebrigens dürfte es als ein recht günstiges Zeichen für die Hypothese Epsilon anzusehen sein, dass sie, zu den Resultaten des sechsten und siebenten Abschnitts hinzugefügt, im Ganzen *sechs* Relationen liefert, von denen *zwei* zur Vervollständigung, die übrigen *vier* aber zur Bestätigung jener Resultate gedient haben.

§ 6.

Die aus der Hypothese Epsilon sich ergebenden Elementargesetze.

Vergleichen wir die soeben gefundenen Formeln (32.), (33.), (34.) mit den im vorigen Abschnitt auf ganz anderem Wege erhaltenen Formeln Seite 169 (52.), (53.), (54.), so bemerken wir volle Uebereinstimmung, nur mit dem Unterschiede, dass die damalige Constante K in unsern jetzigen Formeln durch 0 vertreten ist. Wollen wir also unsere gegenwärtige auf der Hypothese Epsilon basirte Theorie näher kennen lernen, so brauchen wir nur die Resultate des vorigen Abschnitts von Neuem zu wiederholen, indem wir dabei K überall $= 0$, mithin k überall $= -1$ machen; denn zwischen K und k findet ja die Beziehung statt:

(35.) $$K = \frac{1+k}{4}. \quad \text{[Vgl. Seite 170 (55.)].}$$

Die gegenwärtige, auf der Hypothese Epsilon basirte Theorie führt daher zu folgenden Ergebnissen:

Ponderomotorisches Elementargesetz. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M, M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar mögen all' diese drei Objecte*

(36.) $$M, \ M_1 \ \text{ und } \ [x, y, z]$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sein. Auch mögen innerhalb der Körper M und M_1 irgend welche elektrische Strömungen stattfinden.

Ferner seien für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper die Bezeichnungen eingeführt:

(37.) $$\begin{array}{l} DM, \ D\tau, \ x, \ y, \ z, \ i, \ u, \ v, \ w, \\ DM_1, \ D\tau_1, \ x_1, \ y_1, \ z_1, \ i_1, \ u_1, \ v_1, \ w_1, \end{array} \quad \text{[vgl. Seite 133 (2.)].}$$

Ferner sei gesetzt:

$$(38.)\qquad \begin{aligned} r^2 &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2, \\ a = \frac{x-x_1}{r}, \quad & b = \frac{y-y_1}{r}, \quad c = \frac{z-z_1}{r}. \end{aligned}$$

Alsdann wird die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung der beiden Elemente DM und DM_1 aufeinander in einer gewöhnlichen Centralkraft R bestehen, welche, repulsiv gerechnet, den Werth hat:

$$(39.)\quad R = A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{3(au+bv+cw)(au_1+bv_1+cw_1) - 2(uu_1+vv_1+ww_1)}{r^2}\right);$$

dies ist das Ampère'sche Gesetz. [*Vgl. Seite 168* (46.)].

Elektromotorisches Elementargesetz. — *Sind ferner $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die [den Axen* (36.) *entsprechenden] Componenten der vom Elemente DM_1 in irgend einem Punkt des Elementes DM hervorgebrachten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$, so gelten für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ folgende Formeln:*

$$(40.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left(\frac{(aT_1 - u_1)\,dr}{r^2} + \frac{a\,dT_1}{r}\right), \\ \mathfrak{Y}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left(\frac{(bT_1 - v_1)\,dr}{r^2} + \frac{b\,dT_1}{r}\right), \\ \mathfrak{Z}\,dt = -A^2 D\tau_1 \left(\frac{(cT_1 - w_1)\,dr}{r^2} + \frac{c\,dT_1}{r}\right), \end{cases}$$

wo $T_1 = au_1 + bv_1 + cw_1$ ist, und wo dT_1 und dr die Zuwüchse von T_1 und r während der Zeit dt vorstellen. [*Vgl. Seite 174* (18.)].

Die Kraft $\mathfrak{R}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ kann also, wie aus (40.) *ersichtlich ist, in zwei Kräfte $\mathfrak{R}^*(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{Y}^*, \mathfrak{Z}^*)$ und $\mathfrak{R}^{**}(\mathfrak{X}^{**}, \mathfrak{Y}^{**}, \mathfrak{Z}^{**})$ zerlegt werden, von denen die eine die Richtung $r(a, b, c)$, die andre aber die Richtung $i_1(u_1, v_1, w_1)$ besitzt:*

$$\begin{cases} \mathfrak{X}^* dt = -A^2 D\tau_1 \left(\frac{T_1\,dr}{r^2} + \frac{dT_1}{r}\right) a, \\ \mathfrak{Y}^* dt = -A^2 D\tau_1 \left(\frac{T_1\,dr}{r^2} + \frac{dT_1}{r}\right) b, \\ \mathfrak{Z}^* dt = -A^2 D\tau_1 \left(\frac{T_1\,dr}{r^2} + \frac{dT_1}{r}\right) c, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}^{**} dt = +A^2 D\tau_1 \frac{u_1\,dr}{r^2}, \\ \mathfrak{Y}^{**} dt = +A^2 D\tau_1 \frac{v_1\,dr}{r^2}, \\ \mathfrak{Z}^{**} dt = +A^2 D\tau_1 \frac{w_1\,dr}{r^2}. \end{cases}$$

Das Gesetz (40.) *ist namentlich dadurch ausgezeichnet, dass in ihm nur die wirklichen Zuwüchse d, nicht aber jene virtuellen oder partiellen Zuwüchse δ, Δ vorkommen; — was übrigens, auf Grund jener von uns benutzten Hypothese Epsilon, a priori zu erwarten stand.*

Sich anschliessende Formeln. — Die gegenwärtige, auf der Hypothese Epsilon basirte Theorie kann, wie zu Anfang dieses Paragraphs bemerkt wurde, ohne Weiteres dadurch erhalten werden, dass man in den Resultaten des vorigen Abschnitts durchweg $K = 0$ und $k = -1$ macht. Bedient man sich also der gewöhnlichen Abbreviaturen:

$$
(41.)\qquad
\begin{aligned}
T &= au + bv + cw\,,\\
T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1\,,\\
S &= uu_1 + vv_1 + ww_1\,,
\end{aligned}
$$

so wird die von den beiden Elementen DM und DM_1 während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit*

$$
(42.)\qquad dL = (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM}
$$

den Werth besitzen [vgl. Seite 168 (48.)]:

$$
(43.)\qquad dL = A^2 D\tau D\tau_1 \frac{(3TT_1 - 2S)\,dr}{r^2}\,.
$$

Ferner werden, was die von den beiden Elementen während der Zeit dt aufeinander ausgeübte *elektromotorische Arbeit*

$$
(44.)\qquad d\mathfrak{L} = (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM}
$$

betrifft, folgende Formeln zu notiren sein [vgl. Seite 171 (3.)]:

$$
(45\text{a.})\qquad (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{(TT_1 - S)\,dr}{r^2} + \frac{T\,dT_1}{r}\right),
$$

$$
(45\text{b.})\qquad (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{(TT_1 - S)\,dr}{r^2} + \frac{T_1\,dT}{r}\right).
$$

Substituirt man diese Werthe (45a, b.) in (44.), so folgt sofort:

$$
(46.)\qquad d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(\frac{(2TT_1 - 2S)\,dr}{r^2} + \frac{d(TT_1)}{r}\right).
$$

Nunmehr ergiebt sich aus (43.) und (46.) durch Addition:

$$
dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \left(-\frac{TT_1\,dr}{r^2} + \frac{d(TT_1)}{r}\right),
$$

oder einfacher geschrieben:

$$
(47.)\qquad dL + d\mathfrak{L} = -A^2 D\tau D\tau_1 \cdot d\left(\frac{TT_1}{r}\right);
$$

was in Einklang ist mit dem Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials.

Endlich werden die *Helmholtz'schen Differentialgleichungen* [Seite 181 (8.), (9.)] im Sinne der gegenwärtigen Theorie, wo überall $k = -1$ zu setzen ist, folgende Gestalt erhalten:

$$
(48.)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{u}{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - A^2\dfrac{dU}{dt}, & \text{wo } U = \displaystyle\int \frac{aT_1}{r} D\tau_1\,,\\[2ex]
\dfrac{v}{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - A^2\dfrac{dV}{dt}, & \text{wo } V = \displaystyle\int \frac{bT_1}{r} D\tau_1\,,\\[2ex]
\dfrac{w}{\lambda} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - A^2\dfrac{dW}{dt}, & \text{wo } W = \displaystyle\int \frac{cT_1}{r} D\tau_1\,.
\end{cases}
$$

Dies aber sind die *Kirchhoff'schen Differentialgleichungen von 1857*.

Bemerkung. — Das Gesetz (40.) ist identisch mit dem von mir auf ganz anderem und weniger zuverlässigem Wege schon im ersten Theil dieses Werkes (Seite 192) gefundenem. Eine kurze Notiz über dasselbe findet man auch bereits in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 3. August 1872 (daselbst Seite 21, 22).

Jener damalige Weg ist deswegen als weniger zuverlässig zu bezeichnen, weil damals das Ampère'sche Gesetz von vornherein als ein absolut feststehendes angesehen wurde, was gegenwärtig nicht geschehen ist.

§ 7.

Beiläufige Betrachtungen.

Die Betrachtungen, zu denen wir hier übergehen, werden weniger Sicherheit besitzen, als die früheren. Auch sollen dieselben nur ganz beiläufig hier ihre Stelle finden.

Wir halten fest an unsern bisherigen Vorstellungen, wie sie in den Sätzen Seite 202 und Seite 203 näher dargelegt sind. Nur wollen wir gegenwärtig annehmen, dass der Körper M_1 während seiner Bewegung zugleich irgend welche Dilatationen erleide; so dass z. B. das Volumen des Massenelementes DM_1 von Augenblick zu Augenblick sich ändert. Wir bezeichnen das Volumen dieses Elementes DM_1 im Augenblick t mit $D\tau_1$, und im Augenblick $t + dt$ mit $D\tau_1 + d(D\tau_1)$; und wir stellen uns die Aufgabe, die elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ zu berechnen, welche dieses Element DM_1 unter sobewandten Umständen in irgend einem Punkte des Elementes DM hervorruft.

Um näher hierauf einzugehen, wollen wir dem Elemente DM_1 während der *ganzen* Zeit dt permanent das *grössere* Volumen $D\tau_1 + d(D\tau_1)$ zuschreiben. Nur müssen wir alsdann beachten, dass die beiden Theile $D\tau_1$ und $d(D\tau_1)$ dieses grösseren Volumens von ganz verschiedenem Charakter sind. Während nämlich die Strömungscomponenten des Theiles $D\tau_1$ in der Zeit dt von u_1, v_1, w_1 auf $u_1 + du_1$, $v_1 + dv_1$, $w_1 + dw_1$ anwachsen, haben wir uns die Strömungscomponenten des andern Theiles $d(D\tau_1)$ in der Zeit dt anwachsend zu denken von 0, 0, 0 auf $u_1 + du_1$, $v_1 + dv_1$, $w_1 + dw_1$.

Hält man eine derartige Vorstellungsweise für zulässig, so sind alsdann die elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{X}'', \mathfrak{Y}'', \mathfrak{Z}''$ welche respective vom *ersten* und vom *zweiten* Theil des Elementes DM_1 in irgend einem Punkt des Elementes DM hervorgebracht werden, leicht näher anzugeben.

Zuvörderst wird alsdann z. B. die Componente $\mathfrak{X}'$, auf Grund des Gesetzes Seite 203 (40.), den Werth haben:

$$\mathfrak{X}'dt = -A^2 D\tau_1 \left\{ \frac{a(au_1 + bv_1 + cw_1) - u_1}{r^2} dr + \frac{a\,d(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} \right\};$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(1.)\quad \mathfrak{X}'dt = -A^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a(au_1 + bv_1 + cw_1) - u_1}{r^2} dr + \dfrac{a(u_1 da + v_1 db + w_1 dc)}{r} \\ \qquad\qquad + \dfrac{a(a du_1 + b dv_1 + c dw_1)}{r} \end{array} \right\} D\tau_1.$$

Was ferner den zweiten Theil des Elementes DM_1 betrifft, so ergiebt sich für die Componente $\mathfrak{X}''$, nach Maassgabe dieser Formel (1.), folgender Werth:

$$\mathfrak{X}''dt = -A^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{a(a\mathfrak{u}_1 + b\mathfrak{v}_1 + c\mathfrak{w}_1) - \mathfrak{u}_1}{r^2} dr + \dfrac{a(\mathfrak{u}_1 da + \mathfrak{v}_1 db + \mathfrak{w}_1 dc)}{r} \\ \quad + \dfrac{a[a(u_1 + du_1) + b(v_1 + dv_1) + c(w_1 + dw_1)]}{r} \end{array} \right\} d(D\tau_1).$$

Dabei ist unter $\mathfrak{u}_1$ ein unbekannter Mittelwerth zwischen 0 und $u_1 + du_1$ zu verstehen. Analoges gilt von $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{w}_1$. Unter Fortlassung von Gliedern höherer Ordnung reducirt sich aber dieser Werth von $\mathfrak{X}''dt$ auf:

$$(2.)\qquad \mathfrak{X}''dt = -A^2 \frac{a(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} d(D\tau_1).$$

Bedient man sich nun der gewöhnlichen Abkürzung: $T_1 = au_1 + bv_1 + cw_1$, so gehen die Formeln (1.), (2.) über in:

$$(3.)\qquad \mathfrak{X}'dt = -A^2 \left(\frac{(aT_1 - u_1)dr}{r^2} + \frac{a\,dT_1}{r} \right) D\tau_1,$$

$$(4.)\qquad \mathfrak{X}''dt = -A^2 \frac{aT_1}{r} d(D\tau_1).$$

Sind mithin $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die vom *ganzen* Element DM_1 ausgeübten Kräfte:

$$(5.)\qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}' + \mathfrak{X}'', \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}' + \mathfrak{Y}'', \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' + \mathfrak{Z}'',$$

so erhält man sofort:

$$(6.)\qquad \mathfrak{X}dt = -A^2 \left(\frac{(aT_1 - u_1)dr}{r^2} D\tau_1 + \frac{a\,dT_1}{r} D\tau_1 + \frac{aT_1}{r} d(D\tau_1) \right),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(7.)\qquad \mathfrak{X}dt = -A^2 \left(\frac{(aT_1 - u_1)dr}{r^2} D\tau_1 + \frac{a}{r} d(T_1 D\tau_1) \right).$$

Ist also die im gegenwärtigen Paragraph angewendete Methode überhaupt zuverlässig, so würden die Formeln (6.), (7.) und die analogen Formeln für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ diejenigen sein, welche an die Stelle der Formeln (40.) Seite 203 zu setzen sind, sobald das inducirende Element DM_1 in *Dilatation* begriffen ist, nämlich ein Volumen $D\tau_1$ besitzt, welches während der Zeit dt um $d(D\tau_1)$ anwächst.

§ 8.

Zusammenstellung derjenigen Resultate, die in Betreff der Helmholtz'schen Constante k sich ergeben haben.

Im Ganzen sind drei Gründe zu nennen, die in übereinstimmender Weise dafür sprechen, dass die Helmholtz'sche Constante $k = -1$ sei.

Der *erste* Grund besteht darin, dass das von uns gefundene, von Hause aus höchst complicirte elektromotorische Elementargesetz [Seite 174 (18.)] dann und nur dann einen einfachen Charakter erhält, wenn $k = -1$ gesetzt wird; wie solches schon früher [Seite 175] bemerkt wurde.

Der *zweite* Grund stützt sich auf das zweite allgemeine Axiom der elektromotorischen Kräfte [Seite 129]. Er besteht darin, dass man zum Werthe $k = -1$ mit Nothwendigkeit hingeführt wird, sobald man für die *punktuelle* Auffassung dieses Axioms sich entscheidet; wie solches ebenfalls schon früher bemerkt worden ist. [Vgl. Seite 175].

Der *dritte* Grund endlich besteht darin, dass man*) mit Nothwendigkeit zum Werthe $k = -1$ gelangt, sobald man der Hypothese Epsilon [Seite 194] beipflichtet, d. i. sobald man annimmt, dass elektrische Stromelemente hinsichtlich ihrer ponderomotorischen und elektromotorischen Fernwirkungen vollständig charakterisirt seien durch Angabe ihrer elektrischen Strömungscomponenten.

Diesen drei Gründen steht nun aber ein Umstand gegenüber, der dafür spricht, dass die Constante $k \geq 0$ sein müsse. Denn wir sind durch unsere Untersuchungen im achten Abschnitt mit Nothwendigkeit zu den Helmholtz'schen Differentialgleichungen von 1870 hingeführt worden. Und aus diesen Differentialgleichungen ergiebt sich, dass $k \geqq 0$ sein müsse, weil andernfalls das elektrische Gleichgewicht eines Conductors ein labiles sein würde [vgl. Seite 191, 192].

Es tritt somit ein höchst unangenehmer Widerspruch zu Tage: Die vorhin genannten drei Gründe sprechen übereinstimmend für $k = -1$. Andererseits sprechen jene Differentialgleichungen für $k \geqq 0$.

Zur Beseitigung dieses Gegensatzes sei Folgendes bemerkt: Seit *Faraday* kann es keinem Zweifel unterliegen, dass unter der Einwirkung elektromotorischer Kräfte nicht blos in den Conductoren, sondern auch in den Isolatoren irgend welche elektrische Vorgänge entstehen. Auch ist der *Maxwell*'sche Gedanke, dass die elektrische Materie incompressibel sei, nicht ohne Weiteres zu verwerfen. Mit Rücksicht auf solche Thatsachen und Vermuthungen bedürfen aber die

*) wie im gegenwärtigen Abschnitt gezeigt worden ist.

in Rede stehenden Helmholtz'schen Differentialgleichungen einer völligen Neugestaltung, bei welcher nicht nur die Vorgänge in dem eigentlich gegebenen Conductor, sondern gleichzeitig auch die Vorgänge in dem umgebenden isolirenden Medium zu berücksichtigen sein würden.

Dies ist nicht nur meine Ansicht, sondern auch die von Helmholtz. Im Jahre 1875 sah sich nämlich Helmholtz durch seine theoretischen Arbeiten zu gewissen experimentellen Untersuchungen veranlasst, um in solcher Weise die Resultate jener Arbeiten einer Prüfung zu unterwerfen. Die Ergebnisse dieser experimentellen Untersuchungen standen aber mit den Resultaten jener theoretischen Arbeiten in Widerspruch. Und so sah sich Helmholtz [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 788] zu der Erklärung veranlasst, dass seine theoretischen Anschauungen einer gewissen Vervollständigung und Umgestaltung im Sinne der Faraday-Maxwell'schen Ideen bedürften. Dass von einer solchen Umgestaltung aber auch jene Differentialgleichungen mitbetroffen werden, kann keinem Zweifel unterliegen.

Jene Differentialgleichungen repräsentiren also, nach Helmholtz' eigner Erklärung kein wirkliches Definitivum, und können daher über den Werth der Constanten k auch kein sicheres Urtheil geben.

Während also die vorhin genannten drei Gründe für $k = -1$ bestehen bleiben (wobei allerdings noch fraglich bleibt, welches Gewicht man diesen drei Gründen beimessen will), — ist das aus jenen Differentialgleichungen geschöpfte Urtheil: $k \geqq 0$, wie wohl kaum zu bestreiten sein dürfte, als ein h i n f ä l l i g e s zu bezeichnen.

Immerhin wird es, der grösseren Sicherheit halber, zweckmässig sein, jenen Zahlenwerth $k = -1$ n i c h t einzusetzen, sondern bei unsern Untersuchungen auch weiterhin das k als eine u n b e k a n n t e Constante anzusehen.

Ueberhaupt werden wir den gegenwärtigen Abschnitt (der zum Werthe $k = -1$ führt) bei unseren weiteren Untersuchungen in den folgenden Abschnitten als *nicht vorhanden* ansehen, ihn also nur als etwas mehr oder weniger *Beiläufiges* betrachten. Auch unterscheidet sich derselbe von den übrigen Abschnitten in sofern, als er der *einzige* ist, der auf einer Annahme (Hypothese Epsilon) beruht, für welche wir die Autorität von Helmholtz nicht in Anspruch nehmen können.

Kurz der gegenwärtige Abschnitt ist als eine D i g r e s s i o n anzusehen, die aus dem allgemeinen Rahmen unserer Untersuchungen heraustritt.

Zehnter Abschnitt.

Ueber die Bedeutung des elektrodynamischen Potentials für beliebige Körper und für beliebige Strömungszustände.

Sind zwei inextensible lineare *Stromringe* gegeben, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind, so existirt, zufolge der beiden F. Neumann'schen Gesetze, für die beiden Ringe ein gewisser analytischer Ausdruck, aus welchem die gegenseitigen ponderomotorischen und elektromotorischen Einwirkungen der beiden Ringe in einfacher Weise ableitbar sind. Dieser Ausdruck heisst das Potential.

Im gegenwärtigen Abschnitt soll nun untersucht werden, ob in ähnlichem Sinne vielleicht auch ein Potential existirt für beliebige Körper und beliebige elektrische Strömungszustände derselben.

§ 1.

Erinnerung an die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze.

Es seien gegeben zwei in beliebigen Bewegungen (also z. B. auch in beliebigen Gestaltsveränderungen) begriffene inextensible lineare Ringe M und M_1 mit den Stromstärken J und J_1; so dass also das gegenseitige Potential P der beiden Ringe einen Werth besitzt von folgender Gestalt [vgl. Seite 57 (8.)]:

$$P = JJ_1 Q, \tag{1.}$$

wo Q nur noch von den geometrischen Verhältnissen abhängt. Alsdann sind die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze bekanntlich [vgl. Seite 68 (α.), (β.) und Seite 61 (10.)] dargestellt durch folgende Formeln:

$$\text{(2.)}\qquad \textit{Elektromot. Int.-Gesetz:}\begin{cases}(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = dP - QJ_1 dJ,\\ (d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = dP - QJdJ_1,\end{cases}$$

$$\text{(3.)}\qquad \textit{Ponderomot. Int.-Gesetz:}\ (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = -JJ_1 dQ;$$

wobei noch daran zu erinnern ist, dass diese letzte Formel (3.) von selber in *zwei* Formeln zerfällt [vgl. Seite 61 (10.), (11.), ... (14.)]:

(3g.) $$(dL)_M^{M_1} = - JJ_1 d_M Q,$$

(3h.) $$(dL)_{M_1}^M = - JJ_1 d_{M_1} Q.$$

All' diese Formeln (2.), (3.) *und* (3g, h.) *sind einer etwas einfacheren und mehr symmetrischen Darstellung fähig.* Um hierauf näher einzugehen, sei Folgendes bemerkt:

Die aus (1.) für irgend ein Zeitelement dt sich ergebende Differentialformel

(4.) $$dP = JJ_1 dQ + Q d(JJ_1)$$

wird offenbar, unter Anwendung der bekannten Charakteristiken δ, Δ (Seite 125—129), auch so darstellbar sein:

(5.) $$dP = \delta P + \Delta P,$$

wo alsdann δP und ΔP die Werthe haben:

(6.) $$\delta P = JJ_1 dQ \quad \text{und} \quad \Delta P = Q d(JJ_1).$$

Nun ist nach einer schon früher [Seite 61 (11.)] benutzten Bezeichnungsweise:

$$dQ = d_M Q + d_{M_1} Q;$$

so dass also die erste der beiden Formeln (6.) übergeht in:

$$\delta P = JJ_1 d_M Q + JJ_1 d_{M_1} Q.$$

Hiedurch ist der *convective Zuwachs* δP in zwei Theile zerlegt, von denen der eine nur von der Lagenänderung des *einen*, der andere nur von der des *andern* Ringes abhängt. Bezeichnet man diese beiden Theile respective mit $\delta_M P$ und $\delta_{M_1} P$, so gewinnt die letzte Formel folgende Gestalt:

(7.) $$\delta P = \delta_M P + \delta_{M_1} P, \quad \text{wo} \begin{cases} \delta_M P = JJ_1 d_M Q, \\ \delta_{M_1} P = JJ_1 d_{M_1} Q. \end{cases}$$

Ferner ist identisch: $d(JJ_1) = J_1 dJ + J dJ_1$; so dass also die zweite der beiden Gleichungen (6.) übergeht in:

$$\Delta P = Q J_1 dJ + Q J dJ_1.$$

Hiedurch ist der *endogene Zuwachs* ΔP in zwei Theile zerlegt, von denen der eine nur von der Stromänderung des *einen*, der andere nur von der des *andern* Ringes abhängt. Bezeichnet man diese beiden Theile respective mit $\Delta_M P$ und $\Delta_{M_1} P$, so erhält die letzte Formel folgendes Aussehen:

(8.) $$\Delta P = \Delta_M P + \Delta_{M_1} P, \quad \text{wo} \begin{cases} \Delta_M P = Q J_1 dJ, \\ \Delta_{M_1} P = Q J dJ_1. \end{cases}$$

Der der Zeit dt entsprechende *wirkliche Zuwachs* dP hat nach (5.) den Werth:



(9.) $$dP = \delta P + \Delta P,$$

und wird daher, falls man hier für δP und ΔP die Ausdrücke (7.) und (8.) substituirt, folgende Gestalt annehmen:

(10.) $$dP = \delta_M P + \delta_{M_1} P + \Delta_M P + \Delta_{M_1} P.$$

Jene vorhin erwähnten Gesetze (2.), (3.), (3g, h.) gewinnen nun, durch Anwendung von (8.) und (6.), (7.) folgende völlig symmetrische Gestalt:

(11.) *Elektromot. Int.-Gesetz:* $$\begin{cases} (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = dP - \Delta_M P, \\ (d\mathfrak{L})_{M_1}^M = dP - \Delta_{M_1} P, \end{cases}$$

(12.) *Ponderomot. Int.-Gesetz:* $$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -\delta P,$$

(12g.) . . . . $$(dL)_M^{M_1} = -\delta_M P,$$

(12h.) . . . . $$(dL)_{M_1}^M = -\delta_{M_1} P.$$

Diese Gesetze sind, wie bereits mehrfach betont wurde, von F. Neumann nur für inextensible lineare Stromringe, und auch für diese nur unter der Voraussetzung aufgestellt worden, dass die Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind. Wir wollen nun untersuchen, ob vielleicht einigermassen analoge Formeln für *beliebige* Körper und *beliebige* elektrische Strömungszustände sich finden lassen. Zu diesem Zweck bedarf es zunächst gewisser Vorbereitungen, namentlich z. B. auch einer Erinnerung an bekannte Kirchhoff'sche Relationen.

§ 2.

Die Kirchhoff'schen Relationen zwischen den elektrischen Strömungen und den elektrischen Dichtigkeiten.

Sind in einem starren Conductor M irgend welche elektrische Strömungen u, v, w vorhanden, so werden die Dichtigkeiten ε und η der im Conductor enthaltenen freien Elektricität, in Folge jener Strömungen, im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick sich ändern. Zwischen u, v, w und ε, η finden also gewisse Relationen statt. Und zwar lauten diese Relationen nach *Kirchhoff* folgendermassen:

(K.) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

(K'.) $$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)],$$

wo t die Zeit bezeichnet.

Die Formel (K.) bezieht sich auf einen Punkt (x, y, z) im *Innern* des Conductors, und auf die *räumliche* Dichtigkeit ε der daselbst vorhandenen freien Elektricität.

Andrerseits bezieht sich die Formel (K'.) auf einen *Oberflächenpunkt* des Conductors, und auf die *Flächendichtigkeit* η der daselbst vorhandenen freien Elektricität; und n bezeichnet die in diesem Punkt auf der Oberfläche errichtete innere Normale. *Dabei ist zu beachten, dass die Formel* (K'.) *nur dann gültig sein wird, wenn der Conductor umgeben ist von einem isolirenden Medium.*

Man findet die Ableitung der Formeln (K.) und (K'.) im ersten Theil dieses Werkes, Seite 4 (9a, b.) und Seite 5 (14a, b.). Statt der Buchstaben x, y, z, u, v, w und n, η sind dort die Bezeichnungen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ und $N, \bar{\varepsilon}$ angewendet.

Sich anschliessende Betrachtungen. — Bezeichnet $\Phi = \Phi(x, y, z)$ irgend eine Function der Coordinaten, so ist im Allgemeinen:

$$\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} w\right) D\tau = \int\left(\frac{\partial(\Phi u)}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau - \int \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau,$$

also nach einem bekannten Green'schen Satz:

$$(\text{L.}) \quad \int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} w\right) D\tau = -\int \Phi[u \cos(n, x) + \cdot\cdot] Do - \int \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$, respective über alle Oberflächenelemente Do des gegebenen Conductors M; dabei bezeichnet n [ebenso wie in (K'.)] die auf Do errichtete innere Normale. Die Gleichung (L.) gewinnt mit Hinblick auf (K.), (K'.) die Gestalt:

$$(\text{M.}) \qquad \int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} w\right) D\tau = \int \Phi \frac{\partial \eta}{\partial t} Do + \int \Phi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} D\tau;$$

leicht aber kann die Schreibweise dieser Formel (L.) oder (M.) noch weiter vereinfacht werden.

Es sei DM irgend ein Massenelement des gegebenen Conductors, vom Volumen $D\tau$ und mit den Coordinaten x, y, z. Man denke sich nun eine diesem Elemente DM zugehörige Function

$$(\text{N.}) \qquad E = E(x, y, z, t)$$

durch folgende Formeln definirt:

$$(\text{P.}) \qquad \frac{\partial E}{\partial t} D\tau = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\tau,$$

$$(\text{P}'.) \qquad \frac{\partial E}{\partial t} D\tau = \begin{cases} -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\tau \\ -\left[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)\right] Do \end{cases},$$

nämlich durch die Formel (P.), falls DM *ganz innerhalb* des Conductors liegt, hingegen durch die Formel (P'.) für den Fall, dass DM *an der Oberfläche* des Conductors sich befindet. Dabei soll im letztern Fall, was den Ausdruck (P'.) betrifft, unter dem dortigen Do dasjenige Flächenelement verstanden sein, welches die Oberfläche des Elementes DM und die Oberfläche des ganzen Conductors M mit einander gemein haben. Zugleich soll n die auf diesem Flächenelement Do errichtete innere Normale sein.

Durch Benutzung der so definirten Function E gewinnt offenbar die Gleichung (L.) folgende Gestalt:

$$\text{(Q.)} \qquad \int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}u + \frac{\partial \Phi}{\partial y}v + \frac{\partial \Phi}{\partial z}w\right)D\tau = \int \Phi \frac{\partial E}{\partial t} D\tau;$$

und von dieser Formel (Q.) *ist im gegenwärtigen Abschnitt mehrfach Gebrauch zu machen.*

Uebrigens kann die Definition (P.), (P'.) der Function E mit Rücksicht auf die Kirchhoff'schen Gleichungen (K.), (K'.) auch so geschrieben werden:

$$\text{(R.)} \quad \frac{\partial E}{\partial t} D\tau = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} D\tau, \; [DM \text{ ganz innerhalb } M],$$

$$\text{(R'.)} \quad \frac{\partial E}{\partial t} D\tau = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} D\tau + \frac{\partial \eta}{\partial t} Do, \; [DM \text{ an der Oberfläche von } M],$$

oder auch so:

$$\text{(S.)} \qquad ED\tau = \varepsilon D\tau, \quad [DM \text{ ganz innerhalb } M],$$

$$\text{(S'.)} \qquad ED\tau = \varepsilon D\tau + \eta Do, \quad [DM \text{ an der Oberfläche von } M].$$

Doch werden die *accentuirten* Formeln, nämlich (R'.) und (S'.), ebenso wie (K'.), nur dann correct sein, wenn der gegebene Conductor von einem isolirenden Medium umgeben ist. Beachtet man dies, so erkennt man sofort, dass in den beiden letzten Formeln (S.), (S'.) folgender Satz enthalten ist:

Satz. — *Es sei DM irgend ein Massenelement des gegebenen Conductors M. Ferner sei $D\tau$ das Volumen von DM. Befindet sich nun dieses Element DM ganz innerhalb des Conductors, so wird das Product*

$$\text{(T.)} \qquad ED\tau$$

nichts Andres sein, als die in diesem Elemente enthaltene Menge freier Elektricität.

Genau dasselbe wird auch für ein an der Oberfläche des Conductors gelegenes Element DM gelten, jedoch nur dann, wenn man voraussetzt, der Conductor sei von einem isolirenden Medium umgeben.

Diese Voraussetzung erfüllt gedacht, wird alsdann das über alle Volumelemente $D\tau$ des Conductors ausgedehnte Integral

$$\varphi = \int \frac{E D\tau}{r} \tag{U.}$$

das elektrostatische Potential des Conductors vorstellen.

§ 3.

Einführung eines elektrodynamischen Potentials für zwei Körper, in denen ganz beliebige elektrische Strömungszustände vorhanden sind.

Es seien gegeben zwei starre Körper M, M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien alle drei Objecte

$$M, \quad M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z] \tag{1.}$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Ueberdies mögen innerhalb M und M_1 irgend welche von Augenblick zu Augenblick sich ändernde elektrische Strömungen stattfinden. *Ob die Körper M und M_1 von isolirenden Medien (etwa jeder von einer isolirenden Hülle) umgeben sind, oder nicht, soll ganz dahingestellt bleiben.*

Für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} &DM, \ D\tau, \ x, \ y, \ z, \ i, \ u, \ v, \ w, \\ &DM_1, \ D\tau_1, \ x_1, \ y_1, \ z_1, \ i_1, \ u_1, \ v_1, \ w_1, \quad \text{[vgl. Seite 133 (2.)]}. \end{aligned} \tag{2.}$$

Ferner sei gesetzt:

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ a = \frac{x - x_1}{r}, &\quad b = \frac{y - y_1}{r}, \quad c = \frac{z - z_1}{r}. \end{aligned} \tag{3.}$$

Auch seien die Abkürzungen notirt:

$$\begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned} \tag{4.}$$

Die Summe aller während der Zeit dt von den beiden Elementen DM und DM_1 aufeinander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten hat alsdann [nach Seite 172 (7.)] den Werth:

$$\begin{aligned} (dL)_{DM}^{DM_1} + (dL)_{DM_1}^{DM} + (d\mathfrak{L})_{DM}^{DM_1} + (d\mathfrak{L})_{DM_1}^{DM} = \\ = d\left\{ - A^2 \left(\frac{1+k}{2} \frac{S}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{TT_1}{r} \right) D\tau D\tau_1 \right\}. \end{aligned} \tag{5.}$$

Integrirt man diese Formel über alle Elemente des einen, und ebenso auch über alle Elemente des andern Körpers, so erhält man sofort:

(6.) $$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M + (d\mathfrak{L})_M^{M_1} + (d\mathfrak{L})_{M_1}^M = dP,$$

wo P die Bedeutung hat:

(7.) $$P = -A^2 \iint \left(\frac{1+k}{2} \frac{S}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{TT_1}{r} \right) D\tau D\tau_1.$$

Zufolge der Formel (6.) *wird die Summe aller von den beiden Körpern M und M_1 während der Zeit dt, vermöge ihrer elektrodynamischen Kräfte, aufeinander ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Arbeiten gleich gross sein mit demjenigen Zuwachs, den der Ausdruck P während der Zeit dt erfährt.*

Offenbar sind die Formeln (6.) und (7.) bei der gegenwärtigen allgemeinen Betrachtung von derselben Gestalt und von derselben Bedeutung wie gewisse frühere Formeln Seite 68 (18.) und Seite 57 (7.) für den Specialfall zweier linearer Stromringe. Demgemäss mag der Ausdruck P (7.) auch im gegenwärtigen allgemeinen Fall kurzweg das *elektrodynamische Potential* der betrachteten beiden Körper genannt werden.

Erste Bemerkung über das Potential P. — Man kann dem Ausdruck P (7.) eine für manche Zwecke bequemere Gestalt geben. Zunächst kann man schreiben:

(8.) $$P = \Pi + \mathsf{P},$$

und dabei den Theilen Π und P folgende Bedeutungen zuertheilen:

(9.) $$\Pi = -A^2 \iint \frac{TT_1}{r} D\tau D\tau_1,$$

(10.) $$\mathsf{P} = +A^2 \frac{1+k}{2} \iint \frac{TT_1 - S}{r} D\tau D\tau_1,$$

die Integrationen, ebenso wie in (7.), ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ und $D\tau_1$ der beiden Körper. Nun ist nach (4.):

$$\int \frac{TT_1 - S}{r} D\tau = \int \frac{(\mathfrak{a}u + \cdot\cdot)(\mathfrak{a}u_1 + \cdot\cdot) - (uu_1 + \cdot\cdot)}{r} D\tau,$$

oder, falls man rechter Hand den Ausdruck unter dem Integralzeichen nach u, v, w ordnet:

$$\int \frac{TT_1 - S}{r} D\tau = \int \left\{ \left(\frac{\mathfrak{a}(\mathfrak{a}u_1 + \mathfrak{b}v_1 + \mathfrak{c}w_1) - u_1}{r} \right) u + \cdots \right\} D\tau.$$

Diese letzte Formel gewinnt, falls man für den Augenblick des Ausdruckes ψ:

(11.) $$\psi = -\left(\frac{\partial r}{\partial x} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z} w_1 \right)$$

sich bedient, die einfachere Gestalt:

$$\int \frac{TT_1 - S}{r} D\tau = \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} u + \frac{\partial \psi}{\partial y} v + \frac{\partial \psi}{\partial z} w \right) D\tau;$$

und hieraus folgt mittelst der Hülfsformel (Q.) Seite 213 sofort:

$$\int \frac{TT_1 - S}{r} D\tau = \int \psi \frac{\partial E}{\partial t} D\tau.$$

Dies in (10.) substituirt, ergiebt sich:

$$\mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint \psi \frac{\partial E}{\partial t} D\tau D\tau_1. \tag{12.}$$

Nun ist weiter nach (11.):

$$\int \psi D\tau_1 = -\int \left(\frac{\partial r}{\partial x} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z} w_1 \right) D\tau_1,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\int \psi D\tau_1 = +\int \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} w_1 \right) D\tau_1,$$

also mit Rücksicht auf unsere Hülfsformel (Q.) Seite 213:

$$\int \psi D\tau_1 = \int r \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau_1.$$

Dies in (12.) eingesetzt, ergiebt sich schliesslich:

$$\mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint r \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1. \tag{13.}$$

Hier hat $\frac{\partial E}{\partial t}$ für das Element $DM(D\tau)$ die durch (P.), (P'.) Seite 212 definirte Bedeutung. Und $\frac{\partial E_1}{\partial t}$ ist von analoger Bedeutung für das Element $DM_1(D\tau_1)$.

Zweite Bemerkung über das Potential P. — Das Potential P (7.) wird, weil sowohl die Körper M, M_1, wie auch das Axensystem $[x, y, z]$ in Bewegung sind, und überdies die in den Körpern vorhandenen Strömungen von Augenblick zu Augenblick sich ändern sollen, während der Zeit dt einen gewissen Zuwachs dP annehmen. Dieser Zuwachs werde zerlegt gedacht in seinen convectiven und in seinen endogenen Theil:

$$dP = \delta P + \Delta P. \tag{14.}$$

Ueberdies werde gesetzt:

$$\delta P = \delta_M P + \delta_{M_1} P, \tag{15.}$$

wo $\delta_M P$ nur von der Lagenänderung des Körpers M, andrerseits $\delta_{M_1} P$ nur von der des Körpers M_1 herrühren soll. Desgleichen werde gesetzt:

$$\Delta P = \Delta_M P + \Delta_{M_1} P; \tag{16.}$$

der Art, dass $\Delta_M P$ nur von M, und $\Delta_{M_1} P$ nur von M_1 herstammen soll.

In analogem Sinne wird man übrigens, wie hier sogleich erwähnt sein mag, die Zerlegungen

$$d = \delta + \Delta \tag{17.}$$

und

$$\delta = \delta_M + \delta_{M_1} \quad \text{und} \quad \Delta = \Delta_M + \Delta_{M_1} \tag{18.}$$

für jede *beliebige* Function definiren können, die von den beiden Körpern und den elektrischen Zuständen derselben in irgend welcher Weise abhängt.

Die zu behandelnde Aufgabe. — Nach den F. Neumann'schen Integralgesetzen gelten für inextensible lineare Ringe, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind, jene früher auf Seite 211 (11.), (12.) angegebenen Formeln. Es ist nun wohl nicht zu erwarten, dass jene Formeln auch noch gültig sein sollten für die hier betrachteten Körper M, M_1. Vielmehr werden jenen Formeln, wenn sie auf ganz beliebige Körper und ganz beliebige elektrische Strömungszustände angewendet werden sollen, irgend welche *Zusatzglieder* beizufügen sein. Wir bezeichnen diese noch unbekannten Zusatzglieder mit $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, schreiben also:

$$(19\text{a.})\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = dP - \Delta_M P + (\alpha.),$$

$$(19\text{b.})\qquad (d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = dP - \Delta_{M_1} P + (\beta.),$$

$$(19\text{c.})\qquad (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = \quad - \delta P \quad + (\gamma.),$$

und stellen uns nun die Aufgabe, diese Zusatzglieder $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ *näher zu bestimmen.*

Zuvörderst folgt aus (19a, b, c.) durch Addition, und mit Rücksicht auf (6.):

$$dP = 2dP - [\delta P + \Delta_M P + \Delta_{M_1} P] + (\alpha.) + (\beta.) + (\gamma.).$$

Das hier in den eckigen Klammern enthaltene Trinom ist aber $= dP$, nach (14.), (15.), (16.). Somit folgt:

$$dP = 2dP - dP + (\alpha.) + (\beta.) + (\gamma.),$$

d. i.

$$(20.)\qquad (\alpha.) + (\beta.) + (\gamma.) = 0.$$

Es handelt sich also eigentlich nur noch um die Bestimmung von $(\alpha.)$. Sobald nämlich $(\alpha.)$ gefunden ist, wird das Glied $(\beta.)$, weil es zu $(\alpha.)$ analog ist, sofort angebbar sein. Und hieraus wird sich alsdann, mittelst der Formel (20.), auch der Werth von $(\gamma.)$ ergeben. *In solcher Weise sollen nun* $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ *im folgenden Paragraph wirklich bestimmt werden.*

§ 4.

Nähere Bestimmung derjenigen Zusatzglieder $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, die zu den F. Neumann'schen Gesetzen zuzufügen sind, um dieselben anwendbar zu machen auf beliebige Körper und beliebige Strömungszustände.

Es handelt sich hier um ziemlich mühsame und langwierige Operationen. Das Zusatzglied $(\alpha.)$ hat nach (19a.) den Werth:

$$(21.)\qquad (\alpha.) = (d\mathfrak{L})_M^{M_1} - (dP - \Delta_M P),$$

Mittelst dieser Formel werden wir zuvörderst das $(\alpha.)$ auf ein gewisses Integral Ω reduciren. Sodann werden wir den Werth dieses Integrals Ω in möglichst einfacher Weise auszudrücken suchen. U. s. w.

Reduction von $(\alpha.)$ auf Ω. — Nach (8.), (9.) ist:

$$(22.)\qquad P = -A^2 \iint \frac{TT_1}{r} D\tau D\tau_1 + \mathsf{P},$$

oder, falls man hier für T seine eigentliche Bedeutung (4.) substituirt:

$$(23.)\qquad P = -A^2 \iint \frac{(au + bv + cw)\, T_1}{r} D\tau D\tau_1 + \mathsf{P}.$$

Nun ergiebt sich einerseits aus (22.):

$$dP = +A^2 \iint \left(\frac{TT_1\, dr}{r^2} - \frac{T\, dT_1 + T_1\, dT}{r} \right) D\tau D\tau_1 + d\mathsf{P},$$

und andrerseits aus (23.):

$$\Delta_M P = -A^2 \iint \frac{(a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w)\, T_1}{r} D\tau D\tau_1 + \Delta_M \mathsf{P}.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt durch Subtraction sofort:

$$(24.)\quad dP - \Delta_M P = A^2 \iint \left\{ \frac{TT_1\, dr}{r} - \frac{T\, dT_1}{r} - \frac{T_1 [dT - (a\Delta u + \cdot\cdot)]}{r} \right\} D\tau D\tau_1 + d\mathsf{P} - \Delta_M \mathsf{P}.$$

Was nun ferner die in (21.) enthaltene Arbeit $(d\mathfrak{L})_M^{M_1}$ betrifft, so ist nach Seite 171 (3.):

$$(25.)\quad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = -A^2 \iint \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(TT_1 - S)\, dr}{r^2} + \dfrac{T\, dT_1}{r} \\ - \dfrac{1+k}{4} \left[\delta \left(\dfrac{TT_1 - S}{r} \right) + 2\Delta_{M_1} \left(\dfrac{TT_1 - S}{r} \right) \right] \end{array} \right\} D\tau D\tau_1;$$

denn nach der Bedeutung der Charakteristiken Δ, Δ_M, Δ_{M_1} [vgl. (18.)] ist der in jener Formel Seite 171 (3.) enthaltene Ausdruck

$$\frac{T\Delta T_1 - (u\Delta u_1 + v\Delta v_1 + w\Delta w_1)}{r}$$

identisch mit $\Delta_{M_1}\left(\frac{TT_1 - S}{r}\right)$; wie sich solches sofort ergiebt, falls man nur die eigentlichen Bedeutungen der Ausdrücke T, T_1, S (4.) im Auge behält.

Substituirt man die Ausdrücke (24.), (25.) in der Formel (21.), so erhält man:

$$(26.)\quad (\alpha.) = \Omega + A^2 \iint \frac{1+k}{4} \left[\delta \left(\frac{TT_1 - S}{r} \right) + 2\Delta_{M_1} \left(\frac{TT_1 - S}{r} \right) \right] D\tau D\tau_1 - (d\mathsf{P} - \Delta_M \mathsf{P}),$$

wo Ω die Bedeutung hat:

$$(27.)\quad \Omega = A^2 \iint \left\{ \frac{(S - 2TT_1)\,dr}{r^2} + \frac{T_1[dT - (a\Delta u + \cdot\cdot)]}{r} \right\} D\tau D\tau_1.$$

Nun ist der Ausdruck (26.), mit Rücksicht auf die bekannte Formel (10.):

$$\mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint \frac{TT_1 - S}{r} D\tau D\tau_1,$$

auch so darstellbar:

$$(\alpha.) = \Omega + \left(\frac{\delta \mathsf{P}}{2} + \Delta_{M_1}\mathsf{P}\right) - \left(d\mathsf{P} - \Delta_M \mathsf{P}\right),$$

oder auch so:

$$(\alpha.) = \Omega + \frac{\delta \mathsf{P}}{2} - [d\mathsf{P} - \Delta_M \mathsf{P} - \Delta_{M_1}\mathsf{P}].$$

Das hier in den eckigen Klammern enthaltene Trinom ist aber [nach (17.), (18.)] $= d\mathsf{P} - \Delta\mathsf{P}$, d. i. $= \delta\mathsf{P}$. Somit folgt:

$$(28.)\quad (\alpha.) = \Omega - \frac{\delta \mathsf{P}}{2},$$

wo Ω die in (27.) angegebene Bedeutung hat:

Berechnung der Grösse Ω. — Nach (4.) ist:

$$dT = [uda + \cdot\cdot] + [adu + \cdot\cdot],$$

folglich:

$$dT - (a\Delta u + \cdot\cdot) = [uda + \cdot\cdot] + [a(du - \Delta u) + \cdot\cdot],$$

oder was dasselbe ist:

$$dT - (a\Delta u + \cdot\cdot) = [uda + \cdot\cdot] + [a\delta u + \cdot\cdot].$$

Dies in (27.) substituirt, erhält man:

$$(29.)\quad \Omega = A^2 \iint \left\{ \frac{(S - 2TT_1)\,dr}{r^2} + \frac{T_1(uda + \cdot\cdot)}{r} + \frac{T_1(a\delta u + \cdot\cdot)}{r} \right\} D\tau D\tau_1.$$

Der starre Körper M befindet sich in Bewegung. Seine sämmtlichen Molecüle werden daher während der Zeit dt gewisse räumliche Verschiebungen dx, dy, dz erleiden. Diese Verschiebungen dx, dy, dz werden wir, falls es uns beliebt [ebenso wie in der Theorie der Elasticität] als Functionen derjenigen Coordinaten x, y, z ansehen können, welche die einzelnen Molecüle zu *Anfang* der Zeit dt d. i. im Augenblick t besitzen. Demgemäss können wir setzen:

$$(30.)\quad dx = f(x, y, z), \quad dy = g(x, y, z), \quad dz = h(x, y, z).$$

Desgleichen werden wir, was den Körper M_1 betrifft, setzen können:

$$(31.)\quad dx_1 = f_1(x_1, y_1, z_1), \quad dy_1 = g_1(x_1, y_1, z_1), \quad dz_1 = h_1(x_1, y_1, z_1);$$

so dass also z. B. die aus (3.) entspringende Formel:

$$(32.)\quad dr = a(dx - dx_1) + b(dy - dy_1) + c(dz - dz_1)$$

übergeht in:

$$(32a.)\quad dr = a(f - f_1) + b(g - g_1) + c(h - h_1).$$

Uebrigens sind die Functionen f, g, h sofort näher angebbar. Nach Seite 123 (6.) ist nämlich:

$$
\begin{aligned}
f &= dx = dx_0 + (z - z_0)\,d\mathfrak{b} - (y - y_0)\,d\mathfrak{c}, \\
g &= dy = dy_0 + (x - x_0)\,d\mathfrak{c} - (z - z_0)\,d\mathfrak{a}, \\
h &= dz = dz_0 + (y - y_0)\,d\mathfrak{a} - (x - x_0)\,d\mathfrak{b}.
\end{aligned} \tag{33.}
$$

Bei unserer Untersuchung kommen offenbar nur zwei Zeitaugenblicke in Betracht: t und $t + dt$. Denkt man sich diese beiden Augenblicke *in bestimmter Weise gegeben*, und betrachtet man demgemäss die Grössen $x_0, y_0, z_0, dx_0, dy_0, dz_0, d\mathfrak{a}, d\mathfrak{b}, d\mathfrak{c}$ als bestimmte diesen Augenblicken zugehörige *Constanten*, so sind die Ausdrücke f, g, h (33.) zu bezeichnen als lineare Functionen von x, y, z mit constanten Coefficienten. Die partiellen Ableitungen derselben lauten:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} = 0, && \frac{\partial f}{\partial y} = -\,d\mathfrak{c}, && \frac{\partial f}{\partial z} = +\,d\mathfrak{b}, \\
&\frac{\partial g}{\partial x} = +\,d\mathfrak{c}, && \frac{\partial g}{\partial y} = 0, && \frac{\partial g}{\partial z} = -\,d\mathfrak{a}, \\
&\frac{\partial h}{\partial x} = -\,d\mathfrak{b}, && \frac{\partial h}{\partial y} = +\,d\mathfrak{a}, && \frac{\partial h}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{34.}
$$

Es mag nun folgender Ausdruck gebildet werden:

$$
\Phi = \frac{a[a(f - f_1) + b(g - g_1) + c(h - h_1)]}{r}; \tag{35.}
$$

und auf diesen Ausdruck mag die allgemeine Formel (Q.) Seite 213:

$$
\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}u + \frac{\partial\Phi}{\partial y}v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}w\right)D\tau = \int\Phi\,\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau \tag{36.}
$$

angewendet werden, die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des Körpers M. Beachtet man, dass im Ausdruck Φ (35.) die Grössen r, a, b, c, f, g, h Functionen von x, y, z, hingegen die Grössen f_1, g_1, h_1 von x, y, z unabhängig sind, und bildet man nun die partiellen Ableitungen von Φ nach x, y, z, so gelangt man durch elementare Rechnung und in ganz directer Weise zu folgender Formel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x}u + \frac{\partial\Phi}{\partial y}v + \frac{\partial\Phi}{\partial z}w = \frac{u\,dr}{r^2} + \frac{a}{r}\left[\frac{u(f - f_1) + \cdots}{r}\right] - \frac{3aT\,dr}{r^2} \\
+ \frac{a(a\delta u + b\delta v + c\delta w)}{r}.
\end{aligned} \tag{37.}
$$

Nun ist nach (3.): $ra = x - x_1$, mithin:

$$
r\,da + a\,dr = f - f_1, \quad \text{[vgl. (30., (31.))]},
$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$da = \frac{f - f_1}{r} - \frac{a\,dr}{r}. \quad \text{Ebenso wird:}$$

$$db = \frac{g - g_1}{r} - \frac{b\,dr}{r},$$

$$dc = \frac{h - h_1}{r} - \frac{c\,dr}{r}.$$

Hieraus folgt sofort [vgl. (4.)]:

$$(38.)\qquad u\,da + v\,db + w\,dc = \left[\frac{u(f - f_1) + \cdot\cdot}{r}\right] - \frac{T\,dr}{r}.$$

Eliminirt man jetzt aus (37.) und (38.) den in den eckigen Klammern stehenden Ausdruck, so erhält man sofort:

$$(39.)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} w = \frac{u\,dr}{r^2} - \frac{2aT\,dr}{r^2} + \frac{a(u\,da + v\,db + w\,dc)}{r} + \frac{a(a\delta u + b\delta v + c\delta w)}{r}.$$

Noch sei bemerkt, dass der mit Φ bezeichnete Ausdruck (35.) nach (32a.) auch so darstellbar ist:

$$(40.)\qquad \Phi = \frac{a\,dr}{r}.$$

Substituirt man jetzt in der Formel (36.) links und rechts die Ausdrücke (39.) und (40.), so gelangt man zur ersten Gleichung folgenden Systems:

$$\int\left(\frac{(u - 2aT)\,dr}{r^2} + \frac{a(u\,da + \cdot\cdot) + a(a\delta u + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau = \int\left(\frac{a\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau,$$

$$\int\left(\frac{(v - 2bT)\,dr}{r^2} + \frac{b(u\,da + \cdot\cdot) + b(a\delta u + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau = \int\left(\frac{b\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau,$$

$$\int\left(\frac{(w - 2cT)\,dr}{r^2} + \frac{c(u\,da + \cdot\cdot) + c(a\delta u + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau = \int\left(\frac{c\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau,$$

dessen übrige Gleichungen in analoger Weise zu erhalten sind. Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit u_1, v_1, w_1, und addirt, so folgt [vgl. (4.)]:

$$(41.)\qquad \int\left(\frac{(S - 2TT_1)\,dr}{r^2} + \frac{T_1(u\,da + \cdot\cdot) + T_1(a\delta u + \cdot\cdot)}{r}\right) D\tau = \int\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau.$$

Dies endlich in (29.) substituirt, ergiebt sich:

$$(42.)\qquad \Omega = A^2 \iint \left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau\,D\tau_1.$$

Definitive Bestimmung der Glieder (α.), (β.), (γ.). — Substituirt man den Werth (42.) in der Formel (28.), so folgt:

$$(43a.)\qquad (\alpha.) = A^2 \iint \left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}\,D\tau\,D\tau_1 - \frac{\delta \mathsf{P}}{2}.$$

Das Zusatzglied (β.) ist, wie schon [Seite 217] bemerkt wurde, mit (α.) analog, und aus (α.) durch gewisse Vertauschungen zu erhalten. So

z. B. werden beim Uebergange von (α.) zu (β.) die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 mit einander zu commutiren, folglich a, b, c durch $-a$, $-b$, $-c$ zu ersetzen sein. U. s. w. Demgemäss ergiebt sich aus (43 a.):

$$(43\text{b.}) \qquad (\beta.) = A^2 \iint \left(-\frac{T\,dr}{r}\right) \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1 - \frac{\delta \mathsf{P}}{2}.$$

Endlich bestimmt sich das Zusatzglied (γ.) durch die Formel (20.):

$$(43\text{c.}) \qquad (\gamma.) = -[(\alpha.) + (\beta.)].$$

Durch (43 a, b, c) *sind die Werthe der Zusatzglieder* (α.), (β.), (γ.) *in ziemlich einfacher Gestalt angegeben. Einer weitern Betrachtung bedarf indessen noch der in diesen Werthen enthaltene convective Zuwachs* $\delta\mathsf{P}$.

Für den Ausdruck P haben wir *zwei* Darstellungen, nämlich einerseits die Formel (10.):

$$(44.) \qquad \mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint \frac{TT_1 - S}{r} D\tau D\tau_1,$$

und andrerseits die aus dieser abgeleitete Formel (13.):

$$(45.) \qquad \mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint r \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1.$$

Dabei ist $\frac{\partial E}{\partial t}$ definirt durch die Gleichungen (P.), (P'.) Seite 212:

$$(46.) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} D\tau &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau, \\ \frac{\partial E}{\partial t} D\tau &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau - [u\cos(n,x) + \cdot\cdot]\, Do; \end{aligned}$$

während $\frac{\partial E_1}{\partial t}$ definirt zu denken ist durch zwei analoge Gleichungen. *Es soll nun der der Zeit dt entsprechende convective Zuwachs* $\delta\mathsf{P}$ *näher untersucht werden.*

In Bezug auf das rechtwinklige Axensystem $[x, y, z]$ sind die Coordinaten und Strömungscomponenten des Elementes $DM(D\tau)$ mit x, y, z und u, v, w bezeichnet worden. [Vgl. (1.), (2.) Seite 214]. Lässt man in Gedanken das Axensystem $[x, y, z]$ seine Lage im Raume wechseln, so werden offenbar die Coordinaten x, y, z und Strömungscomponenten u, v, w *andere* werden. Hingegen wird dabei das Trinom

$$(\text{A.}) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

*ein und denselben Werth behalten**). Der Werth dieses Trinoms (A.)

*) Bezeichnet man nämlich die neue Lage des Axensystems mit $[\xi, \eta, \zeta]$, ferner die neuen Werthe jener Coordinaten und Strömungscomponenten mit ξ, η, ζ und $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, so wird bekanntlich die Gleichung stattfinden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta}. \quad Q.\ e.\ d.$$

ist also unabhängig von der relativen Lage des Körpers M zum Axensystem $[x, y, z]$.

Oder genauer ausgedrückt: *Der Werth des Trinoms* (A.) *wird, falls die relative Lage des Körpers M zum Axensystem* $[x, y, z]$ *sich ändert, stets ein und derselbe bleiben, falls nur der innerhalb des Körpers vorhandene Strömungszustand während der betreffenden Zeit ungeändert bleibt.*

Oder kürzer ausgedrückt: *Der convective Zuwachs des Trinoms* (A.) *ist stets* $= 0$. D. h.:

$$\text{(B.)} \qquad \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \text{ ist stets } = 0.$$

In analoger Weise gelangt man nun, wie leicht zu übersehen ist, auch zu folgender Formel:

$$\text{(C.)} \qquad \delta[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] = 0.$$

Mit Rücksicht auf (B.), (C.) ergiebt sich nun aus den Gleichungen (46.) sofort:

$$\text{(D.)} \qquad \delta\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0.$$

Desgleichen wird offenbar, was den Körper M_1 betrifft, die entsprechende Formel zu notiren sein:

$$\text{(E.)} \qquad \delta\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\right) = 0.$$

Blicken wir jetzt zurück auf den Ausdruck P (45.), und bilden wir den convectiven Zuwachs dieses Ausdruckes, so erhalten wir:

$$\delta\mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint \left[(dr) \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} + r\delta\left(\frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t}\right)\right] D\tau D\tau_1,$$

also mit Hinblick auf (D.), (E.):

$$\text{(47.)} \qquad \delta\mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint (dr) \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1;$$

und dies dürfte die einfachste Gestalt sein, welche man dem $\delta\mathsf{P}$ zuzuertheilen im Stande ist.

§ 5.

Resultat der angestellten Untersuchung.

Wollen wir von dem Resultat unserer Untersuchung ein anschauliches Bild haben, so wird es gut sein, zuvörderst an die betreffenden Vorstellungen, Bezeichnungen und Definitionen zu erinnern, und sodann erst das eigentliche Resultat, in Gestalt eines bestimmten Theorems, folgen zu lassen.

Vorstellungen und Definitionen. — *Es seien gegeben zwei starre Körper M, M_1 und ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$; und zwar seien all' diese drei Objecte*

$$M,\ M_1 \quad \text{und} \quad [x, y, z] \tag{48.}$$

in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen. Auch mögen in den Körpern M und M_1 irgend welche elektrische Strömungen stattfinden. Ob die Körper mit isolirenden Hüllen umkleidet sind, oder nicht, mag ganz dahingestellt bleiben.

Für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper seien die Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{array}{l} DM,\ D\tau,\ x,\ y,\ z,\ i,\ u,\ v,\ w, \\ DM_1,\ D\tau_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ i_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1, \end{array} \tag{49.}$$ *[vgl. Seite 133 (2.)];*

ferner sei gesetzt:

$$\begin{gathered} r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ a = \frac{x - x_1}{r}, \quad b = \frac{y - y_1}{r}, \quad c = \frac{z - z_1}{r}; \end{gathered} \tag{50.}$$

ferner mögen T, T_1, S die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} T &= au\ + bv\ + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned} \tag{51.}$$

Ueberdies sei E eine dem Element $DM(D\tau)$ zugehörige Function, definirt durch die beiden Formeln [(P.), (P'.) Seite 212]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} D\tau = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau, \tag{52j.}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} D\tau = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right) D\tau - [u\cos(n, x) + \cdot\cdot]\, Do. \tag{52o.}$$

Und zwar soll die erste oder zweite Formel gelten, jenachdem das Element $DM(D\tau)$ ganz innerhalb des Körpers M, oder aber an seiner Oberfläche liegt. Dabei soll, was diesen letztern Fall betrifft, unter Do dasjenige Flächenelement verstanden werden, welches die Oberfläche des Elementes $DM(D\tau)$ und die Oberfläche des Körpers M mit einander gemein haben. Zugleich soll n die auf Do errichtete innere Normale sein.

In analoger Weise soll ferner E_1 definirt gedacht werden für das Element $DM_1(D\tau_1)$ des Körpers M_1.

Es bezeichne nun weiter P folgenden Ausdruck:

$$P = -A^2 \iint \left(\frac{1+k}{2}\,\frac{S}{r} + \frac{1-k}{2}\,\frac{TT_1}{r}\right) D\tau D\tau_1, \tag{53.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ und $D\tau_1$ der beiden Körper. Versetzt man diesen Ausdruck P in die Gestalt:

$$(54.)\qquad P = -A^2 \iint \frac{TT_1}{r} D\tau D\tau_1 + \mathsf{P},$$

so wird man das hier auftretende Glied P *in doppelter Weise darzustellen im Stande sein, nämlich durch die Formel* [*vgl.* (10.)]:

$$(55.)\qquad \mathsf{P} = + A^2 \frac{1+k}{2} \iint \frac{TT_1 - S}{r} D\tau D\tau_1,$$

ebenso gut aber auch durch folgende Formel [*vgl.* (13.)]:

$$(56.)\qquad \mathsf{P} = + A^2 \frac{1+k}{2} \iint r \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1.$$

Zugleich sei bemerkt, dass der dem Zeitelement dt *entsprechende convective Zuwachs* $\delta \mathsf{P}$ *folgenden Werth hat* [*vgl.* (47.)]:

$$(57.)\qquad \delta\mathsf{P} = + A^2 \frac{1+k}{2} \iint (dr) \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1.$$

Der Ausdruck P (53.), (54.) *soll hinfort das* *elektrodynamische Potential* *der beiden Körper* M *und* M_1 *genannt werden.* [*Vgl. Seite 215*].

Unter Zugrundelegung all' dieser Vorstellungen, Bezeichnungen und Definitionen gilt nun folgender Satz:

Theorem. — *Die während der Zeit* dt *von den beiden Körpern* M *und* M_1 *auf einander ausgeübten elektromotorischen und ponderomotorischen Arbeiten sind, mittelst des Potentials* P *und unter Anwendung gewisser Zusatzglieder* (α.), (β.), *folgendermassen ausdrückbar* [*vgl.* (19a, b, c.) *und* (20.)]:

$$(58\text{a.})\qquad (d\mathfrak{L})_M^{M_1} = + dP - \Delta_M P + (\alpha.),$$

$$(58\text{b.})\qquad (d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = + dP - \Delta_{M_1} P + (\beta.),$$

$$(58\text{c.})\qquad (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = - \delta P - [(\alpha.) + (\beta.)].$$

Diese Zusatzglieder (α.), (β.) *sind in ziemlich einfacher Weise ausdrückbar mittelst der vorhin definirten Grössen* $\frac{\partial E}{\partial t}$, $\frac{\partial E_1}{\partial t}$, (52j, o.). *Es ist nämlich* [*vgl.* (43a, b.)]:

$$(59.)\qquad \begin{aligned} (\alpha.) &= A^2 \iint \left(\frac{T_1\, dr}{r}\right) \frac{\partial E}{\partial t} D\tau D\tau_1 - \frac{\delta\mathsf{P}}{2}, \\ (\beta.) &= A^2 \iint \left(-\frac{T\, dr}{r}\right) \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1 - \frac{\delta\mathsf{P}}{2}, \end{aligned}$$

wo $\delta\mathsf{P}$ *den Werth hat* [*vgl.* (57.)]:

$$(60.)\qquad \delta\mathsf{P} = A^2 \frac{1+k}{2} \iint (dr) \frac{\partial E}{\partial t} \frac{\partial E_1}{\partial t} D\tau D\tau_1.$$

In den Formeln (59.), (60.) *sind die Integrationen ausgedehnt über alle Volumelemente* $D\tau$ *und* $D\tau_1$ *der beiden Körper* M *und* M_1.

Was ferner die Zuwüchse d, δ, Δ *betrifft, so ist selbstverständlich:*

$$(61.)\qquad d = \delta + \Delta.$$

Ueberdies aber ist der convective Zuwachs δ *von Neuem in zwei Theile zerlegt zu denken, und ebenso auch der endogene Zuwachs* Δ:

(62.) $$\delta = \delta_M + \delta_{M_1} \quad \textit{und} \quad \Delta = \Delta_M + \Delta_{M_1},$$

der Art, dass δ_M, Δ_M *die vom Körper* M, *andrerseits* δ_{M_1}, Δ_{M_1} *die vom Körper* M_1 *herrührenden Theile vorstellen.* [*Vgl. Seite 210*].

Die Darstellungen (58a, b, c.) *entsprechen, bis auf die Zusatzglieder* (α.), (β.), *vollständig denjenigen Gesetzen, welche von F. Neumann speciell für lineare Stromringe aufgestellt sind.* [*Vgl. Seite 211* (11.), (12.)].

Addirt man die drei Formeln (58a, b, c), *so ergiebt sich mit Hinblick auf* (61.), (62.):

(63.) $$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M + (d\mathfrak{L})_M^{M_1} + (d\mathfrak{L})_{M_1}^M = dP;$$

was in Einklang ist mit dem Helmholtz'schen Princip des vollständigen Differentials.

Bemerkung. — Entspricht die elektrische Bewegung des Körpers M *zu Anfang* der Zeit dt, d. i. im Augenblick t den Bedingungen:

(A.) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, & \text{(im Innern von } M\text{)}, \\ u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0, & \text{(an der Oberfl. von } M\text{)}, \end{cases}$$

und entspricht ferner die elektrische Bewegung des Körpers M_1 den analogen Bedingungen, so werden

(B.) $$\frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} \quad \text{durchweg} = 0$$

sein [nach (52j, o.)]. Folglich werden alsdann die Grössen

(C.) $$\mathsf{P},\ \delta\mathsf{P},\ (\alpha.),\ (\beta.) \text{ ebenfalls alle } = 0$$

sein [nach (56.), (57.) und (59), (60.)]. Folglich werden alsdann die Formeln (58a, b, c.) sich reduciren auf:

(Da.) $$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = +\,dP - \Delta_M P,$$

(Db.) $$(d\mathfrak{L})_{M_1}^M = +\,dP - \Delta_{M_1} P,$$

(Dc.) $$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = -\,\delta P;$$

so dass also in dem hier betrachteten Specialfall die Uebereinstimmung mit den F. Neumann'schen Gesetzen, d. i. mit den Formeln Seite 211 (11.), (12.) *eine absolute ist.* Noch sei bemerkt, dass in diesem Specialfall das Potential P (54.) sich reducirt auf:

(E.) $$P = -A^2 \iint \frac{TT_1}{r} D\tau\, D\tau_1;$$

denn nach (C.) ist $\mathsf{P} = 0$.

§ 6.

Ueber die Existenz eines elementaren Potentials.

Bei den Betrachtungen des vorigen Paragraphs ist [vgl. z. B. Seite 224] völlig dahingestellt geblieben, ob die Körper M und M_1 mit isolirenden Hüllen umkleidet sind oder nicht. Hieraus folgt, dass die erhaltenen Resultate auch dann noch in Kraft bleiben, wenn man statt der Körper selbst irgend welche *Theile* derselben betrachtet. Somit ergiebt sich folgendes

Allgemeineres Theorem. — *Das soeben ausgesprochene Theorem* (58.), (59.), ... (63.) *wird auch dann noch in Kraft bleiben, wenn man daselbst unter M und M_1 irgend welche Theile der gegebenen Körper versteht. Denkt man sich aber diese Theile M und M_1 unendlich klein, so werden dieselben nichts Anderes sein als zwei körperliche Stromelemente.*

In diesem Fall wird alsdann P zu bezeichnen sein als das gegenseitige Potential der beiden Stromelemente.

Hinsichtlich der elektromotorischen und ponderomotorischen Elementargesetze würde daher durch die Formeln (58a, b, c.) das eigentliche *Helmholtz'sche Ideal* erreicht sein, — falls nur daselbst die Zusatzglieder nicht vorhanden wären. Denn das Helmholtz'sche Ideal besteht wohl ohne Zweifel darin, die elektromotorischen und ponderomotorischen Elementarwirkungen in einfacher Weise aus einem einzigen Ausdruck (einem elementaren Potential) abzuleiten.

§ 7.

Betrachtung eines speciellen Falles.

Die Vorstellung (48.) werde ersetzt durch die speciellere Vorstellung:

$$M, \quad \boxed{M_1 \boxed{x, y, z}}; \tag{64.}$$

der Art, dass diese beiden Objecte in ganz beliebigen Bewegungen begriffen sein sollen. Ueberdies mögen die in M_1 vorhandenen Strömungen

$$u_1,\ v_1,\ w_1 \quad \textit{unabhängig von der Zeit sein,} \tag{65.}$$

und zugleich auch folgenden beiden Bedingungen entsprechen:

$$(66.)\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0, & (\textit{im Innern von } M_1), \\ u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) = 0, & (\textit{an der Oberfl. von } M_1). \end{cases}$$

Alsdann ergiebt sich aus (52j, o.) und (56.), (57.) sofort:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = 0, \qquad \mathsf{P} = 0, \qquad \delta \mathsf{P} = 0; \tag{67.}$$

mittelst dieser drei Relationen ergiebt sich einerseits aus (54.):

$$P = -A^2 \int\int \frac{T\,T_1}{r} D\tau D\tau_1, \tag{68.}$$

und andrerseits aus (59.):

$$\begin{cases} (\alpha.) = +A^2 \int\int \left(\frac{T_1 dr}{r}\right) \frac{\partial E}{\partial t} D\tau D\tau_1, \\ (\beta.) = 0. \end{cases} \tag{69.}$$

Nun ist $T_1 = au_1 + bv_1 + cw_1$. Somit folgt aus (68.):

$$\Delta_{M_1} P = -A^2 \int\int \frac{T(a\Delta u_1 + b\Delta v_1 + c\Delta w_1)}{r} D\tau D\tau_1,$$

also mit Hinblick auf (64.), (65.):

$$\Delta_{M_1} P = 0. \tag{70.}$$

Durch die Relationen (69.), (70.) erlangt jetzt die allgemeine Formel (58b.) die einfache Gestalt:

$$(d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = dP. \tag{71.}$$

Dies aber in (63.) substituirt, erhält man sofort:

$$dL + (d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = 0, \tag{72.}$$

wo unter dL, wie gewöhnlich, folgendes Binom zu verstehen ist:

$$dL = (dL)_{M}^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M}. \tag{73.}$$

Diese Formeln (71.), (72.), (73.) liefern folgenden

Satz. — *Zwei starre Körper M und M_1 seien in beliebigen Bewegungen begriffen. Ferner mag der elektrische Strömungszustand des Körpers M ebenfalls ein ganz beliebiger und beliebig sich ändernder sein. Hingegen mag der elektrische Strömungszustand des Körpers M_1, mit Bezug auf ein in die ponderable Masse dieses Körpers eingefügtes rechtwinkliges Axensystem den Bedingungen* (65.), (66.) *entsprechen.*

Alsdann werden für jedwedes Zeitelement dt die beiden Formeln gelten [*vgl.* (72.) *und* (71.)]:

$$(d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = -dL, \tag{74a.}$$

$$(d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = +dP. \tag{74b.}$$

Hier bezeichnet dL (73.) *die während der Zeit dt von den beiden Körpern M und M_1 aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit. Andrerseits bezeichnet P* (68.) *das gegenseitige Potential der beiden Körper, und dP den Zuwachs dieses Potentials während der Zeit dt.*

Bemerkung. — Der Satz (74a.) kann angesehen werden als eine Verallgemeinerung des im ersten Theil dieses Werkes auf Seite 235 aufgestellten Satzes (8.)

§ 8.

Betrachtung eines noch specielleren Falles.

Zu den Voraussetzungen des vorigen Paragraphs wollen wir gegenwärtig noch die hinzufügen, dass der Körper M ein *ungeschlossener linearer Leiter* sei.

Es sei nämlich gegeben ein in beliebiger Bewegung begriffener linearer Ring, dessen Stromstärke J eine *blosse Function der Zeit* ist. Ferner seien $q_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$ irgend zwei senkrechte Querschnitte dieses Ringes. Und unter dem Körper M mag derjenige zwischen $q_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$ liegende Theil dieses Ringes verstanden sein, in welchem der Strom J von $q_\mathfrak{a}$ nach $q_\mathfrak{b}$ fliesst.

Die Querschnitte $q_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$ sind als ausserordentlich klein, mithin als *Punkte* anzusehen. Demgemäss werden wir diese Querschnitte hin und wieder kurzweg mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und den Körper M mit $\mathfrak{ab}$ bezeichnen.

Ist Do ein Oberflächenelement des *linearen Körpers* M, und n die auf Do errichtete innere Normale, so wird der diesem Element Do zugehörige Ausdruck

$$(75.)\qquad [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, Do$$

offenbar stets $= 0$ sein, ausser für $Do = q_\mathfrak{a}$ und $Do = q_\mathfrak{b}$. Für das *specielle Element* $Do = q_\mathfrak{a}$ ist offenbar die Richtung n *identisch* mit der elektrischen Strömungsrichtung $i(u, v, w)$, mithin

$$u = i \cos(n, x), \quad v = i \cos(n, y), \quad w = i \cos(n, z);$$

so dass also der Ausdruck (75.) für dieses specielle Element in $i\,Do$, d. i. in J sich verwandelt. Betrachtet man nun ferner das *specielle Element* $Do = q_\mathfrak{b}$, so wird für dieses die Richtung n *entgegengesetzt* sein zur elektrischen Strömungsrichtung $i(u, v, w)$; so dass also für dieses der Ausdruck (75.) in $-i\,Do$, d. i. in $-J$ übergeht. *Kurz, man gelangt zu der Einsicht, dass der Ausdruck*

$$(75\text{a}.)\qquad [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, Do$$

für $Do = q_\mathfrak{a}$ den Werth J, für $Do = q_\mathfrak{b}$ den Werth $-J$, und für alle übrigen Oberflächenelemente Do des linearen Körpers M den Werth Null hat.

Man construire jetzt ein unendlich kleines Segment m des Körpers M, begrenzt von zwei aufeinanderfolgenden senkrechten Querschnitten q' und q''. Dabei denke man sich die Bezeichnung so eingerichtet, dass die elektrische Strömung im Segmente m von q' nach q'' geht. Das Segment m zerlege man nun in unendlich kleine Elemente zweiter Ordnung, und bezeichne die Volumina dieser letztern mit $D\tau$. Nach einem bekannten Green'schen Satz wird alsdann die Formel gelten:

$$(76.)\quad \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)D\tau = -\int[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,Do,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ und über alle Oberflächenelemente Do des Segmentes m. Dabei bezeichnet n die auf Do errichtete innere Normale. Mit Rücksicht auf die soeben angestellte Untersuchung des Ausdrucks (75.), erkennt man nun sofort, dass in der Formel (76.) das Integral rechter Hand auf $J'-J''$ sich reducirt, wo J' und J'' die Stromstärken in q' und q'' vorstellen.

Nach unserer Voraussetzung soll aber die Stromstärke J des linearen Körpers M eine *blosse Function der Zeit*, also in jedem Augenblick in allen Querschnitten des Körpers *ein und dieselbe* sein. Folglich ist $J'=J''$; so dass also die Formel (76.) sich reducirt auf

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)D\tau = 0.$$

Jenes Segment m, über dessen Volumelemente $D\tau$ die Integration in dieser Formel sich ausdehnt, ist aber ein *unendlich kleines*. Aus dem Verschwinden des Integrals folgt daher, dass der Ausdruck unter dem Integralzeichen ebenfalls gleich Null sein muss. *So gelangt man also zu der Einsicht, dass das Trinom*

$$(76a.)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

an allen Stellen (x, y, z) *des linearen Körpers* M *gleich* **Null** *ist.*

Wir stellen uns nun die Aufgabe, *die während der Zeit* dt *von den beiden Körpern* M, M_1 *aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit:*

$$(77.)\quad dL = (dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M$$

näher zu untersuchen. Dabei mag, der Bequemlichkeit halber, das in (64.) eingeführte System

$$(78.)\quad \boxed{M_1[x, y, z]}$$

als ein *ruhendes* angesehen werden. Und in diesem ruhenden System mögen die Lagen des Körpers M oder $\mathfrak{ab}$ in den Augenblicken t und $t+dt$ respective mit $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ bezeichnet sein.

Für die zu untersuchende Arbeit (77.) gilt die Formel (58c.):

$$dL = -\delta P - [(\alpha.) + (\beta.)].$$

Hieraus folgt, falls man für P, $(\alpha.)$, $(\beta.)$ die Werthe (68.), (69.) substituirt:

$$dL = A^2\int\int\delta\left(\frac{TT_1}{r}\right)\cdot D\tau D\tau_1 - A^2\int\int\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)\frac{\partial E}{\partial t}D\tau D\tau_1,$$

oder kürzer geschrieben:

$$(79.)\quad dL = -A^2\int\Phi\, D\tau_1,$$

wo alsdann Φ die Bedeutung hat:

$$(80.) \qquad \Phi = -\int \delta\left(\frac{TT_1}{r}\right) \cdot D\tau + \int \left(\frac{T_1\,dr}{r}\right) \frac{\partial E}{\partial t}\, D\tau.$$

Dieser Ausdruck Φ aber kann, falls man die in (52j, o.) für $\frac{\partial E}{\partial t} D\tau$ gegebene Definition beachtet, offenbar auch so geschrieben werden:

$$(81.) \qquad \Phi = -\int \delta\left(\frac{TT_1}{r}\right) \cdot D\tau - \int \left(\frac{T_1\,dr}{r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\tau$$
$$- \int \left(\frac{T_1\,dr}{r}\right) [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, Do,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$, respective über alle Oberflächenelemente Do des Körpers $M(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Diese Formel (81.) reducirt sich, mittelst der beiden Sätze (75 a.) und (76 a.), auf:

$$(82.) \qquad \Phi = -\int \delta\left(\frac{TT_1}{r}\right) \cdot D\tau + J\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)_{\mathfrak{b}} - J\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)_{\mathfrak{a}},$$

wo die Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Werthe des eingeklammerten Ausdrucks in den Punkten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ andeuten sollen. Endlich kann man die rechte Seite der Formel (82.) als eine Summe von *vier Gliedern* schreiben:

$$(83.) \quad \Phi = \left[\int \frac{TT_1}{r} D\tau\right] + \left[-\int \left(\frac{TT_1}{r} + \delta \frac{TT_1}{r}\right) D\tau\right] + \left[J\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)_{\mathfrak{b}}\right] + \left[-J\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)_{\mathfrak{a}}\right].$$

Nun ist nach (51.):

$$\int \frac{TT_1}{r} D\tau = \int \frac{(au + bv + cw)(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} D\tau.$$

Denkt man sich aber $D\tau$ als ein kleines cylindrisches Element von der Länge Ds, so ist bekanntlich [vgl. Seite 66 (12.)]:

$$uD\tau = JADs, \quad vD\tau = JBDs, \quad wD\tau = JCDs,$$

wo A, B, C die Richtungscosinus von Ds vorstellen. Somit folgt:

$$(\text{f.}) \qquad \int \frac{TT_1}{r} D\tau = J \int_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} \frac{(aA + bB + cC)(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} Ds,$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Längenelemente Ds des linearen Körpers $M(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Diese Formel (f.) liefert nicht nur das *erste*, sondern gleichzeitig auch das *zweite* Glied des Ausdrucks (83.). Vergegenwärtigt man sich nämlich den linearen Leiter M in seinen beiden Lagen zu Anfang und zu Ende der Zeit dt, d. i. in den Lagen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, so werden offenbar das *erste* und *zweite* Glied genau denselben Werth (f.) besitzen, nur mit dem Unterschiede, dass die Integration im einen über $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, im andern aber über $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ sich hinerstreckt, und dass das eine den Factor J, das andere aber den Factor $-J$ enthält.

Ferner ist nach (50.): $dr = a(dx - dx_1) + b(dy - dy_1) + c(dz - dz_1)$. Die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines zu M_1 gehörigen Massenpunktes sind aber [nach (78.)] unveränderlich, mithin $dx_1 = dy_1 = dz_1 = 0$. Also:

$$dr = adx + bdy + cdz.$$

Demgemäss ergiebt sich für das *dritte* Glied des Ausdrucks (83.) die Darstellung:

$$J\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)_{\mathfrak{b}} = J\left(\frac{(a\,dx + b\,dy + c\,dz)(a u_1 + b v_1 + c w_1)}{r}\right)_{\mathfrak{b}},$$

wo dx, dy, dz die der Zeit dt entsprechende Verschiebung des Punktes $\mathfrak{b}$, d. i. die kleine Linie $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, oder vielmehr die Componenten dieser Linie vorstellen. Bezeichnet man also die kleine Linie $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ mit $Ds_{\mathfrak{b}}$ und die Richtungscosinus derselben mit $A_{\mathfrak{b}}$, $B_{\mathfrak{b}}$, $C_{\mathfrak{b}}$, so erhält man:

$$\text{(g.)} \qquad J\left(\frac{T_1\,dr}{r}\right)_{\mathfrak{b}} = J\,\frac{(a A_{\mathfrak{b}} + b B_{\mathfrak{b}} + c C_{\mathfrak{b}})(a u_1 + b v_1 + c w_1)}{r}\,Ds_{\mathfrak{b}}.$$

Eine völlig analoge Formel ergiebt sich offenbar für das *vierte* Glied des Ausdrucks (83.), nur mit dem Unterschiede, dass das dritte Glied den Factor J, das vierte aber den Factor $-J$ enthalten wird.

Alles zusammengenommen, ergiebt sich auf Grund der Formeln (f.), (g.), dass der Ausdruck (83.) folgendermassen darstellbar ist:

$$\text{(84.)} \qquad \Phi = J\int \frac{(aA + bB + cC)(a u_1 + b v_1 + c w_1)}{r}\,Ds,$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente Ds der in sich zurücklaufenden Linie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{a}$. Substituirt man endlich diesen Werth (84.) in der Formel (79.), so erhält man:

$$\text{(85.)} \quad dL = -A^2 J \iint \frac{(aA + bB + cC)(a u_1 + b v_1 + c w_1)}{r}\,Ds\,D\tau_1.$$

Dieser Ausdruck aber ist, wie man mit Hinblick auf (68.) sofort erkennt, nichts Andres als das Potential P, dasselbe gebildet gedacht einerseits für den Körper M_1 und andrerseits für die vom Strome J durchflossen gedachte Peripherie $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'\mathfrak{a}$. Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz.

Satz. — *Die in einem starren Körper M_1 vorhandenen elektrischen Strömungen u_1, v_1, w_1 mögen bezogen sein auf ein in die ponderable Masse des Körpers eingefügtes rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$, und folgenden drei Bedingungen entsprechend gedacht werden:*

$$\text{(86.)} \begin{cases} u_1,\ v_1,\ w_1 \quad \textit{unabhängig von der Zeit}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0, \quad (\textit{im Innern von } M_1), \\ u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) = 0, \ (\textit{an der Oberfl. von } M_1). \end{cases}$$

Ueberdies denke man sich einen starren linearen Leiter $\mathfrak{ab}$, *der in der Richtung* $\mathfrak{ab}$ *von einem elektrischen Strome durchflossen ist, dessen Stärke* J *eine blosse Function der Zeit ist.*

Befindet sich nun (um die Vorstellung zu fixiren) der Körper M *in Ruhe, hingegen der Körper* $\mathfrak{ab}$ *in beliebiger Bewegung, so wird die während der Zeit* dt *von diesen beiden Körpern aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit* dL *den Werth haben:*

$$dL = p. \tag{87.}$$

Hier bezeichnet p *das elektrodynamische Potential des Körpers* M_1 *auf das während der Zeit* dt *vom linearen Leiter* $\mathfrak{ab}$ *beschriebene Viereck, dieses Viereck von einem constanten Strome umflossen gedacht, der, seiner Stärke und Richtung nach, auf der Anfangsseite des Vierecks mit dem gegebenen Strome* J *übereinstimmt.*

Demgemäss ergiebt sich nun weiter aus (74a, b.):

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = -p, \tag{88a.}$$

$$(d\mathfrak{L})_{M_1}^M = +dP, \tag{88b.}$$

wo P *das gewöhnliche gegenseitige Potential der beiden Körper* M, M_1 *vorstellt. Aus den Formeln* (87.) *und* (88a, b.) *folgt durch Addition:*

$$dL + (d\mathfrak{L})_M^{M_1} + (d\mathfrak{L})_{M_1}^M = dP; \tag{89.}$$

was in Einklang steht mit dem Princip des vollständigen Differentials.

Bemerkung. — Die Betrachtungen des gegenwärtigen Abschnitts basiren auf der im achten Abschnitt entwickelten Theorie, zu deren Bestandtheilen z. B. auch das *Ampère'sche Gesetz* gehört. [Vgl. Seite 168].

Nimmt man nun für den Körper M_1 einen linearen Ring, dessen Stromstärke J_1 constant ist, so kann man für diesen speciellen Fall zum Satze (87.) direct auf Grund jenes Ampère'schen Gesetzes gelangen; — was hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

§ 9.

Ueber die annularen Bedingungen und den annularen Strömungszustand.

Es sollen die beiden Bedingungen (66.) Seite 227 einer nähern Untersuchung unterworfen werden. Statt der Bezeichnungen $M_1, x_1, u_1, \ldots$ mögen dabei aber die einfacheren Bezeichnungen $M, x, u, \ldots$ benutzt werden.

Es sei also gegeben ein starrer Körper M und ein mit ihm festverbundenes rechtwinkliges Axensystem:

$$\boxed{M[x, y, z]}. \tag{1.}$$

Im Körper M sei ein mit der Zeit sich ändernder elektrischer Strömungszustand

(2) $u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t)$

vorhanden, der indessen fortdauernd den beiden Bedingungen entsprechen soll:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \text{(im Innern von } M\text{)}, \tag{3.}$$

(4.) $u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = 0$, (an der Oberfl. von M),

wo n die auf der Oberfläche errichtete innere Normale bezeichnet. *Wir stellen uns die Aufgabe, diesen Strömungszustand genauer zu untersuchen.*

Sind

(5.) $F = F(x, y, z, t), \quad G = G(x, y, z, t), \quad H = H(x, y, z, t)$

drei *beliebig gegebene* stetige Functionen, und setzt man, unter Hinzunahme einer vierten noch *unbekannten* Function Ψ:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ w &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \end{aligned} \tag{6.}$$

so gehen die Bedingungen (3.), (4.) über in:

$$\Delta \Psi = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \tag{7.}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = -\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \cos(n, x) + \cdots\right], \tag{8.}$$

wo die rechte Seite der letzten Formel, ebenso wie F, G, H selber, eine *gegebene* Function vorstellt.

Ist nun die Oberfläche des Körpers M überall *convex*, so kann man durch die Methode des arithmetischen Mittels eine den Bedingungen (7.), (8.) entsprechende Function Ψ wirklich finden. [Vgl. die Erläuterung zu Ende dieses Paragraphs]. Auch wird diese Function Ψ, ebenso wie die in (8.) auftretenden Functionen F, G, H, im Allgemeinen von der Zeit abhängen:

$$\Psi = \Psi(x, y, z, t). \tag{9.}$$

Jene Functionen F, G, H konnten aber ganz *beliebig* gegeben sein. Folglich existiren unendlich viele, den Bedingungen (3.), (4.) entsprechende elektrische Strömungszustände. Auch werden all' diese Zustände im Allgemeinen Functionen der Zeit sein, d. h. im Laufe der Zeit sich ändern.

Dies gilt für einen Körper mit überall *convexer* Oberfläche, und wird also vermuthlich auch gelten für einen Körper von ganz *beliebiger* Oberfläche, so dass man also wohl sagen darf:

Satz. — *Für einen starren Körper M existiren unendlich viele Strömungszustände, deren jeder den Bedingungen entspricht*)*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\textit{im Innern von } M), \tag{10.}$$

$$u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = 0, \quad (\textit{an der Oberfl. von } M). \tag{11.}$$

Jeder solcher Zustand wird im Allgemeinen im Laufe der Zeit sich ändern. Und demgemäss werden auch die Stromcurven und Stromfäden eines solchen Zustandes im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick andere werden.

Zusatz. — *Welche Aenderungen ein solcher Stromfaden im Laufe der Zeit aber auch erfahren mag, stets wird er in sich zurücklaufen, also als ein Stromring zu bezeichnen sein. Auch wird die Stromstärke eines solchen Ringes eine blosse Function der Zeit sein, nämlich in jedem einzelnen Zeitaugenblick an allen Stellen des Ringes ein und denselben Werth haben.*

Beweis des Zusatzes. — Die Differentialgleichungen der *Stromcurven* lauten:

$$Dx : Dy : Dz = u : v : w, \tag{12.}$$

wo u v, w Functionen von x, y, z, t sind. Sind nun

$$\varphi(x, y, z, t) = K_1 \quad \text{und} \quad \psi(x, y, z, t) = K_2 \tag{13.}$$

die mit zwei willkürlichen Constanten K_1, K_2 behafteten Integrale dieser Differentialgleichungen, so werden offenbar die Stromcurven nichts Andres sein, als die Schnittcurven der beiden durch die Gleichungen (13.) dargestellten Flächensysteme.

Man construire jetzt in irgend einem Augenblick t irgendwo im Innern des Körpers, etwa an der Stelle (x, y, z) ein unendlich kleines Flächenelement $D\pi$, senkrecht gegen die augenblicklich an dieser Stelle vorhandene elektrische Strömung $i(u, v, w)$. Ferner construire man für diesen Augenblick t alle durch den *Rand* von $D\pi$ gehenden Stromcurven. Diese Curven bilden dann in ihrer Gesammtheit einen unenddünnen *Stromcanal.* Oder sie bilden, wie Helmholtz sich ausdrückt, die Oberfläche eines unendlich dünnen *Stromfadens,* der an jener Stelle (x, y, z) das Flächenelement $D\pi$ zum senkrechten Querschnitte hat.

---

*) Wir werden später [Bemerkung, Seite 237] diese beiden Bedingungen (10.), (11.) kurzweg die *annularen Bedingungen,* und jeden Strömungszustand, der denselben entspricht, einen *annularen Zustand* nennen.

Die während der Zeit dt durch $D\pi$ hindurchfliessende Elektricitätsmenge hat den Werth [vgl. Seite 118]:

$$(14.) \qquad i\,D\pi\,dt.$$

Auch pflegt man diese Elektricitätsmenge

$$(15.) \qquad i\,D\pi\,dt = J\,dt,$$

zu setzen, und alsdann J die *Stromstärke* des Fadens an jener Stelle $D\pi(x, y, z)$ zu nennen.

Es seien nun $D\pi'$ und $D\pi''$ zwei ganz beliebige, beliebig weit voneinander entfernte senkrechte Querschnitte des für den Augenblick t construirten Stromfadens. Ferner seien

$$(16.) \qquad J' = i'D\pi' \quad \text{und} \quad J'' = i''D\pi''$$

die Stromstärken des Fadens an diesen beiden Stellen $D\pi'$ und $D\pi''$. *Es sollen die Werthe von J' und J'' näher untersucht werden.*

Zu diesem Zweck bringen wir die bekannte Formel

$$(17.) \quad \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\tau = -\int [u\cos(n, x) + v\cos(n, y) + w\cos(n, z)]\, Do$$

in Anwendung auf das von $D\pi'$ und $D\pi''$ begrenzte Segment des Stromfadens; so dass also die Integrationen links und rechts ausgedehnt zu denken sind über alle Volumelemente $D\tau$ und über alle Oberflächenelemente Do dieses Segmentes; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete innere Normale.

Die *Mantelfläche* des Segmentes besteht aus lauter Stromcurven. Für jedes Element Do dieser Mantelfläche wird daher der in (17.) in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck $= 0$ sein; weil für jedes solches Element Do die Strömung $i(u, v, w)$ senkrecht zu n ist. Demgemäss reducirt sich die rechte Seite der Formel (17.) auf die den beiden *Endflächen* $D\pi'$ und $D\pi''$ zugehörigen Glieder. Man erhält also:

$$(18.) \quad \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\tau = \begin{cases} -[u'\cos(n', x) + v'\cos(n', y) + w'\cos(n', z)]\, D\pi' \\ -[u''\cos(n'', x) + v''\cos(n'', y) + w''\cos(n'', z)]\, D\pi'' \end{cases}$$

Um die Vorstellung zu fixiren, mögen die Bezeichnungen $D\pi'$, $D\pi''$ so gewählt sein, dass die Strömung des betrachteten Segmentes von $D\pi'$ nach $D\pi''$ geht. Alsdann ist offenbar:

$$\begin{aligned} u' &= i'\cos(n', x), & u'' &= -\,i''\cos(n'', x), \\ v' &= i'\cos(n', y), & v'' &= -\,i''\cos(n'', y), \\ w' &= i'\cos(n', z), & w'' &= -\,i''\cos(n'', z), \end{aligned}$$

wo n' und n'', ebenso wie in (18.), die auf $D\pi'$ und $D\pi''$ errichteten und in das Innere des Segmentes hineinlaufenden Normalen vorstellen. Demgemäss ergiebt sich aus (18.):

$$(19.)\qquad \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)D\tau=-i'D\pi'+i''D\pi'',$$

also mit Hinblick auf (16.):

$$(20.)\qquad \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)D\tau=-J'+J''.$$

Die linke Seite dieser Formel (20.) ist aber, nach (10.), $=0$. Somit folgt:

$$(21.)\qquad J'=J''.$$

Die Stromstärke des Fadens wird also, in einem gegebenen Augenblick, an allen Stellen des Fadens ein und denselben Werth haben.

Hieraus folgt sofort, dass der Faden *im Innern* des Körpers nirgends endigen kann. Andererseits aber folgt aus (11.), dass der Faden, falls er die Oberfläche des Körpers überhaupt erreicht, zur Oberfläche tangential sein muss, und dass er also auch *an der Oberfläche* nirgends endigen kann. Folglich ist der Faden ein *in sich zurücklaufender.* — Hiemit aber sind alle Behauptungen des Zusatzes bewiesen.

Bemerkung. — Stationär wird man den hier betrachteten elektrischen Strömungszustand wohl schwerlich nennen dürfen. Denn die einzelnen Stromringe verschieben sich ja im Innern des Körpers im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick. Auch sind die Stromstärken der Ringe Functionen der Zeit.

Jedenfalls bilden die Ringe selber ein charakteristisches Merkmal des betrachteten Zustandes. Und demgemäss mag es gestattet sein, denselben als *annularen Zustand*, und die denselben definirenden Gleichungen (3.), (4.) als die *annularen Bedingungen* zu bezeichnen. Solches festgesetzt, kann man alsdann z. B. [vgl. (Da, b, c.) Seite 226] folgenden Satz aussprechen:

Satz. — *Die F. Neumann'schen Integralgesetze sind für ein gegebenes Zeitelement dt auf zwei starre Körper M und M_1 ohne Weiteres, nämlich ohne irgend welche Zusatzglieder anwendbar, falls man nur voraussetzt, dass die elektrischen Strömungszustände der beiden Körper den annularen Bedingungen entsprechen, oder denselben wenigstens entsprechen im ersten Augenblick jenes Zeitelementes dt.*

Nachträgliche Erläuterungen zu Seite 234. — Ist die Oberfläche eines Körpers M überall convex, und denkt man sich auf dieser Oberfläche irgend eine Function f in bestimmter Weise vorgeschrieben, so wird man durch die Methode des arithmetischen Mittels stets eine Function Ψ zu bilden im Stande sein, welche folgenden beiden Bedingungen entspricht:

$$(\alpha.)\qquad \Delta\Psi=0,\quad \text{(im Innern von } M\text{)},$$

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n}=f,\quad \text{(an der Oberfläche von } M\text{)}.$$

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, jene vorgeschriebene Function f sei von solcher Art, dass das über alle Oberflächenelemente Do ausgedehnte Integral

$$\int f\, Do = 0 \tag{γ.}$$

ist. — Den Beweis dieser Behauptung findet man in meinen „*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*“, *Leipzig, bei Teubner*, 1877, daselbst Seite 216, zweite Aufgabe.

Die Gleichungen (α.), (β.) verwandeln sich nun in die Gleichungen (7.), (8.) Seite 234, falls man für f den Ausdruck nimmt:

$$f = -\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\cos(n, x) + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\cos(n, y) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\cos(n, z)\right].$$

Dass aber dieser Ausdruck der Anforderung (γ.) entspricht, ergiebt sich leicht mittelst der Stokes'schen Formel (B.) Seite 4. Denn die linke Seite jener Formel (B.) Seite 4 wird offenbar $= 0$ werden, sobald man sie anwendet auf eine *geschlossene* Fläche.

§ 10.

Ein sehr specieller Fall des annularen Zustandes.

Wenn auch die Stromringe des annularen Zustandes *im Allgemeinen* von Augenblick zu Augenblick sich verschieben, so werden doch *specielle Fälle* existiren, in denen sie im Innern des betrachteten Körpers fortdauernd ein und dieselben bleiben, so dass jeder solcher Ring fortdauernd ein und dieselben ponderablen Massenpunkte des Körpers beherbergt. Auf einen derartigen Specialfall soll hier näher eingegangen werden.

Der gegebene starre Körper M sei ein *ringförmiger Rotationskörper* von beliebigem Querschnitt, und seine geometrische Axe sei identisch mit der x-Axe des Coordinatensystems. Alsdann wird den Bedingungen des annularen Zustandes, d. i. den Bedingungen (10.), (11.) Genüge geschehen, wenn man den Ausdruck bildet:

$$\Omega = \varphi(t) + \psi(t) \operatorname{Arctg} \frac{z}{y}, \tag{22.}$$

und sodann setzt:

$$u = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \tag{23.}$$

wo $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ beliebig gegebene Functionen der Zeit vorstellen.

Aus (22.), (23.) folgt nämlich sofort:

$$u = 0, \quad v = -\frac{z\psi(t)}{\varrho^2}, \quad w = +\frac{y\psi(t)}{\varrho^2}, \quad \text{wo } \varrho^2 = y^2 + z^2, \tag{24.}$$

mithin:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = +\frac{2\psi(t)yz}{\varrho^4}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{2\psi(t)yz}{\varrho^4}; \tag{25.}$$

so dass also der Bedingung (10.) Genüge geschieht. Beachtet man ferner, dass im gegenwärtigen Fall die auf der Oberfläche des Körpers in irgend einem Punkte (x, y, z) errichtete Normale n in der Meridianebene liegt, mithin der Proportion

$$\cos(n, y) : \cos(n, z) = y : z \tag{26.}$$

entspricht, so erkennt man aus (24.), (26.) sofort, dass die Bedingung (11.) ebenfalls erfüllt ist. — *Q. e. d.*

Im gegenwärtigen Fall werden nun die *Strömungscurven*, wie aus (24.) ersichtlich ist, fortdauernd *ein und dieselben* bleiben, nämlich dargestellt sein durch Kreise, die ihre Mittelpunkte in der x-Axe haben, und deren Ebenen gegen die x-Axe senkrecht stehen. Analoges gilt daher von den *Stromfäden*. Auch ergiebt sich aus (24.), dass die Strömungsstärke

$$i = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \tag{27.}$$

den Werth besitzt:

$$i = \frac{\psi(t)}{\varrho}, \tag{28.}$$

dass sie also an jeder Stelle umgekehrt proportional ist mit dem Abstande der Stelle von der x-Axe.

§ 11.

Allgemeine Betrachtung über die geometrische Darstellung eines beliebigen elektrischen Strömungszustandes.

Die ponderable Massenvertheilung eines anhomogenen Körpers kann durch Schattirung oder (besser ausgedrückt) durch Punktirung veranschaulicht werden, indem man in jedes Volumelement $D\tau$ in gleichmässiger Vertheilung ebenso viele Punkte hineinbringt, als die numerisch ausgedrückte *Masse* des Elementes beträgt. Bezeichnet man diese in $D\tau$ enthaltene Masse mit M, und die sogenannte *Dichtigkeit* derselben mit μ, so ist bekanntlich:

$$\mathsf{M} = \mu \cdot D\tau.$$

Denkt man sich also innerhalb $D\tau$ iu gleichmässiger Vertheilung jene Punkte, deren Menge (oder Anzahl) $= \mathsf{M}$ ist, so wird offenbar μ nichts Andres sein, als die Menge dieser Punkte, bezogen auf die Volumeinheit. D. h. es wird μ die Anzahl derjenigen Punkte sein, welche bei *ebenderselben* gleichmässigen Vertheilung zur Erfüllung der Volumeinheit erforderlich sein würden.

Bei derartigen Betrachtungen hat man offenbar die einzelnen Punkte als untereinander gleichwerthig, als *Elementarpunkte* anzusehen, etwa

als äusserst kleine Kügelchen, die alle ein und denselben Durchmesser besitzen.

In einigermassen analoger Art wird man den *elektrischen Strömungszustand* eines Körpers ebenfalls durch Schattirung zu versinnlichen im Stande sein. Denkt man sich nämlich irgendwo innerhalb des Körpers ein kleines Flächenelement $D\pi$ construirt, senkrecht gegen die dort vorhandene elektrische Strömung, und bezeichnet man die Stärke des durch $D\pi$ gehenden *Stromes* mit J, so ist bekanntlich

$$J = i \cdot D\pi,$$

wo i die sogenannte *Strömung* vorstellt [vgl. Seite 118 (Note)]. Nun wird man die Stromstärke J durch Punktirung andeuten können, indem man in das Flächenelement $D\pi$ in gleichförmiger Vertheilung ebenso viele Elementarpunkte hineinbringt, als der numerirche Werth von J beträgt. Gleichzeitig wird alsdann die Strömung i zu bezeichnen sein als die Menge (oder Anzahl) dieser Punkte, bezogen auf die Flächeneinheit.

Die Elementarpunkte kann man schliesslich durch *Elementarstriche* ersetzen, d. i. durch äusserst kleine Striche (von unbestimmter Länge), die in jenen Punkten gegen die Fläche $D\pi$ senkrecht stehen. Denkt man sich derartige Constructionen ausgeführt an allen Stellen des ganzen Körpers, so wird die Gesammtheit all' dieser Elementarstriche ein deutliches Bild liefern von dem betrachteten elektrischen Strömungszustande.

Sind $D\pi'$ und $D\pi''$ zwei senkrechte Querschnitte ein und desselben Stromfadens [vgl. Seite 235], so findet im Allgemeinen zwischen den zugehörigen Stromstärken

$$J' = i' D\pi' \quad \text{und} \quad J'' = i'' D\pi''$$

keinerlei Beziehung statt; so dass also die Menge der Elementarstriche innerhalb ein und desselben Stromfadens an verschiedenen Stellen des Fadens eine sehr verschiedene sein kann.

Nimmt man nun aber an, der betrachtete Strömungszustand entspreche der Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so wird

$$J' = J'' = J$$

sein, wo J die Stromstärke des betrachteten Stromfadens vorstellt; wie solches aus unseren früheren Untersuchungen [vgl. Seite 237 (21.)] leicht hervorgeht. In diesem besondern Fall wird also die Menge der Elementarstriche innerhalb des betrachteten Stromfadens an allen Stellen des Fadens *ein und dieselbe* sein; so dass also alsdann jene Elementar-

striche zu *Curven*, zu sogenannten *Elementarcurven* sich vereinigen lassen. Die Menge dieser Elementarcurven innerhalb des betrachteten Stromfadens wird $= J' = J'' = J$, d. i. gleich der Stromstärke des Fadens sein; und jede dieser Curven wird den Stromfaden seiner ganzen Länge nach durchziehen, und z. B. geschlossen sein, falls der Stromfaden ein in sich zurücklaufender ist. Um die Hauptsache hervorzuheben:

Erster Satz. — *Innerhalb eines gegebenen Körpers sei ein elektrischer Strömungszustand vorhanden, welcher der Bedingung entspricht:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad \text{(f.)}$$

Alsdann wird dieser Strömungszustand geometrisch darstellbar sein durch ein System von Elementarcurven, der Art, dass die Menge dieser Curven innerhalb eines jeden Stromfadens identisch ist mit der elektrischen Stromstärke des Fadens. Denkt man sich also innerhalb des Körpers ein Flächenelement Do construirt von ganz beliebiger Lage und Richtung, so wird die Stärke des durch Do gehenden Stromes identisch sein mit der Menge der durch Do hindurchgehenden Elementarcurven.

Zweiter Satz. — *Ist der gegebene Strömungszustand ein ganz beliebiger, so wird derselbe geometrisch darstellbar sein durch ein System zusammenhangloser Elementarstriche. Die Menge dieser Elementarstriche innerhalb eines gegebenen Stromfadens wird im Allgemeinen an verschiedenen Stellen des Fadens eine sehr verschiedene sein, und an jeder solchen Stelle identisch sein mit der daselbst vorhandenen Stromstärke des Fadens. Bezeichnet also wiederum Do irgend ein innerhalb des Körpers construirtes Flächenelement von ganz beliebiger Lage und Richtung, so wird die Stärke des durch Do gehenden Stromes identisch sein mit der Menge der durch Do hindurchgehenden Elementarstriche.*

Allerdings könnte man diese zusammenhanglosen Elementarstriche (deren Längen ohne Bedeutung sind) mit einander verbinden. Man würde alsdann aber nicht einfach fortlaufende Curven erhalten, sondern vielmehr ein im Allgemeinen mit unendlich vielen Verzweigungspunkten behaftetes Curvensystem.

Bemerkung. — Die Betrachtungen dieses Paragraphs sind offenbar anwendbar auf drei beliebig gegebene Functionen

$$u = u(x, y, z, t), \qquad v = v(x, y, z, t), \qquad w = w(x, y, z, t),$$

welche physikalische Bedeutung diese Functionen auch immer besitzen mögen. Für jeden gegebenen Zeitaugenblick t wird man also die Werthe dieser Functionen geometrisch zur Anschauung bringen können, je nach Umständen, bald durch ein System von *Elementarcurven*, bald durch ein System *zusammenhangloser Elementarstriche.*



Eilfter Abschnitt.

Ueber die Helmholtz'schen Dilatationsuntersuchungen. Erster Theil: Vorbereitende Betrachtungen.

Theoretische Fortschritte sind häufig dadurch erstrebt, respective erreicht worden, dass man sich auf einen kleinen Theil des zu erforschenden Gebietes concentrirte, — zuweilen aber auch dadurch, dass man umgekehrt die Grenzen des zu erforschenden Gebietes weiter ausdehnte. Zu den Unternehmungen letzterer Art gehören in der Elektrodynamik *die Helmholtz'schen Untersuchungen von 1874.* [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 702—762]. Während man nämlich bis zu jener Zeit die Elementargesetze der Elektrodynamik (abgesehen von biegsamen inextensiblen Drähten) nur für *starre* Körper zu finden suchte, hat Helmholtz in seiner Abhandlung vom Jahre 1874 diese Gesetze auch für solche Körper in Betracht gezogen, deren ponderable Masse in beliebigen Dilatationen oder Contractionen begriffen ist.

Auf diese Dinge wollen wir im gegenwärtigen und im nächstfolgenden Abschnitt näher eingehen, in der Hoffnung, in solcher Weise unsere Kenntnisse und Einsichten zu erweitern, namentlich aber auch deswegen, weil es sich hier um *neue Methoden* handelt. Und die *Methoden* dürften in der Wissenschaft im Allgemeinen wichtiger sein, als die augenblicklichen *Resultate.* Repräsentiren doch die Methoden das wirklich Bleibende und Unzerstörbare; während die Resultate, in Anbetracht der in's Unendliche fortschreitenden und von Jahrhundert zu Jahrhundert sich umgestaltenden Wissenschaft, immer nur etwas mehr oder weniger Provisorisches sein können.

§ 1.

Ueber convective und endogene Aenderungen.

Die ponderable Masse eines gegebenen Körpers befinde sich in irgend welchen Dilatationen (respective Contractionen); gleichzeitig seien im Innern dieser Masse elektrische Strömungen vorhanden. Und



zwar mögen jene Dilatationen, sowie auch diese Strömungen (aus irgend welchen Ursachen) von Augenblick zu Augenblick sich ändern. Markirt man also innerhalb des Körpers irgend welche ponderablen Massenpunkte, die in ihrer Gesammtheit ein kleines Flächenelement Do bilden, so wird dieses *ponderable Flächenelement* Do, in Folge jener Dilatationen, im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick seiner Lage, Richtung und Grösse nach sich ändern; und gleichzeitig wird auch die Stärke des durch Do fliessenden elektrischen Stroms von Augenblick zu Augenblick eine andere werden. Wir treffen nun folgende Festsetzung:

Definition. — *Die Aenderung des elektrischen Strömungszustandes soll eine blos convective heissen, wenn die Stärke des durch ein ponderables Flächenelement Do gehenden elektrischen Stromes fortdauernd sich gleich bleibt.*

Wollte man diese Definition auf den besondern Fall anwenden, dass die Dilatationen $= 0$ sind und beständig $= 0$ bleiben, so würde man sofort zurückgelangen zu den früher für *starre* Körper gegebenen Definitionen Seite 124—129.

Bemerkung. — Unter einem *ponderablen* Flächenelement Do ist ein Flächenelement Do verstanden worden, welches fortdauernd aus ein und denselben ponderablen Massenpunkten besteht. In analogem Sinne soll im Folgenden von einem *ponderablen Linienelement* $D\lambda$, und ebenso auch von einem *ponderablen Volumelement* $D\tau$ die Rede sein. In analogem Sinne wird ferner auch gesprochen werden von *ponderablen Curven, ponderablen Flächen, ponderablen Fäden, ponderablen Objecten*, u. s. w.

Man denke sich nun innerhalb des betrachteten Körpers eine *ponderable Fläche* ω construirt, von solcher Art, dass auf ihr im Augenblick t_0 Stromcurve neben Stromcurve liegt; so dass also diese *ponderable Fläche* ω im Augenblick t_0 mit einer aus lauter Stromcurven bestehenden Fläche coincidirt, — eine Coincidenz, deren Fortdauer fraglich erscheint.

Die Stärke des durch irgend ein Element $D\omega$ der ponderablen Fläche ω gehenden elektrischen Stromes wird offenbar (nämlich in Anbetracht jener Coincidenz) im Augenblick t_0 gleich Null sein, und wird daher, falls die Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes blos convectiver Natur sind (zufolge der soeben ausgesprochenen Definition) auch in allen späteren Augenblicken gleich Null sein. Hieraus aber ergiebt sich sofort, dass die betrachtete ponderable Fläche ω auch in allen späteren Augenblicken mit einer aus lauter Stromcurven bestehenden Fläche coincidirt. Also:

Erster Satz. — *Sind die Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes blos convectiver Natur, und denkt man sich eine ponderable*



Fläche ω construirt, die in irgend einem Augenblick aus lauter Stromcurven besteht, so wird genau dasselbe von dieser ponderablen Fläche ω auch in jedem späteren Augenblick zu sagen sein.

Man denke sich jetzt irgendwo innerhalb des betrachteten Körpers einen *ponderablen Faden* von beliebiger Dicke construirt, dessen Inneres im Augenblick t_0 aus lauter Stromcurven besteht; so dass also der Faden selbst im Augenblick t_0 als ein *Bündel von Stromcurven* zu bezeichnen ist. Alsdann wird offenbar die (canalförmige) Oberfläche ω des Fadens im Augenblick t_0 ebenfalls aus lauter Stromcurven bestehen. Gleiches wird daher von dieser Fadenoberfläche ω, zufolge des soeben ausgesprochenen Satzes, auch für alle späteren Augenblicke gelten. Und hieraus folgt weiter, dass der ponderable Faden auch in allen späteren Augenblicken als ein Bündel von Stromcurven zu bezeichnen ist. Somit ergiebt sich folgender

Zweiter Satz. — *Sind die Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes blos* c o n v e c t i v e r *Natur, und denkt man sich einen ponderablen Faden construirt, der in irgend einem Augenblick aus lauter Stromcurven besteht, so wird genau dasselbe von diesem ponderablen Faden auch in allen späteren Augenblicken zu sagen sein.*

Ein aus lauter Stromcurven bestehender Faden ist, nach dem Vorgange von Helmholtz, kurzweg als ein *Stromfaden* zu bezeichnen. Ein unendlich dünner Stromfaden wird daher nichts Anderes sein, als eine einzelne Stromcurve. Für den Specialfall eines solchen unendlich dünnen Fadens nimmt daher der letzte Satz folgende Gestalt an:

Dritter Satz. — *Sind die Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes blos* c o n v e c t i v e r *Natur, und denkt man sich eine ponderable Curve construirt, die in irgend einem Augenblick mit einer elektrischen Stromcurve coincidirt, so wird diese Coincidenz* f o r t d a u e r n d *stattfinden.*

Oder mit andern Worten: Sind die Aenderungen des Strömungszustandes blos c o n v e c t i v e r *Natur, so wird jede Stromcurve* f o r t d a u e r n d *d u r c h e i n u n d d i e s e l b e n p o n d e r a b l e n M a s s e n p u n k t e h i n d u r c h g e h e n.*

Allgemeinere Betrachtungen. — Wir wollen uns jetzt vorstellen, der elektrische Strömungszustand des betrachteten (in irgend welchen Dilatationsbewegungen begriffenen) Körpers ändere sich (aus irgend welchen Ursachen) von Augenblick zu Augenblick *in ganz beliebiger Weise.* Sind u, v, w die elektrischen Strömungscomponenten im Augenblick t, und $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ die Werthe dieser Componenten im Augenblick $t + dt$, so wird man die Zuwüchse du, dv, dw in zwei Theile zerlegen können:



$$
\text{(F.)} \qquad \begin{aligned} du &= \delta u + \Delta u, \\ dv &= \delta v + \Delta v, \\ dw &= \delta w + \Delta w, \end{aligned}
$$

und zwar in solcher Art, dass die δu, δv, δw, für sich allein betrachtet, eine blos *convective* Aenderung des Strömungszustandes darstellen. Demgemäss mögen diese δu, δv, δw die *convectiven*, andrerseits aber die Δu, Δv, Δw die *endogenen* Theile der Zuwüchse du, dv, dw genannt werden.

Die convectiven Theile δu, δv, δw stehen offenbar in engster Beziehung zu den der Zeit dt entsprechenden Dilatationen der ponderablen Masse. Demgemäss erscheint es angemessen, in den zunächst folgenden Paragraphen auf die Theorie der Dilatationen und die allgemeinen Formeln dieser Theorie etwas näher einzugehen. Einerseits nämlich wird es gut sein, diese Formeln in einer Gestalt und Bezeichnungsweise vor uns zu haben, wie sie für unsere eigentlichen Zwecke am Bequemsten sind. Andrerseits aber gedenke ich auch, bei Ableitung dieser Formeln Wege einzuschlagen, die von den bisher üblichen Wegen in manchen Punkten abweichen, und die im Ganzen vielleicht etwas einfacher sein dürften als jene.

Bemerkung. — Der Begriff der convectiven Aenderungen, wie er durch die Definition Seite 243 festgesetzt ist, rührt von Helmholtz her, — aber nur der Begriff, nicht das Wort. [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 729—731].

Uebrigens steckt in jener Definition etwas *Willkürliches* Denn, statt des Sichgleichbleibens der *Strom*stärke, hätte man dort z. B. ebenso gut ein Sichgleichbleiben der *Strömungs*stärke verlangen können.

§ 2.

Allgemeine Sätze über die Dilatationen der ponderablen Masse.

Die ponderablen Massenpunkte oder Molecüle eines gegebenen Körpers seien in beliebigen Bewegungen begriffen. Ihre Coordinaten mögen in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$ respective mit x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ bezeichnet sein. Und zwar mögen die der Zeit dt entsprechenden Verschiebungen dx, dy, dz angesehen werden als Functionen der x, y, z:

$$
\text{(1.)} \qquad \begin{aligned} dx &= f(x, y, z), \\ dy &= g(x, y, z), \\ dz &= h(x, y, z). \end{aligned}
$$

Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(2.)\quad \begin{aligned} f &= f(x, y, z), & f_1 &= \frac{\partial f}{\partial x}, & f_2 &= \frac{\partial f}{\partial y}, & f_3 &= \frac{\partial f}{\partial z}, \\ g &= g(x, y, z), & g_1 &= \frac{\partial g}{\partial x}, & g_2 &= \frac{\partial g}{\partial y}, & g_3 &= \frac{\partial g}{\partial z}, \\ h &= h(x, y, z), & h_1 &= \frac{\partial h}{\partial x}, & h_2 &= \frac{\partial h}{\partial y}, & h_3 &= \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned}$$

Auch mag angenommen werden, dass diese Grössen $f, g, h, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3$ *durchweg* ***unendlich klein*** *sind.*

Besitzen also irgend zwei Molecüle m und μ im Augenblick t die Coordinaten

$$x, y, z \quad \text{und} \quad x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta,$$

so werden z. B. ihre x-Coordinaten im Augenblick $t + dt$ die Werthe haben:

$$x + f(x, y, z) \quad \text{und} \quad x + \xi + f(x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta).$$

Diese beiden letzten Ausdrücke aber können, falls ξ, η, ζ *unendlich klein* sind, auch so geschrieben werden:

$$x + f \quad \text{und} \quad x + \xi + f + f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta.$$

Auch werden in solchem Falle, wo ξ, η, ζ unendlich klein sind, die beiden Molecüle m und μ als *Nachbarmolecüle* zu bezeichnen sein. Für die Coordinaten dieser beiden Nachbarmolecüle haben wir also im Augenblick t die Werthe:

$$(3.)\qquad m(x, y, z), \qquad \mu(x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta),$$

und andrerseits im Augenblick $t + dt$ folgende Werthe:

$$(4.)\quad m(x+f, \ y+g, \ z+h), \qquad \mu(x+f+\Xi, \ y+g+\mathsf{H}, \ z+h+\mathsf{Z}),$$

wo $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ die Bedeutungen besitzen:

$$(5.)\quad \begin{aligned} \Xi &= \xi + f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta, \\ \mathsf{H} &= \eta + g_1\xi + g_2\eta + g_3\zeta, \\ \mathsf{Z} &= \zeta + h_1\xi + h_2\eta + h_3\zeta. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (5.) sind übrigens, weil f_1, f_2, etc. unendlich klein sein sollen, mit Leichtigkeit nach ξ, η, ζ auflösbar. Man erhält in solcher Weise (mit Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung) sofort:

$$(6.)\quad \begin{aligned} \xi &= \Xi - (f_1\Xi + f_2\mathsf{H} + f_3\mathsf{Z}), \\ \eta &= \mathsf{H} - (g_1\Xi + g_2\mathsf{H} + g_3\mathsf{Z}), \\ \zeta &= \mathsf{Z} - (h_1\Xi + h_2\mathsf{H} + h_3\mathsf{Z}). \end{aligned}$$

Die ξ, η, ζ und $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ können, wie aus (3.), (4.) ersichtlich ist, bezeichnet werden als die *relativen Coordinaten* von μ in Bezug auf m

respective in den Augenblicken t und $t + dt$. Da nun die zwischen diesen Coordinaten ξ, η, ζ und Ξ, H, Z stattfindenden Relationen (5.) oder (6.) *linearer* Natur sind, so ergiebt sich hieraus sofort, dass Molecüle, die zur Zeit t eine *Ebene* bilden, zur Zeit $t + dt$ wiederum eine *Ebene* bilden werden. Auch ergiebt sich, dass Molecüle, die im Augenblick t zwei *Parallelebenen* bilden, im Augenblick $t + dt$ wiederum zwei *Parallelebenen* bilden werden.

Jedoch werden diese Sätze, ebenso wie die Gleichungen (5.) oder (6.), aus denen sie entsprungen sind, nur für Nachbarmolecüle gelten. Mit andern Worten: Die in Rede stehenden Sätze werden nur *in unendlicher Nähe* eines willkürlich zu wählenden Molecüls m Gültigkeit haben. Demgemäss sind dieselben folgendermassen auszusprechen:

Ein unendlich kleines ponderables Flächenelement) wird, falls es im Augenblick t eben ist, im Augenblick $t + dt$ wiederum eben sein.*

Zwei einander unendlich nahe liegende ponderable Flächenelemente werden, falls sie im Augenblick t eben und einander parallel sind, im Augenblick $t + dt$ wiederum eben und einander parallel sein.

Hieraus folgt weiter: *Ein unendlich kleines ponderables Massenelement des betrachteten Körpers wird, falls es zur Zeit t von lauter ebenen Flächen begrenzt ist, zur Zeit $t + dt$ wiederum von lauter ebenen Flächen begrenzt sein. Hat insbesondere dieses Element im Augenblick t die Gestalt eines Parallelepipedums, so wird es im Augenblick $t + dt$ wiederum die Gestalt eines Parallelepipedums besitzen.*

Und hieraus ergiebt sich weiter: *Ein unendlich kleines ponderables Curvenelement wird, falls es im Augenblick t geradlinig ist, im Augenblick $t + dt$ wiederum geradlinig sein.*

Um auf den ersten dieser Sätze etwas genauer einzugehen, denken wir uns, im Augenblick t ein durch das Molecül m gehendes ponderables Flächenelement construirt, und bezeichnen die Richtungscosinus der Normale dieses Flächenelementes mit a, b, c; so dass also für alle zu diesem Element gehörigen Molecüle μ die Gleichung stattfindet:

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0, \tag{7.}$$

wo ξ, η, ζ die relativen Coordinaten eines solchen Molecüls μ in Bezug auf m sind. Substituirt man hier für ξ, η, ζ die Werthe (6), so erhält man:

$$\begin{aligned}[a - (af_1 + bg_1 + ch_1)]\,\Xi + [b - (af_2 + bg_2 + ch_2)]\,H \\ + [c - (af_3 + bg_3 + ch_3)]\,Z = 0;\end{aligned} \tag{8.}$$

*) Vgl. die Bemerkung Seite 243.



und dies wird offenbar die Gleichung *eben desselben* ponderablen Flächenelements im Augenblick $t + dt$ sein. Bezeichnet man also die Richtungscosinus der auf diesem Element im Augenblick $t + dt$ errichteten Normale mit $a + da$, $b + db$, $c + dc$, so wird sein:

$$(9.)\qquad \begin{aligned} a + da &= \sigma[a - (af_1 + bg_1 + ch_1)], \\ b + db &= \sigma[b - (af_2 + bg_2 + ch_2)], \\ c + dc &= \sigma[c - (af_3 + bg_3 + ch_3)]. \end{aligned}$$

Um den hier auftretenden Factor σ zu bestimmen, multiplicire man die Gleichungen (9.) mit a, b, c und addire. Alsdann ergiebt sich sofort*):

$$1 = \sigma\Big\{1 - [a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdot\cdot]\Big\},$$

mithin:

$$\sigma = \frac{1}{1 - [a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdot\cdot\cdot]}.$$

Die Grössen f, f_1, f_2, f_3, g, g_1, etc. etc. sind aber nach unserer Voraussetzung [Seite 246] alle *unendlich klein*. Somit ergiebt sich also (unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung):

$$\sigma = 1 + [a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdot\cdot\cdot].$$

Substituirt man aber diesen Werth von σ in den Formeln (9.), so erhält man (wiederum unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung):

$$(10.)\qquad \begin{cases} da = a[a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdot\cdot\cdot] - (af_1 + bg_1 + ch_1), \\ db = b[a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdot\cdot\cdot] - (af_2 + bg_2 + ch_2), \\ dc = c[a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdot\cdot\cdot] - (af_3 + bg_3 + ch_3), \end{cases}$$

wo der in den eckigen Klammern stehende Ausdruck, vollständig hingeschrieben, folgendermassen lauten würde:

$$(10a.)\qquad a^2 f_1 + b^2 g_2 + c^2 h_3 + bc(g_3 + h_2) + ca(h_1 + f_3) + ab(f_2 + g_1).$$

Betrachtet man also ein ponderables ebenes Flächenelement, und bezeichnet man die Richtungscosinus der auf demselben im Augenblick t und im Augenblick $t + dt$ errichteten Normalen respective mit a, b, c und mit $a + da$, $b + db$, $c + dc$, so werden zwischen a, b, c und da, db, dc die Relationen (10.) *stattfinden.*

---

*) Es ist dabei zu beachten, dass a, b, c, und ebenso auch $a + da$, $b + db$, $c + dc$ *Richtungscosinus* sein sollen, und dass also die Relationen stattfinden: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und $(a + da)^2 + (b + db)^2 + (c + dc)^2 = 1$, woraus z. B. folgt: $ada + bdb + cdc = 0$.

§ 3.

Die lineare Dilatation.

Man kann ξ, η, ζ und Ξ, H, Z [vgl. (3.), (4.)] als die rechtwinkligen Componenten der Linie $m\mu$ in den Augenblicken t und $t+dt$ bezeichnen. Setzt man dementsprechend:

$$\Xi = \xi + d\xi, \quad H = \eta + d\eta, \quad Z = \zeta + d\zeta, \tag{11.}$$

so gehen die Gleichungen (5.) über in:

$$\begin{cases} d\xi = f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta, \\ d\eta = g_1\xi + g_2\eta + g_3\zeta, \\ d\zeta = h_1\xi + h_2\eta + h_3\zeta. \end{cases} \tag{12.}$$

Betrachtet man also eine unendlich kleine gerade ponderable Linie, und bezeichnet man die rechtwinkligen Componenten derselben in den Augenblicken t und $t+dt$ respective mit ξ, η, ζ und $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$, so werden zwischen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und ξ, η, ζ die Relationen (12.) *stattfinden.*

Setzt man nun weiter:

$$\xi = \alpha D\lambda, \quad \eta = \beta D\lambda, \quad \zeta = \gamma D\lambda, \tag{13.}$$

indem man unter $D\lambda$ die Länge, und unter α, β, γ die Richtungscosinus jener kleinen Linie versteht, so nehmen die Gleichungen (12.) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} (d\alpha)D\lambda + \alpha d(D\lambda) &= (f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma)D\lambda, \\ (d\beta)D\lambda + \beta d(D\lambda) &= (g_1\alpha + g_2\beta + g_3\gamma)D\lambda, \\ (d\gamma)D\lambda + \gamma d(D\lambda) &= (h_1\alpha + h_2\beta + h_3\gamma)D\lambda. \end{aligned} \tag{14.}$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit α, β, γ und Addition:

$$d(D\lambda) = [f_1\alpha^2 + (f_2 + g_1)\alpha\beta + \cdots]D\lambda.$$

Somit ergiebt sich für die sogenannte lineare Dilatation $\frac{d(D\lambda)}{D\lambda}$ der Werth

$$\frac{d(D\lambda)}{D\lambda} = f_1\alpha^2 + (f_2 + g_1)\alpha\beta + \cdots; \tag{15.}$$

hier steht rechter Hand genau derselbe Ausdruck wie in (10a.), nur mit dem Unterschiede, dass a, b, c durch α, β, γ ersetzt sind.

§ 4.

Die räumliche Dilatation.

Man betrachte vier einander benachbarte Molecüle m, μ, μ', μ'', und bezeichne das Volumen des von ihnen gebildeten Tetraeders in

den Augenblicken t und $t+dt$ respective mit $D\tau$ und $D\tau + d(D\tau)$. Alsdann ist offenbar:

$$(16.)\quad D\tau = \varepsilon \begin{vmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D\tau + d(D\tau) = \varepsilon \begin{vmatrix} \Xi & \Xi' & \Xi'' \\ \mathsf{H} & \mathsf{H}' & \mathsf{H}'' \\ \mathsf{Z} & \mathsf{Z}' & \mathsf{Z}'' \end{vmatrix},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass ξ, η, ζ und $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}$ (ebenso wie bisher) die rechtwinkligen Componenten der Linie $m\mu$ in den Augenblicken t und $t+dt$ vorstellen, und dass $\xi', \eta', \zeta', \Xi', \mathsf{H}', \mathsf{Z}'$ und $\xi'', \eta'', \zeta'', \Xi'', \mathsf{H}'', \mathsf{Z}''$ analoge Bedeutungen haben für $m\mu'$ und $m\mu''$. Demgemäss ist z. B. [vgl. (5.)]:

$$\begin{cases} \Xi = (1+f_1)\xi + f_2\eta + f_3\zeta, \\ \mathsf{H} = +g_1\xi + (1+g_2)\eta + g_3\zeta, \\ \mathsf{Z} = +h_1\xi + h_2\eta + (1+h_3)\zeta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Xi' = (1+f_1)\xi' + f_2\eta' + f_3\zeta', \\ \mathsf{H}' = +g_1\xi' + (1+g_2)\eta' + g_3\zeta', \\ \mathsf{Z}' = +h_1\xi' + h_2\eta' + (1+h_3)\zeta', \end{cases}$$

und analoge Relationen finden statt zwischen $\Xi'', \mathsf{H}'', \mathsf{Z}''$ und ξ'', η'', ζ''. Substituirt man diese Werthe der neun Grössen $\Xi, \mathsf{H}, \mathsf{Z}, \Xi', \mathsf{H}', \mathsf{Z}', \Xi'', \mathsf{H}'', \mathsf{Z}''$ in (16.), so erhält man für $D\tau + d(D\tau)$ sofort das Product zweier Determinanten:

$$D\tau + d(D\tau) = \varepsilon \begin{vmatrix} 1+f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & 1+g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & 1+h_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix}.$$

Dividirt man diese Formel durch die erste der beiden Formeln (16.), so folgt:

$$\frac{D\tau + d(D\tau)}{D\tau} = \begin{vmatrix} 1+f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & 1+g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & 1+h_3 \end{vmatrix},$$

oder (mit Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung):

$$\frac{D\tau + d(D\tau)}{D\tau} = 1 + f_1 + g_2 + h_3,$$

oder falls man 1 auf beiden Seiten subtrahirt:

$$(17.)\qquad \frac{d(D\tau)}{D\tau} = f_1 + g_2 + h_3;$$

und dies ist die sogenannte *räumliche Dilatation*. Noch ist zu bemerken, dass die Formel (17.) allgemein gilt für ein unendlich kleines *ponderables Volumelement $D\tau$ von ganz beliebiger Gestalt**). Denn welche Gestalt dasselbe auch besitzen mag, stets wird es zerlegbar sein in unendlich kleine Elemente zweiter Ordnung, deren jedes die Gestalt eines Tetraeders besitzt.

*) Vgl. die Bemerkung Seite 243.

§ 5.

Die Flächendilatation.

Wir betrachten von Neuem jenes unendlich kleine Tetraeder $m\mu\mu'\mu''$, welches in den Augenblicken t und $t + dt$ die Volumina $D\tau$ und $D\tau + d(D\tau)$ besitzt; zugleich wollen wir den Punkt m als die *Spitze* und das Dreieck $\mu\mu'\mu''$ als die *Basis* desselben uns denken. Der Flächeninhalt dieser Basisfläche $\mu\mu'\mu''$ mag in den Augenblicken t und $t + dt$ respective mit Do und $Do + d(Do)$ bezeichnet sein. Alsdann ist offenbar, was den Augenblick t betrifft:

$$3\,D\tau = (mp)\,Do\,,$$

wo (mp) das von der Spitze m aus auf die Basis Do herabgelassene Perpendikel vorstellt. Diese Formel kann man auch so schreiben:

$$3\,D\tau = (m\mu)\cos(m\mu,\ mp)\cdot Do\,,$$

oder auch so:

$$3\,D\tau = (\xi a + \eta b + \zeta c)\,Do\,, \tag{18.}$$

wo ξ, η, ζ [ebenso wie bisher, vgl. (3.)] die rechtwinkligen Componenten der Linie $m\mu$ vorstellen, während a, b, c die Richtungscosinus der Linie mp, d. i. *die Richtungscosinus der Normale des Flächenelementes* Do sein sollen.

Geht man vom Augenblick t zum Augenblick $t + dt$ über, so entspringt aus (18.) folgende Differentialformel:

$$\frac{d(D\tau)}{D\tau} = \frac{d(\xi a + \eta b + \zeta c)}{\xi a + \eta b + \zeta c} + \frac{d(Do)}{Do}\,. \tag{19.}$$

Nun ist offenbar:

$$d(\xi a + \eta b + \zeta c) = (\xi da + \eta db + \zeta dc) + (a d\xi + b d\eta + c d\zeta).$$

Substituirt man hier für da, db, dc und $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ihre Werthe (10.) und (12.):

$$\begin{aligned}
da &= a[\cdots] - (af_1 + bg_1 + ch_1), \qquad & d\xi &= f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta,\\
db &= b[\cdots] - (af_2 + bg_2 + ch_2), \qquad & d\eta &= g_1\xi + g_2\eta + g_3\zeta,\\
dc &= c[\cdots] - (af_3 + bg_3 + ch_3), \qquad & d\zeta &= h_1\xi + h_2\eta + h_3\zeta,
\end{aligned}$$

so heben sich fast alle Glieder fort; so dass man erhält:

$$d(\xi a + \eta b + \zeta c) = (\xi a + \eta b + \zeta c)\,[\cdots].$$

Dies in (19.) eingesetzt, ergiebt sich sofort:

$$\frac{d(D\tau)}{D\tau} = [\cdots] + \frac{d(Do)}{Do}\,,$$

oder, falls man für das Zeichen $[\cdots]$ seine eigentliche aus (10.) ersichtliche Bedeutung substituirt:

$$(20.)\qquad \frac{d(D\tau)}{D\tau} = [a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdots] + \frac{d(Do)}{Do}.$$

Substituirt man endlich hier für die räumliche Dilatation $\frac{d(D\tau)}{D\tau}$ ihren schon in (17.) gefundenen Werth, so erhält man schliesslich:

$$(21.)\qquad \frac{d(Do)}{Do} = (f_1 + g_2 + h_3) - [a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdots].$$

Dies ist die sogenannte *Flächendilatation*. Noch ist zu bemerken, dass die Formel (21.) allgemein gilt für ein unendlich kleines *ebenes ponderables Flächenelement Do von ganz beliebiger Gestalt**). Denn welche Gestalt dasselbe auch haben mag, stets wird man dasselbe in Flächenelemente zweiter Ordnung zerlegen können, deren jedes die Gestalt eines Dreiecks besitzt.

Denkt man sich also ein ebenes ponderables *Flächenelement, bezeichnet man ferner den Flächeninhalt dieses* Elementes *in den Augenblicken t und $t + dt$ respective mit Do und $Do + d(Do)$, und bezeichnet man endlich die Richtungscosinus der auf diesem Element im Augenblick t errichteten Normale mit a, b, c, so wird zwischen $d(Do)$, Do und a, b, c die in (21.) angegebene Beziehung stattfinden.*

Sind nun ferner $a + da$, $b + db$, $c + dc$ die Richtungscosinus der auf diesem ponderablen Flächenelement im Augenblick $t + dt$ errichteten Normale, so ist nach (10.):

$$(22.)\qquad \begin{cases} da = a[a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdots] - (af_1 + bg_1 + ch_1), \\ db = b[a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdots] - (af_2 + bg_2 + ch_2), \\ dc = c[a^2 f_1 + ab(f_2 + g_1) + \cdots] - (af_3 + bg_3 + ch_3). \end{cases}$$

Nun ist offenbar:

$$d(aDo) = (da)Do + ad(Do).$$

Substituirt man hier für da den Werth (22.) und zugleich für $d(Do)$ den aus (21.) entspringenden Werth, so erhält man sofort:

$$d(aDo) = \Big\{a[\cdots] - (af_1 + bg_1 + ch_1)\Big\}\, Do$$
$$+ a\Big\{(f_1 + g_2 + h_3) - [\cdots]\Big\}Do,$$

wo die mit dem Ausdruck $[\cdots]$ behafteten Glieder sich gegenseitig zerstören. Demgemäss gelangt man zur ersten Formel folgenden Systems:

$$(23.)\qquad \begin{cases} d(aDo) = [a(f_1 + g_2 + h_3) - (af_1 + bg_1 + ch_1)]\, Do, \\ d(bDo) = [b(f_1 + g_2 + h_3) - (af_2 + bg_2 + ch_2)]\, Do, \\ d(cDo) = [c(f_1 + g_2 + h_3) - (af_3 + bg_3 + ch_3)]\, Do, \end{cases}$$

---

*) Vgl. die Bemerkung Seite 243.



dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. *Diese Formeln* (23.) *sind als eine Transformation der Formeln* (10.) *oder* (22.) *anzusehen, und jenen gegenüber durch grössere Einfachheit ausgezeichnet.*

§ 6.

Sich anschliessende Betrachtungen.

Bezeichnet man die Coordinaten eines ponderablen Massenpunktes in den Augenblicken t und $t+dt$ respective mit x, y, z und mit x', y', z', so ist:

$$x'=x+dx, \quad y'=y+dy, \quad z'=z+dz, \tag{24.}$$

also nach (1.) Seite 245:

$$x'=x+f(x,y,z), \quad y'=y+g(x,y,z), \quad z'=z+h(x,y,z). \tag{25.}$$

Wir stellen uns nun folgende Aufgabe: *Es ist gegeben irgend ein Ausdruck:*

$$F=F(x',y',z'). \tag{26.}$$

Es sollen in diesem Ausdruck, sowie auch in seinen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x'}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$, $\frac{\partial F}{\partial z'}$, *an Stelle von* x', y', z', *die mit* x', y', z' *durch die Relationen* (25.) *verbundenen Argumente* x, y, z *eingeführt werden.*

Zufolge jener Relationen (25.) ist offenbar:

$$\begin{aligned} dx' &= dx+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz, \\ dy' &= dy+\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz, \\ dz' &= dz+\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial y}dy+\frac{\partial h}{\partial z}dz. \end{aligned} \tag{27.}$$

Hieraus folgt durch Umkehrung (und unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung) sofort:

$$\begin{aligned} dx &= dx'-\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx'+\frac{\partial f}{\partial y}dy'+\frac{\partial f}{\partial z}dz'\right), \\ dy &= dy'-\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx'+\frac{\partial g}{\partial y}dy'+\frac{\partial g}{\partial z}dz'\right), \\ dz &= dz'-\left(\frac{\partial h}{\partial x}dx'+\frac{\partial h}{\partial y}dy'+\frac{\partial h}{\partial z}dz'\right). \end{aligned} \tag{28.}$$

Denkt man sich also, auf Grund der Relationen (25.), die x, y, z als Functionen der x', y', z', so werden die Ableitungen dieser Functionen, wie aus (28.) sich ergiebt, folgende Werthe haben:

$$(29.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial f}{\partial x}, && \frac{\partial x}{\partial y'} = -\frac{\partial f}{\partial y}, && \frac{\partial x}{\partial z'} = -\frac{\partial f}{\partial z}, \\ &\frac{\partial y}{\partial x'} = -\frac{\partial g}{\partial x}, && \frac{\partial y}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial g}{\partial y}, && \frac{\partial y}{\partial z'} = -\frac{\partial g}{\partial z}, \\ &\frac{\partial z}{\partial x'} = -\frac{\partial h}{\partial x}, && \frac{\partial z}{\partial y'} = -\frac{\partial h}{\partial y}, && \frac{\partial z}{\partial z'} = 1 - \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nun ist offenbar:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'},$$

also mit Rücksicht auf (29.):

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x};$$

so dass man also zur ersten Formel folgenden Systems gelangt:

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x'} = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial h}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial h}{\partial y}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial z'} = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial h}{\partial z}\right), \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Hiemit ist die gestellte Aufgabe absolvirt.

§ 7.

Die convective Aenderung des elektrischen Strömungszustandes im Innern eines in beliebigen Dilatationsbewegungen begriffenen Körpers.

Die ponderablen Massenpunkte $m(x, y, z)$ eines gegebenen Körpers M mögen während der Zeit dt verschoben gedacht werden nach Maassgabe der Formeln:

$$(1.)\quad dx = f(x, y, z), \quad dy = g(x, y, z), \quad dz = h(x, y, z),$$

wo f, g, h ganz beliebig gegebene *unendlich kleine* Functionen sind. Ferner sei *zu Anfang* der Zeit dt, nämlich im Augenblick t im Innern des Körpers M irgend ein elektrischer Strömungszustand vorhanden, dargestellt durch die Formeln:

$$(2.)\quad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z),$$

wo u, v, w beliebig gegebene *endliche* Functionen sein sollen; so dass also z. B. die elektrischen Stromcurven im Augenblick t dargestellt sein werden durch die Differentialgleichungen:

$$(3.)\quad Dx : Dy : Dz = u : v : w.$$

Auf Grund dieser Angaben und auf Grund der früher gegebenen Definition Seite 243, muss es nun möglich sein, die der Zeit dt entsprechenden **convectiven** *Aenderungen δu, δv, δw zu berechnen. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Rechnung wirklich auszuführen.*

Man construire im Augenblick t irgend einen *Stromfaden* F des Körpers M, und zugleich auch eine längs der Oberfläche dieses Fadens fortlaufende *Stromcurve* λ. Sodann construire man im Augenblick t irgend ein Element DF des Fadens F. Und zwar mag dieses Element DF begrenzt gedacht sein von zwei im Allgemeinen *schiefen*, aber unter einander *parallelen* Querschnitten Do, $D\omega$ des Fadens. Ueberdies mag das zwischen Do und $D\omega$ befindliche Element der Stromcurve λ mit $D\lambda$ bezeichnet sein.

Genauer genommen, ist hinzuzufügen, dass unter diesen im Augenblick t construirten Dingen F, DF, Do, $D\omega$, und λ, $D\lambda$ durchweg die betreffenden *ponderablen Objecte* verstanden sein sollen*). Sind nun F', DF', Do', $D\omega'$ und λ', $D\lambda'$ die Gestalten dieser ponderablen Objecte im nächstfolgenden Zeitaugenblick $t + dt$, und setzt man voraus, die Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes seien blos *convectiver* Natur, so werden offenbar, ebenso wie F und λ einen Stromfaden und eine Stromcurve im Augenblick t repräsentiren, ebenso auch F' und λ' einen Stromfaden und eine Stromcurve im Augenblick $t + dt$ darstellen. Solches ergiebt sich unmittelbar aus der Definition Seite 243 und aus den aus dieser Definition abgeleiteten Sätzen Seite 243, 244. Auch wird nach jener Definition die Stärke des im Augenblick t durch Do gehenden Stromes ebenso gross sein wie die Stärke des im Augenblick $t + dt$ durch Do' gehenden Stromes. Bezeichnet man also die betreffenden Strömungen mit i und i', so wird die Gleichung stattfinden:

$$qi = q'i', \tag{4.}$$

wo q und q' die senkrechten Querschnitte der beiden Elemente DF und DF' vorstellen.

Sind nun $D\tau$ und $D\tau'$ die Volumina von DF und DF' so ist:

$$D\tau = qD\lambda \quad \text{und} \quad D\tau' = q'D\lambda'; \tag{5.}$$

denn ebenso wie Do und $D\omega$ (zufolge der Construction) einander parallel sind, ebenso werden, in Folge dieses Umstandes (nach den Sätzen Seite 247) auch Do' und $D\omega'$ einander parallel sein. Substituirt man die aus (5.) für q und q' entspringenden Werthe in der Formel (4.), so folgt:

*) Vgl. die Bemerkung Seite 243.

(6.) $$\frac{i\,D\tau}{D\lambda} = \frac{i'D\tau'}{D\lambda'},$$

oder, ein wenig anders geschrieben:

(7.) $$\frac{i'}{i}\,\frac{D\tau'}{D\tau} = \frac{D\lambda'}{D\lambda}.$$

Sind nun u, v, w und u', v', w' die rechtwinkligen Componenten von i und i', und sind ferner α, β, γ und α', β', γ die Richtungscosinus der Linienelemente $D\lambda$ und $D\lambda'$, so ist offenbar:

(8.) $$u = i\alpha,\quad v = i\beta,\quad w = i\gamma \quad \text{und} \quad u' = i'\alpha',\quad v' = i'\beta',\quad w' = i'\gamma',$$

also z. B.:

(9.) $$\frac{u'}{u} = \frac{i'}{i}\,\frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Multiplicirt man jetzt die beiden Formeln (7.) und (9.) miteinander, so erhält man sofort:

$$\frac{u'}{u}\,\frac{D\tau'}{D\tau} = \frac{\alpha'}{\alpha}\,\frac{D\lambda'}{D\lambda},$$

oder ein wenig anders geschrieben:

(10.) $$\frac{u + du}{u}\,\frac{D\tau + d(D\tau)}{D\tau} = \frac{\alpha + d\alpha}{\alpha}\,\frac{D\lambda + d(D\lambda)}{D\lambda},$$

wo du, $d(D\tau)$, $d\alpha$, $d(D\lambda)$ die Zuwüchse der Grössen u, $D\tau$, α, $D\lambda$ während der Zeit dt vorstellen. Nun ist aber, was die elektrischen Strömungen betrifft, im gegenwärtigen Paragraph nur von den *convectiven* Aenderungen derselben die Rede, also das du mit δu zu bezeichnen. Demgemäss ergiebt sich aus (10.)

$$\left(1 + \frac{\delta u}{u}\right)\left(1 + \frac{d(D\tau)}{D\tau}\right) = \left(1 + \frac{d\alpha}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{d(D\lambda)}{D\lambda}\right),$$

wofür man (unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung) auch schreiben kann:

(11.) $$\frac{\delta u}{u} + \frac{d(D\tau)}{D\tau} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d(D\lambda)}{D\lambda}.$$

Hieraus folgt, unter Anwendung der Formeln (17.) Seite 250 und (14.) Seite 249, sofort:

$$\frac{\delta u}{u} + (f_1 + g_2 + h_3) = \frac{f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma}{\alpha},$$

oder, weil [nach (8.)] $\alpha : \beta : \gamma = u : v : w$ ist:

$$\frac{\delta u}{u} + (f_1 + g_2 + h_3) = \frac{f_1 u + f_2 v + f_3 w}{u}.$$

Somit ergiebt sich also:

$$\delta u = (f_1 u + f_2 v + f_3 w) - (f_1 + g_2 + h_3)\,u,$$

oder ausführlicher geschrieben [vgl. (2.) Seite 246]:

$$\delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) u. \tag{12.}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für δv und δw. Dabei bezeichnen alsdann x, y, z die Coordinaten der betrachteten Stelle, etwa die Coordinaten desjenigen Punktes, in welchem im Augenblick t das Flächenelement Do und das Linienelement $D\lambda$ zusammenstossen.

Uebrigens kann man der Formel (12.) eine etwas einfachere Gestalt geben. Nach (17.) Seite 250 ist nämlich:

$$d(D\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) D\tau. \tag{13.}$$

Multiplicirt man nun die Formeln (12.) und (13.) respective mit $D\tau$ und u, und addirt, so erhält man*):

$$\delta(uD\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w\right) D\tau. \tag{14.}$$

Auf Grund der Formeln (12.) und (14.) gelangt man schliesslich zu folgendem Resultat:

Satz. — *Die ponderablen Massenpunkte $m(x, y, z)$ eines gegebenen Körpers M mögen während der Zeit dt verschoben gedacht werden nach Maassgabe der Formeln:*

$$dx = f(x, y, z), \quad dy = g(x, y, z), \quad dz = h(x, y, z), \tag{15.}$$

wo f, g, h ganz beliebig gegebene unendlich kleine Functionen sein sollen. Ferner sei zu Anfang der Zeit dt, nämlich im Augenblick t, im Innern des Körpers irgend ein elektrischer Strömungszustand vorhanden, dargestellt durch die Formeln:

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z), \tag{16.}$$

wo u, v, w beliebig gegebene endliche Functionen sein sollen.

Alsdann werden die der Zeit dt entsprechenden convectiven Aenderungen der Strömungen u, v, w für denjenigen ponderablen Punkt m, der zu Anfang der Zeit dt die Coordinaten x, y, z hatte, folgende Werthe haben [*vgl.* (12.)]:

$$(17.)\quad \begin{cases} \delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) u, \\ \delta v = \left(\frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) v, \\ \delta w = \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) w. \end{cases}$$

---

*) Es ist nämlich $d(D\tau) = \delta(D\tau)$; wie sich solches aus einem früheren Satz Seite 129 (20a.) sofort ergiebt.

Die Coordinaten jenes Punktes m *in den Augenblicken* t *und* $t+dt$ *sind* x, y, z *und* $x+f, y+g, z+h$. *Und es werden daher* u, v, w *die Strömungscomponenten an der Stelle* (x, y, z) *im Augenblick* t, *andrerseits aber* $u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w$ *die Strömungscomponenten an der Stelle* $(x+f, y+g, z+h)$ *im Augenblick* $t+dt$ *zu nennen sein. Kurz, man wird* $\delta u, \delta v, \delta w$ *zu bezeichnen haben als diejenigen convectiven Aenderungen, welche die den ponderablen Punkt* m *begleitenden elektrischen Strömungen* u, v, w *während der Zeit* dt *erleiden.*

Denkt man sich in der Umgebung jenes Punktes m *ein unendlich kleines Massenelement abgegrenzt, und bezeichnet man das Volumen dieses Massenelements zu Anfang der Zeit* dt *mit* $D\tau$, *so kann man die Formeln* (17.) *auch so schreiben* [*vgl.* (14.)]:

$$(18.)\qquad \begin{cases} \delta(uD\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w\right) D\tau, \\ \delta(vD\tau) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}u + \frac{\partial g}{\partial y}v + \frac{\partial g}{\partial z}w\right) D\tau, \\ \delta(wD\tau) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}u + \frac{\partial h}{\partial y}v + \frac{\partial h}{\partial z}w\right) D\tau, \end{cases}$$

wo $\delta(D\tau) = d(D\tau)$ *ist* [*vgl. Seite 129* (20a.)]. *Dieses* $\delta(D\tau)$ *oder* $d(D\tau)$ *repräsentirt den Zuwachs des Volumens* $D\tau$ *während der Zeit* dt.

Andere Methode der Untersuchung. — Ebenso wie vorhin, wollen wir ausgehen von der Gleichung:

$$(A.)\qquad qi = q'i', \quad \text{[Seite 255 (4.)]}.$$

Dabei aber wollen wir gegenwärtig über das damals construirte Massenelement DF und die beiden einander gegenüberliegenden Seitenflächen Do, $D\omega$ dieses Elementes etwas *speciellere* Vorstellungen adoptiren, als damals.

Man markire nämlich im Augenblick t irgend drei einander benachbarte Molecüle:

$$m(x, y, z), \quad \mu(x+\xi, y+\eta, z+\zeta), \quad \mu^*(x+\xi^*, y+\eta^*, z+\zeta^*),$$

und nehme nun zum Flächenelement Do dasjenige kleine *Parallelogramm,* welches die Linien $m\mu$ und $m\mu^*$ zu Seiten hat. Ferner construire man über diesem Parallelogramm als Basis dasjenige *Parallelepipedum,* welches die von m ausgehend gedachte Linie $i(u, v, w)$ zur dritten Kante hat. Beachtet man nun, dass das früher construirte Linienelement $D\lambda$ nichts Andres als ein Element dieser dritten Kante ist, so erkennt man sofort, dass das Volumen des soeben genannten Parallelepipedums $= qi$ ist. Folglich ist:

(B.) $$qi = \begin{vmatrix} u & \xi & \xi^* \\ v & \eta & \eta^* \\ w & \zeta & \zeta^* \end{vmatrix}.$$

Das Product $q'i'$ wird offenbar durch eine analoge Determinante darstellbar sein; so dass also die Gleichung (A.): $qi = q'i'$ sich verwandelt in:

(C.) $$\begin{vmatrix} u & \xi & \xi^* \\ v & \eta & \eta^* \\ w & \zeta & \zeta^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u+\delta u & \xi + d\xi & \xi^* + d\xi^* \\ v+\delta v & \eta + d\eta & \eta^* + d\eta^* \\ w+\delta w & \zeta + d\zeta & \zeta^* + d\zeta^* \end{vmatrix},$$

eine Formel, die man (unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung) offenbar auch so schreiben kann:

(D.) $$0 = \begin{vmatrix} \delta u & \xi & \xi^* \\ \delta v & \eta & \eta^* \\ \delta w & \zeta & \zeta^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & d\xi & \xi^* \\ v & d\eta & \eta^* \\ w & d\zeta & \zeta^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & \xi & d\xi^* \\ v & \eta & d\eta^* \\ w & \zeta & d\zeta^* \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber nach Seite 249 (12.): $d\xi = f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta$. U. s. w. Im Ganzen hat man folgende Gleichungen:

(E.) $$\begin{aligned} d\xi &= f_1\xi + f_2\eta + f_3\zeta, & d\xi^* &= f_1\xi^* + f_2\eta^* + f_3\zeta^*, \\ d\eta &= g_1\xi + g_2\eta + g_3\zeta, & d\eta^* &= g_1\xi^* + g_2\eta^* + g_3\zeta^*, \\ d\zeta &= h_1\xi + h_2\eta + h_3\zeta, & d\zeta^* &= h_1\xi^* + h_2\eta^* + h_3\zeta^*. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe (E.) in der Formel (D.), so gelangt man, indem man die dortigen Determinanten wirklich bildet, zu folgendem Resultat:

(F.) $$\begin{aligned} \mathsf{A}\delta u + \mathsf{B}\delta v + \Gamma\delta w = &+\mathsf{A}[(f_1u + f_2v + f_3w) - (f_1 + g_2 + h_3)u], \\ &+\mathsf{B}[(g_1u + g_2v + g_3w) - (f_1 + g_2 + h_3)v], \\ &+\Gamma[(h_1u + h_2v + h_3w) - (f_1 + g_2 + h_3)w], \end{aligned}$$

wo A, B, Γ die Bedeutungen haben:

(G.) $$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \eta\zeta^* - \zeta\eta^*, \\ \mathsf{B} &= \zeta\xi^* - \xi\zeta^*, \\ \Gamma &= \xi\eta^* - \eta\xi^*. \end{aligned}$$

Die unendlich kleinen Grössen ξ, η, ζ, ξ^*, η^*, ζ^* sind offenbar ganz *willkürlich*. Gleiches gilt daher nach (G.) auch von A, B, Γ. Folglich müssen in der Formel (F.) die Coefficienten von A, B, Γ einzeln einander gleich sein. In solcher Weise gelangt man aber zu drei Gleichungen, die völlig identisch sind mit den Gleichungen (17.) Seite 257. — *Q. e. d.*

Dritte Methode der Untersuchung. — Bezeichnet man ein und dasselbe ponderable Flächenelement in den Augenblicken t und $t + dt$ mit Do und Do', und bezeichnet man ferner die Stärke des durch dieses Element gehenden elektrischen Stromes in den Augenblicken t und $t + dt$ respective mit J und J', so ist offenbar:

$$J = (ua + vb + wc)\, Do \quad \text{und} \quad J' = (u'a' + v'b' + w'c')\, Do'.$$

Hier sind alsdann a, b, c, u, v, w und a', b', c', u', v', w' die Richtungscosinus der Normale des Elementes und die daselbst vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten respective in den Augenblicken t und $t + dt$.

Soll nun die Aenderung des elektrischen Strömungszustandes während der Zeit dt eine *blos convective* sein, so muss, zufolge unserer Definition Seite 243, $J = J'$ d. i.

$$(\alpha.) \qquad (ua + vb + wc)\, Do = (u'a' + v'b' + w'c')\, Do'$$

sein; wofür man kürzer schreiben kann:

$$(\beta.) \qquad \delta[(ua + vb + wc)\, Do] = 0.$$

Und zwar muss diese Formel stattfinden für ein im Augenblick t *ganz beliebig gewähltes* Element Do.

Diese Formel (β.) *repräsentirt offenbar in ganz directer Weise die für die convectiven Aenderungen des Strömungszustandes gegebene Definition Seite 243. Demgemäss muss es also möglich sein, auf Grund dieser Formel* (β.), *die Werthe der convectiven Aenderungen* δu, δv, δw *zu berechnen. Und das soll im Folgenden versucht werden.*

Bekanntlich ist [vgl. Seite 129 (20a.)]: $\delta(aDo) = d(aDo)$. Demgemäss kann man die Formel (β.) auch so schreiben:

$$(\gamma.) \quad [(\delta u)aDo + (\delta v)bDo + (\delta w)cDo] + [ud(aDo) + vd(bDo) + wd(cDo)] = 0.$$

Substituirt man hier, was das zweite Trinom betrifft, für $d(aDo)$, $d(bDo)$, $d(cDo)$ die bekannten Ausdrücke [Seite 252 (23.)]:

$$d(aDo) = [a(f_1 + g_2 + h_3) - (af_1 + bg_1 + ch_1)]\, Do,$$
$$d(bDo) = [b(f_1 + g_2 + h_3) - (af_2 + bg_2 + ch_2)]\, Do,$$
$$d(cDo) = [c(f_1 + g_2 + h_3) - (af_3 + bg_3 + ch_3)]\, Do,$$

so erhält man sofort:

$$(\delta.) \quad [\delta u + u(f_1 + g_2 + h_3) - (uf_1 + vf_2 + wf_3)]\, aDo + \cdots = 0,$$

wo auf der linken Seite im Ganzen drei einander analoge Terme zu denken sind, respective behaftet mit aDo, bDo und cDo.

Unsere Betrachtungen gelten, wie schon bemerkt wurde, für ein im Augenblick t *ganz beliebig construirtes* Flächenelement Do. Folglich muss z. B. die Formel (δ.) in Kraft bleiben, welche Grösse man diesem

Element Do, und welche Werthe man den Richtungscosinus a, b, c seiner Normale auch immer zuertheilen mag. Und hieraus folgt weiter, dass die drei Terme der linken Seite der Formel (δ.) *einzeln* $= 0$ sein müssen. Somit ergiebt sich z. B.:

$$(\varepsilon.)\qquad \delta u = (uf_1 + vf_2 + wf_3) - u(f_1 + g_2 + h_3);$$

und dies ist die erste der abzuleitenden drei Gleichungen (17.) Seite 257. U. s. w. *Q. e. d.*

Bemerkung. — Sind α, β, γ die *Geschwindigkeitscomponenten* der ponderablen Massenpunkte:

$$(\zeta.)\qquad \alpha = \frac{dx}{dt}, \quad \beta = \frac{dy}{dt}, \quad \gamma = \frac{dz}{dt},$$

so ist nach Seite 257 (15.):

$$(\eta.)\qquad \alpha = \frac{f}{dt}, \quad \beta = \frac{g}{dt}, \quad \gamma = \frac{h}{dt};$$

so dass also α, β, γ, ebenso wie f, g, h, als Functionen von x, y, z anzusehen sind. Substituirt man nun in (ε.) für f, g, h die aus (η.) entspringenden Werthe, so erhält man sofort:

$$(\vartheta.)\qquad \delta u = [(u\alpha_1 + v\alpha_2 + w\alpha_3) - u(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)]\,dt,$$

oder etwas ausführlicher geschrieben:

$$(\iota.)\qquad \delta u = \left[\left(u\frac{\partial\alpha}{\partial x} + v\frac{\partial\alpha}{\partial y} + w\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) - u\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]dt.$$

Demgemäss kann man dem Satz Seite 257 auch folgende Gestalt geben:

Satz. — *Man denke sich die einzelnen ponderablen Massenpunkte des Körpers M in beliebigen Bewegungen begriffen, und ihre Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ als Functionen der Coordinaten und der Zeit:*

$$(\varkappa.)\quad \alpha = \alpha(x, y, z, t), \quad \beta = \beta(x, y, z, t), \quad \gamma = \gamma(x, y, z, t).$$

Ueberdies nehme man an, dass zu Anfang der Zeit dt, nämlich im Augenblick t, im Innern des Körpers irgend ein elektrischer Strömungszustand vorhanden sei, dargestellt durch die Formeln:

$$(\lambda.)\qquad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z),$$

wo u, v, w beliebig gegebene Functionen sein sollen.

Alsdann werden die convectiven Aenderungen der Strömungen u, v, w für denjenigen ponderablen Massenpunkt m, der zu Anfang der Zeit dt die Coordinaten x, y, z hatte, folgende Werthe besitzen:

$$(\mu.)\qquad \begin{cases} \delta u = \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}u + \frac{\partial\alpha}{\partial y}v + \frac{\partial\alpha}{\partial z}w\right) - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)u\right]dt, \\ \delta v = \left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}u + \frac{\partial\beta}{\partial y}v + \frac{\partial\beta}{\partial z}w\right) - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)v\right]dt, \\ \delta w = \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}u + \frac{\partial\gamma}{\partial y}v + \frac{\partial\gamma}{\partial z}w\right) - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)w\right]dt. \end{cases}$$

Genauer werden diese δu, δv, δw zu bezeichnen sein, als diejenigen convectiven Aenderungen, welche die den ponderablen Punkt m begleitenden elektrischen Strömungen während der Zeit dt erleiden. [*Vgl. die schon im Satze Seite* 257, 258 *angewandte Ausdrucksweise*].

§ 8.

Fortsetzung. Ueber die endogenen Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes.

Die der Zeit dt entsprechenden Aenderungen des elektrischen Strömungszustandes seien in *ganz beliebiger Weise gegeben.* Und zwar seien du, dv, dw diejenigen Aenderungen, welche die einen ponderablen Massenpunkt m *begleitenden* elektrischen Strömungen u, v, w während der Zeit dt erleiden. Alsdann setze man

$$(A.)\quad \begin{cases} du = \delta u + \Delta u, \\ dv = \delta v + \Delta v, \\ dw = \delta w + \Delta w, \end{cases}$$

wo δu, δv, δw die *convectiven* Aenderungen sein sollen. Da nun diese δu, δv, δw mittelst der Formeln (17.) Seite 257 *berechnet* zu denken sind, andrerseits aber die du, dv, dw von Hause aus *gegeben* sind, so ergeben sich aus (A.) sofort die Werthe der sogenannten *endogenen* Aenderungen Δu, Δv, Δw. [Vgl. (F.) Seite 245].

Es ist früher von gewissen Bedingungen die Rede gewesen:

$$(B.)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \text{(im Innern des Körpers)}, \\ u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0, \ \text{(an d. Oberfl. des Körpers)}, \end{cases}$$

die wir damals [Seite 235, Note] als die *annularen Bedingungen* bezeichnet haben. Wir wollen nun annehmen, diese annularen Bedingungen seien für den hier betrachteten (sich dilatirenden) Körper M erfüllt im Augenblick t, und uns folgende Frage vorlegen:

Von welcher Beschaffenheit müssen die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse (A.) *sein, damit diese annularen Bedingungen auch noch erfüllt sind im Augenblick $t + dt$?*

Um auf diese Frage näher eingehen zu können, wird es nothwendig sein, im folgenden Paragraph zuvörderst einige allgemeine Transformationsformeln voranzuschicken.

§ 9.

Allgemeine Transformationen.

Wir betrachten einen Körper M, dessen ponderable Massenpunkte in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern des Körpers ein ganz beliebiger und von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändernder elektrischer Strömungszustand vorhanden ist. Die Coordinaten eines ponderablen Massenpunktes m, und die daselbst vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten seien im Augenblick t mit

$$(1.)\qquad \begin{matrix} x, & y, & z, \\ u, & v, & w, \end{matrix}$$

andererseits aber im Augenblick $t + dt$ mit

$$(2.)\qquad \begin{matrix} x' = x + dx, & y' = y + dy, & z' = z + dz, \\ u' = u + du, & v' = v + dv, & w' = w + dw \end{matrix}$$

bezeichnet. Dabei mögen die dx, dy, dz, ebenso wie früher, als beliebig gegebene unendlich kleine Functionen der x, y, z betrachtet werden:

$$(3.)\qquad dx = f(x, y, z), \quad dy = g(x, y, z), \quad dz = h(x, y, z).$$

Die u, v, w und du, dv, dw wird man ebenfalls als beliebig gegebene Functionen von x, y, z ansehen können. Welche Werthe nun aber die du, dv, dw auch haben mögen, stets wird man setzen können:

$$(4.)\qquad du = \delta u + \Delta u, \quad dv = \delta v + \Delta v, \quad dw = \delta w + \Delta w,$$

indem man dabei unter δu, δv, δw die Ausdrücke (17.) Seite 257 versteht:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \delta u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) u, \\ \delta v = \left(\frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) v, \\ \delta w = \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) w. \end{cases}$$

Solches festgesetzt, werden alsdann in (4.) die δu, δv, δw als die *convectiven*, und die Δu, Δv, Δw als die *endogenen* Theile der Zuwüchse du, dv, dw zu bezeichnen sein.

Alle Functionen, wie z. B. auch u', v', w' (2.), *haben wir bis jetzt als Functionen von x, y, z angesehen. Ebenso gut aber wird es auch erlaubt sein, diese u', v', w' als Functionen von x', y', z' aufzufassen. Alsdann werden die beiden Trinome*

$$(6.)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}$$

einander völlig parallel stehen, nämlich genau dieselbe Bedeutung haben, das eine für den Augenblick t und das andere für den Augenblick $t+dt$. Wir stellen uns die Aufgabe, die Werthe dieser beiden Trinome (6.) *mit einander zu vergleichen.*

Nach Seite 254 (30.) ist [falls man dort u' für F setzt]:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x} - \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Substituirt man hier rechter Hand für u' den Werth (2.): $u'=u+du$, und beachtet man, dass die f, g, h unendlich klein sind, so erhält man (unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung):

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial(u+du)}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

oder, falls man für du seinen aus (4.), (5.) entspringenden Werth substituirt:

$$(\alpha.)\quad \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)u + \Delta u\right]$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Desgleichen erhält man, wie leicht zu übersehen ist:

$$(\beta.)\quad \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}u + \frac{\partial g}{\partial y}v + \frac{\partial g}{\partial z}w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)v + \Delta v\right]$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

und ebenso offenbar auch:

$$(\gamma.)\quad \frac{\partial w'}{\partial z'} - \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}u + \frac{\partial h}{\partial y}v + \frac{\partial h}{\partial z}w\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)w + \Delta w\right]$$
$$- \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Addirt man diese drei Formeln ($\alpha.$), ($\beta.$), ($\gamma.$), so heben sich, wie leicht zu übersehen ist, die mit den zweiten Ableitungen von f $\left(\text{nämlich mit } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)$ behafteten Glieder gegenseitig fort. Gleiches gilt von den Gliedern, die mit den zweiten Ableitungen von g und h behaftet sind.

Ebenso aber heben sich, wie man leicht erkennt, bei einer solchen Addition auch diejenigen Glieder fort, welche mit

$$\begin{matrix} * & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial g}{\partial x}, & * & \frac{\partial g}{\partial z}, \\ \frac{\partial h}{\partial x}, & \frac{\partial h}{\partial y}, & * \end{matrix}$$

behaftet sind; so dass man also durch jene Addition zu folgender Formel gelangt:

$$(7.)\quad \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}+\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}.$$

Hiemit ist die Aufgabe (6.) *absolvirt.*

Bemerkung. — Die linke Seite der Formel (7.) repräsentirt den Zuwachs des Trinoms $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ während der Zeit dt. Demgemäss kann man die Formel auch so schreiben:

$$(A.)\quad d\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}+\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}.$$

Nun aber ist nach Seite 250 (17.):

$$(B.)\quad d(D\tau)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)D\tau.$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (A.) und (B.) respective mit $D\tau$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$, und addirt, so erhält man sofort

$$(C.)\quad d\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)D\tau\right]=\left(\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}+\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}\right)D\tau;$$

und dies dürfte die einfachste Gestalt sein, welche man der Formel (7.) zuzuertheilen im Stande ist.

Wir gehen über zu einer andern Aufgabe. Irgendwo im Innern des Körpers M sei ein *ponderables ebenes Flächenelement* Do construirt. Die Grösse dieses Elementes, seine Coordinaten, die Richtungscosinus seiner Normale und die in seiner unmittelbaren Nähe vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten mögen im Augenblick t mit

$$(8.)\quad Do,\ x,\ y,\ z,\quad a,\ b,\ c,\quad u,\ v,\ w,$$

andrerseits aber im Augenblick $t+dt$ mit

$$(9.)\quad Do'=Do+d(Do),\ \ x'=x+dx,\text{ etc.},\ \ a'=a+da,\text{ etc.},\ \ u'=u+du,\text{ etc.}$$

bezeichnet sein. *Alsdann werden offenbar die beiden Trinome*

$$(10.)\quad au+bv+cw\quad \textit{und}\quad a'u'+b'v'+c'w'$$

einander völlig parallel stehen. Es sollen nun die Werthe dieser beiden Trinome mit einander verglichen werden.

Nach (4.), (5.) ist:

$$(11.)\quad du=\left(\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)u+\Delta u.$$

Ferner ist nach Seite 252 (22.):

$$(12.)\quad da = \left[\frac{\partial f}{\partial x}a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)ab + \cdots\right]a - \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial g}{\partial x}b + \frac{\partial h}{\partial x}c\right).$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen (11.) und (12.) respective mit a und u, und addirt, so gelangt man, unter Anwendung der Abbreviatur:

$$(13.)\quad \varphi = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)ab + \cdots\right]$$

zur ersten Formel folgenden Systems:

$$d(au) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v + \frac{\partial f}{\partial z}w\right)a - \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{\partial g}{\partial x}b + \frac{\partial h}{\partial x}c\right)u - \varphi au + a\Delta u,$$

$$d(bv) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}u + \frac{\partial g}{\partial y}v + \frac{\partial g}{\partial z}w\right)b - \left(\frac{\partial f}{\partial y}a + \frac{\partial g}{\partial y}b + \frac{\partial h}{\partial y}c\right)v - \varphi bv + b\Delta v,$$

$$d(cw) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}u + \frac{\partial h}{\partial y}v + \frac{\partial h}{\partial z}w\right)c - \left(\frac{\partial f}{\partial z}a + \frac{\partial g}{\partial z}b + \frac{\partial h}{\partial z}c\right)w - \varphi cw + c\Delta w,$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Aus diesen drei Formeln folgt aber durch Addition sofort:

$$(14.)\quad d(au+bv+cw) = -\varphi(au+bv+cw) + (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w),$$

eine Formel, die man mit Hinblick auf (8.), (9.) auch so schreiben kann:

$$(15.)\quad (a'u'+b'v'+c'w') - (au+bv+cw) = -\varphi(au+bv+cw) + (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w),$$

wo φ die Bedeutung (13.) hat. *Und hiemit ist die in* (10.) *gestellte Aufgabe absolvirt.*

Bemerkung. — Wir wollen, einen Schritt zurückgehend, der Formel (15.) die Gestalt (14.) geben:

$$(D.)\quad d(au + bv + cw) = -\varphi(au + bv + cw) + (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w).$$

Nun ist nach Seite 252 (21.):

$$(E.)\quad d(Do) = \varphi\, Do,$$

wo φ die in (13.) angegebene Bedeutung besitzt. Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (D.) und (E.) respective mit Do und $(au + bv + cw)$, und addirt, so erhält man sofort:

$$(F.)\quad d[(au + bv + cw)\, Do] = (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w)\, Do;$$

und dies dürfte die einfachste Gestalt der Formel (15.) sein.

§ 10.

Ueber die annularen Bedingungen.

Wir gehen jetzt ein auf die früher (Seite 262) aufgeworfene Frage über die annularen Bedingungen. Diese Bedingungen lauten *für den Augenblick t*:

$$(A.)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, & \text{(im Innern des Körpers)},\\ au+bv+cw=0, & \text{(an der Oberfläche des Körpers)}, \end{cases}$$

wo a, b, c die Richtungscosinus der auf der Oberfläche errichteten Normale sind.

Andrerseits werden die annularen Bedingungen *im Augenblick* $t+dt$, unter Anwendung der im vorigen Paragraph eingeführten Bezeichnungen, folgendermassen lauten:

$$(B.)\quad \begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}=0, & \text{(im Innern des Körpers)},\\ a'u'+b'v'+c'w'=0, & \text{(an der Oberfläche des Körpers)}, \end{cases}$$

wo alsdann a', b', c' die Richtungscosinus einer im Augenblick $t+dt$ auf der Oberfläche errichteten Normale vorstellen. Diese Bedingungen (B.) nehmen nun, durch Benutzung der allgemeinen Transformationsformeln (7.) und (15.), folgende Gestalt an:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \left[1-\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}+\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}\right)=0,\\ \qquad (1-\varphi)(au+bv+cw)+(a\Delta u+b\Delta v+c\Delta w)=0, \end{cases}$$

wo φ die in (13.) angegebene Bedeutung besitzt.

Die Erfüllung der Bedingungen (A.) wird daher die Erfüllung der Bedingungen (B.) ohne Weiteres nach sich ziehen, falls die $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ den beiden Anforderungen entsprechen:

$$(\gamma.)\quad \begin{cases} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}+\frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}=0,\\ a\Delta u+b\Delta v+c\Delta w=0. \end{cases}$$

Das aber wird z. B. der Fall sein, wenn die Δu, Δv, Δw alle $=0$, mithin die der Zeit dt entsprechenden Aenderungen des Strömungszustandes *blos convectiver Natur* sind. Wir gelangen somit zu folgenden beiden Sätzen.

Erster Satz. — *Die ponderable Masse eines gegebenen Körpers M sei in beliebigen Dilatationen begriffen, während gleichzeitig im Innern des Körpers irgend welche elektrische Strömungen stattfinden.*

Entspricht nun dieser elektrische Strömungszustand in irgend einem Augenblick t den annularen Bedingungen, so wird er diesen Bedingungen auch im Augenblick t + dt entsprechen, falls man nur voraussetzt, dass die Aenderung des Strömungszustandes während der Zeit dt eine blos convective ist.

Zweiter Satz. — *Die der Zeit dt entsprechende Aenderung des Strömungszustandes sei nicht blos convectiver Natur. Vielmehr sei:*

$$du = \delta u + \Delta u, \quad dv = \delta v + \Delta v, \quad dw = \delta w + \Delta w,$$

wo die Δu, Δv, Δw irgend welche Werthe haben.

Entspricht nun der elektrische Strömungszustand im Augenblick t den annularen Bedingungen, so wird er diesen Bedingungen auch im Augenblick $t + dt$ entsprechen, falls man nur voraussetzt, dass jene endogenen Aenderungen Δu, Δv, Δw den beiden Anforderungen Genüge leisten:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\Delta v)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\Delta w)}{\partial z} = 0 \text{ (im Innern des Körpers)}, \\ a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w = 0 \text{ (an der Oberfläche des Körpers)}. \end{cases}$$

Dabei sind unter a, b, c die Richtungscosinus der auf der Oberfläche errichteten Normale zu verstehen.

Bemerkung. — Man könnte die hier angestellten Betrachtungen vielleicht als müssig erklären, nämlich darauf hinweisen, dass unendlich kleine Grössen höherer Ordnung fortzulassen sind, und dass daher die Gleichungen (B.), wie aus ihrer Umgestaltung (β.) ersichtlich wäre, *unter allen Umständen* mit den Gleichungen (A.) identisch seien.

Um diesen Einwand zu entkräften, wollen wir einen einigermassen analogen, aber sehr viel einfacheren Fall in Betracht ziehen. Die Bedingung dafür, dass ein Punkt $m(x, y, z)$ auf einer gegebenen Fläche sich befinde, lautet im Augenblick t:

$$\text{(a.)} \qquad F = 0,$$

und im Augenblick $t + dt$:

$$\text{(b.)} \qquad F + \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

wo F für $F(x, y, z)$ steht, und $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung jener Fläche vorstellt. Soll also der Punkt m während der Zeit dt auf der Fläche verbleiben, so müssen seine der Zeit dt entsprechenden Verschiebungen dx, dy, dz die Gleichung erfüllen:

$$\text{(c.)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

Diese einfache Betrachtung könnte man nun ebenfalls für illusorisch erklären, nämlich darauf hinweisen, dass die Gleichungen (a.) und (b.), weil unendlich kleine Grössen höherer Ordnung fortzulassen wären, unter allen Umständen unter einander identisch seien, u. s. w.; — was offenbar völlig fehlerhaft sein würde.

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Helmholtz'schen Dilatationsuntersuchungen. Zweiter Theil: Aufstellung einer bestimmten Hypothese (Dilatationshypothese), und nähere Untersuchung der aus dieser Hypothese sich ergebenden Consequenzen.

Im Wesentlichen drehen sich all' unsere Betrachtungen im vorigen und im gegenwärtigen Abschnitt um die *Helmholtz'sche Methode vom Jahre 1874.* Diese Betrachtungen dürften in mehrfacher Beziehung von Wichtigkeit sein, nämlich

Erstens deswegen, weil es fast als eine Sache der Nothwendigkeit erscheint, eine Methode, die von einem so hervorragenden Forscher wie Helmholtz herrührt, nach allen Seiten hin zu studiren, und so weit als irgend möglich zu verfolgen.

Zweitens deswegen, weil wir mittelst der Helmholtz'schen Methode im gegenwärtigen Abschnitt, wenn auch nicht zu *neuen* Resultaten, so doch zu Resultaten gelangen werden, welche in vollem Einklang sind mit den von uns im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetzen, und welche daher dazu dienen können, unser Zutrauen zu jenen Gesetzen zu verstärken.

Drittens endlich auch deswegen, weil wir hier, gewissermassen *in nuce*, dieselbe Methode vor uns haben, welche später von *Hertz* (1890), und sodann auch von *Helmholtz* selber (1892) auf sehr viel complicirtere Dinge angewendet worden ist, nämlich auf jene in der *Maxwell'schen Theorie* auftretenden elektrischen und magnetischen Zustände, welche man bald als Störungen, bald als Polarisationen, bald als Momente zu bezeichnen pflegt. [Hertz' Ges. Werke, Bd. 2, Seite 256 bis 285, und Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 476—603].

§ 1.

Die Dilatationshypothese, eine Hypothese, die im Wesentlichen von Helmholtz herrührt.

Die *Helmholtz'sche Abhandlung vom Jahre 1874* [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 702—762] beruht auf der *Hypothese**), dass die beiden F. Neu-

*) Das Wort „Hypothese“ wird von Helmholtz selber gebraucht. Denn es wird von ihm express bemerkt [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 713], dass die Anwendung der F. Neumann'schen Gesetze auf *un*geschlossene Ströme eine „hypothetische“ sei.



mann'schen Gesetze anwendbar seien auf *un*geschlossene Ströme, mithin z. B. auch auf einzelne Strom*elemente*, und dass sie daher auch anwendbar sein müssten auf Körper, deren ponderable Massen in beliebigen Dilatationen begriffen sind, ohne dass es dabei nöthig wäre über die Beschaffenheit der in diesen Körpern vorhandenen elektrischen Strömungszustände irgend welche Voraussetzung zu machen. [Man vergleiche a. a. O. namentlich die Seiten 714, 730 und 742].

Bekanntlich aber gelangte Helmholtz, auf Grund dieser Hypothese, zu Resultaten (zu seinen sogenannten „Endkräften"), die mit den später von ihm selbst angestellten experimentellen Untersuchungen in Widerspruch stehen; wie solches bereits früher [Seite 70] von uns besprochen wurde.

Ein zweiter Grund gegen die Helmholtz'sche Hypothese besteht darin, dass die F. Neumann'schen Gesetze, falls sie auf *sich dilatirende* Körper für ganz beliebige elektrische Strömungszustände anwendbar wären, nothwendiger Weise für solche ganz beliebige Strömungszustände auch auf *starre* Körper anwendbar sein müssten; während wir doch bereits constatirt haben [Satz Seite 237], dass sie auf starre Körper nur dann anwendbar sein können, wenn die elektrischen Strömungszustände im ersten Augenblick des betrachteten Zeitelementes den annularen Bedingungen entsprechen.

So beachtenswerth also die Helmholtz'sche Hypothese auch sein mag, so sind wir doch, in Anbetracht dieser Umstände, genöthigt, dieselbe etwas *einzuschränken*, und ihr folgende Gestalt zu geben:

Die Dilatationshypothese. — *Es soll angenommen werden, dass die F. Neumann'schen Integralgesetze [Seite 211]:*

$$(d\mathfrak{L})_M^{M_1} = + dP - \Delta_M P, \tag{1a.}$$

$$(d\mathfrak{L})_{M_1}^M = + dP - \Delta_{M_1} P, \tag{1b.}$$

$$(dL)_M^{M_1} + (dL)_{M_1}^M = - \delta P \tag{1c.}$$

für jedwedes Zeitelement dt nicht nur auf starre Körper [Satz Seite 237], sondern ebenso auch auf zwei sich beliebig dilatirende Körper M und M_1 anwendbar seien, falls man nur voraussetzt, dass die elektrischen Strömungszustände der beiden Körper im ersten Augenblick des betrachteten Zeitelementes dt den annularen Bedingungen entsprechen).*

---

*) Ist mit Bezug auf den elektrischen Strömungszustand eines Körpers von den annularen Bedingungen die Rede, so hat man wohl zu unterscheiden, ob dieselben nur im *ersten* Augenblick des betrachteten Zeitelementes dt, oder ob sie

Dabei soll das gegenseitige elektrodynamische Potential P der beiden Körper, in voller Uebereinstimmung mit Helmholtz, definirt gedacht werden durch den Ausdruck:

$$P = -A^2 \iint \left(\frac{1-k}{2} \frac{T T_1}{r} + \frac{1+k}{2} \frac{S}{r} \right) D\tau D\tau_1. \tag{2.}$$

wo k die Helmholtz'sche Constante bezeichnet.

In den folgenden Paragraphen des gegenwärtigen Abschnitts wollen wir nun untersuchen, zu welchen Resultaten man auf Grund dieser Hypothese gelangt, und ob man in solcher Weise über die eigentlichen Elementargesetze der Elektrodynamik nicht vielleicht näheren Aufschluss zu gewinnen vermag.

§ 2.

Die aus der Dilatationshypothese sich ergebenden Consequenzen.

Zwei Körper M und M_1 seien im Raume in ganz beliebigen, theils fortschreitenden, theils rotirenden Bewegungen begriffen. Neben diesen *generellen Bewegungen* der beiden Körper mögen aber gleichzeitig auch noch irgend welche *Dilatationsbewegungen* vorhanden sein.

Es seien m und m_1 irgend zwei ponderable Massenpunkte der beiden Körper. Wir bezeichnen die Coordinaten dieser beiden Punkte m, m_1 in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t + dt$ respective mit x, y, z, x_1, y_1, z_1 und mit $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$; *so dass also die der Zeit dt entsprechenden Verschiebungen dx, dy, dz und dx_1, dy_1, dz_1 im Allgemeinen theils von den generellen, theils aber auch von den Dilatations-Bewegungen herrühren werden.*

Die Verschiebungen dx, dy, dz denken wir uns gegeben als unendlich kleine, sonst aber beliebige Functionen der x, y, z:

$$dx = f(x, y, z), \quad dy = g(x, y, z), \quad dz = h(x, y, z), \tag{3.}$$

und ebenso beim andern Körper:

$$dx_1 = f_1(x_1, y_1, z_1), \quad dy_1 = g_1(x_1, y_1, z_1), \quad dz_1 = h_1(x_1, y_1, z_1). \tag{4.}$$

Dabei soll das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Axensystem ganz beliebig gedacht werden. Ob dasselbe in irgend welcher Bewegung sich befindet, oder ein absolut ruhendes ist, wird für unsere Betrachtungen ganz gleichgültig sein.

Die im Augenblick t in den beiden Körpern vorhandenen elektrischen Strömungscomponenten seien bezeichnet mit u, v, w und

---

in *jedwedem* Augenblick dieses Zeitelementes erfüllt sein sollen. Solches geht deutlich hervor aus den Sätzen Seite 267.



u_1, v_1, w_1. Und die Aenderungen dieser Componenten während der Zeit dt seien bezeichnet mit:

$$(5.) \quad du = \delta u + \Delta u, \quad dv = \delta v + \Delta v, \quad dw = \delta w + \Delta w,$$

$$(6.) \quad du_1 = \delta u_1 + \Delta u_1, \quad dv_1 = \delta v_1 + \Delta v_1, \quad dw_1 = \delta w_1 + \Delta w_1,$$

wo die δ die *convectiven*, und die Δ die *endogenen* Theile dieser Aenderungen vorstellen sollen. Dabei mögen, was den Körper M betrifft, die u, v, w und ebenso auch die du, dv, dw, δu, δv, δw, Δu, Δv, Δw als Functionen derjenigen Coordinaten x, y, z angesehen werden, welche die einzelnen ponderablen Massenpunkte des Körpers M im Augenblick t besitzen. Und Analoges mag beim Körper M_1 gedacht werden.

Dies vorangeschickt, betrachten wir jetzt zwei *kleine Massenelemente* DM und DM_1 der beiden Körper. Für dieselben, und zwar speciell für den Augenblick t führen wir die Bezeichnungen ein:

$$(7.) \qquad DM, \; D\tau, \; x, \; y, \; z, \; u, \; v, \; w,$$

$$(8.) \qquad DM_1, \; D\tau_1, \; x_1, \; y_1, \; z_1, \; u_1, \; v_1, \; w_1.$$

Zugleich setzen wir:

$$(9.) \quad \begin{gathered} r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ a = \frac{x - x_1}{r}, \quad b = \frac{y - y_1}{r}, \quad c = \frac{z - z_1}{r}. \end{gathered}$$

und ferner:

$$(10.) \quad \begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned}$$

Ueberdies nehmen wir an, dass die elektrischen Strömungszustände der beiden Körper im Augenblick t, d. i. im ersten Augenblick des betrachteten Zeitelementes dt den *annularen Bedingungen* entsprechen [Seite 235, Note]; so dass also jene Functionen u, v, w und u_1, v_1, w_1 folgenden Gleichungen Genüge leisten:

$$(11.) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ (im Innern von } M\text{)}, \\ u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = 0, \text{ (an der Oberfl. von } M\text{)}, \end{cases}$$

$$(12.) \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0, \text{ (im Innern von } M_1\text{)}, \\ u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) = 0, \text{ (an der Oberfl. von } M_1\text{)}. \end{cases}$$

Solches festgesetzt, werden alsdann, nach unserer Dilatationshypothese [Seite 270], für das betrachtete Zeitelement dt die Formeln gelten:

(13a.) $$(d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = + dP - \Delta_M P,$$

(13b.) $$(d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = + dP - \Delta_{M_1} P,$$

(13c.) $$(dL)_{M}^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = - \delta P,$$

wo P das gegenseitige Potential der beiden Körper vorstellt:

(14.) $$P = - A^2 \iint \left(\frac{1-k}{2} \frac{TT_1}{r} + \frac{1+k}{2} \frac{S}{r} \right) D\tau D\tau_1 .$$

Es handelt sich nun darum, die aus diesen Formeln (13a, b, c.), (14.) *für die ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte sich ergebenden Consequenzen näher zu untersuchen.*

Der der Zeit dt entsprechende Zuwachs δP ist offenbar in zwei Theile zerlegbar:

(15.) $$\delta P = \delta_M P + \delta_{M_1} P,$$

der Art, dass $\delta_M P$ nur von den Verschiebungen des Körpers M, andrerseits aber $\delta_{M_1} P$ nur von denen des Körpers M_1 herrührt. Dies in (13c.) substituirt, erhält man:

(16.) $$(dL)_{M}^{M_1} + (dL)_{M_1}^{M} = - \delta_M P - \delta_{M_1} P.$$

Ebenso wie nun rechter Hand $\delta_M P$ nur von den Verschiebungen des Körpers M, und $\delta_{M_1} P$ nur von denen des Körpers M_1 herrührt, ebenso gilt offenbar Analoges linker Hand von den Ausdrücken $(dL)_{M}^{M_1}$ und $(dL)_{M_1}^{M}$. Jene Verschiebungen sind aber ganz beliebig. Folglich müssen in (16.) die von den Verschiebungen des Körpers M herrührenden Glieder, für sich allein, einander gleich sein, und ebenso auch diejenigen Glieder, die von den Verschiebungen des Körpers M_1 abhängen. Somit ergeben sich also aus (16.) folgende beiden Gleichungen*):

(17a.) $$(dL)_{M}^{M_1} = - \delta_M P,$$

(17b.) $$(dL)_{M_1}^{M} = - \delta_{M_1} P.$$

Was ferner die *elektromotorischen* Arbeiten betrifft, so können die Formeln (13a, b.), mittelst der bekannten Gleichung:

(18.) $$dP = \delta_M P + \delta_{M_1} P + \Delta_M P + \Delta_{M_1} P,$$

in folgende Gestalt versetzt werden:

(19a.) $$(d\mathfrak{L})_{M}^{M_1} = \delta_M P + \delta_{M_1} P + \quad 0 \quad + \Delta_{M_1} P,$$

(19b.) $$(d\mathfrak{L})_{M_1}^{M} = \delta_M P + \delta_{M_1} P + \Delta_M P + 0.$$

*) Der Uebergang von (16.) zu (17a, b.) ist von genau derselben Art wie früher auf Seite 61, 62 der Uebergang von (12.) zu (13.), (14.).

Es wird offenbar ausreichend sein, von den vier Formeln (17a, b.) und (19a, b.) nur je eine zu betrachten. Und wir wollen nun, was die Formeln (17a.) und (19a.) betrifft, zuerst die rechten, und sodann die linken Seiten derselben wirklich zu bilden suchen.

Die rechten Seiten der beiden Formeln (17a.) und (19a.). — Der Ausdruck P (14.) ist nach (10.) folgendermassen darstellbar:

$$P = -A^2 \iint \left\{ \frac{1-k}{2} \frac{(au+bv+cw)(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2} \frac{(uu_1+vv_1+ww_1)}{r} \right\} D\tau D\tau_1;$$

hieraus folgt sofort:

$$P = -A^2 \int (Uu + Vv + Ww) D\tau, \tag{20.}$$

wo alsdann U, V, W die Bedeutungen haben:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \int \left\{ \frac{1-k}{2} \frac{a(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2} \frac{u_1}{r} \right\} D\tau_1, \\ V &= \int \left\{ \frac{1-k}{2} \frac{b(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2} \frac{v_1}{r} \right\} D\tau_1, \\ W &= \int \left\{ \frac{1-k}{2} \frac{c(au_1+bv_1+cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2} \frac{w_1}{r} \right\} D\tau_1. \end{aligned} \right. \tag{21.}$$

Da $u, v, w, D\tau$ dem Körper M angehören, und keinerlei Beziehung haben zum Körper M_1, so ist offenbar:

$$\begin{aligned} \delta_M(uD\tau) &= \delta(uD\tau), \quad \text{und} \quad \delta_{M_1}(uD\tau) = 0, \\ \Delta_M(uD\tau) &= \Delta(uD\tau), \quad \text{und} \quad \Delta_{M_1}(uD\tau) = 0. \end{aligned}$$

Und mit Rücksicht hierauf folgt nun aus (20.), (21.) sofort:

$$\begin{aligned} \delta_M P &= -A^2 \int \left\{ [(\delta_M U) u D\tau + U \delta(uD\tau)] + \cdots \right\}, \\ \delta_{M_1} P &= -A^2 \int \left\{ [(\delta_{M_1} U) u D\tau + \text{Null}] + \cdots \right\}, \\ \Delta_M P &= -A^2 \int \left\{ [(\Delta_M U) u D\tau + U \Delta(uD\tau)] + \cdots \right\}, \\ \Delta_{M_1} P &= -A^2 \int \left\{ [(\Delta_{M_1} U) u D\tau + \text{Null}] + \cdots \right\}. \end{aligned} \tag{22.}$$

Diese Ausdrücke (22.) bilden die rechten Seiten der Formeln (17a.), (19a.).

Die linken Seiten der beiden Formeln. — Es seien $(X), (Y), (Z)$ und $(\mathfrak{X}), (\mathfrak{Y}), (\mathfrak{Z})$ die Componenten der vom ganzen Körper M_1 auf das einzelne Element DM ausgeübten ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte; so dass also die Arbeiten dieser Kräfte während des Zeitelementes dt die Werthe haben [vgl. Seite 58 (4.) und 64 (4.)]:

$$\begin{aligned} (dL)_{DM}^{M_1} &= (X)\,dx + (Y)\,dy + (Z)\,dz, \\ (d\mathfrak{L})_{DM}^{M_1} &= [(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w]\,D\tau\,dt. \end{aligned} \tag{23.}$$

Hieraus ergeben sich für die während der Zeit dt vom ganzen Körper M_1 auf den ganzen Körper M ausgeübten Arbeiten folgende Ausdrücke:

$$(24.)\qquad \begin{aligned} (dL)_M^{M_1} &= \sum[(X)\,dx + (Y)\,dy + (Z)\,dz],\\ (d\mathfrak{L})_M^{M_1} &= (dt)\int[(\mathfrak{X})\,u + (\mathfrak{Y})\,v + (\mathfrak{Z})\,w]\,D\tau, \end{aligned}$$

die Summation respective Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $DM(D\tau)$ des Körpers M.

Die Formeln selber. — Die in Rede stehenden Formeln (17a.) und (19a.) erhalten nun, wenn man in ihnen die Ausdrücke (22.), (24.) substituirt, und zugleich für dx, dy, dz ihre Werthe f, g, h (3.) eintreten lässt, folgende Gestalt:

$$(25.)\qquad \sum[(X)f + (Y)g + (Z)h] = \\ = + A^2\int\Big\{[(\delta_M U)\,u D\tau + U\delta(uD\tau)] + \cdots\Big\},$$

$$(26.)\qquad (dt)\int[(\mathfrak{X})\,u + (\mathfrak{Y})\,v + (\mathfrak{Z})\,w]\,D\tau =$$

$$= - A^2\int\Big\{(\delta_M U + \delta_{M_1} U + \Delta_{M_1} U)\,uD\tau + \cdots\Big\} - A^2\int\Big\{U\delta(uD\tau) + \cdots\Big\}.$$

Um uns der Helmholtz'schen Bezeichnungsweise möglichst zu nähern, führen wir, statt der *Verschiebungen* f, g, h, f_1, g_1, h_1 (3.), (4.), die betreffenden *Geschwindigkeiten* ein: $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, indem wir setzen:

$$(27.)\qquad \frac{dx}{dt} = \frac{f}{dt} = \alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{g}{dt} = \beta, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{h}{dt} = \gamma,$$

$$(28.)\qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{f_1}{dt} = \alpha_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{g_1}{dt} = \beta_1, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{h_1}{dt} = \gamma_1.$$

Ueberdies setzen wir für jedwede Function $\mathfrak{F}$:

$$(28\text{H.})\qquad \delta_{M_1}\mathfrak{F} + \Delta_{M_1}\mathfrak{F} = \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right] dt.^{*)}$$

An diese Bezeichnungen wollen wir nun zunächst einige einfache Relationen (a.), (b.), (c.) sich anschliessen lassen. Nach Seite 258 (18.) ist:

$$\delta(uD\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,u + \frac{\partial f}{\partial y}\,v + \frac{\partial f}{\partial z}\,w\right) D\tau.$$

Substituirt man aber hier für f den aus (27.) entspringenden Ausdruck: $f = \alpha\,dt$, so erhält man:

$$(\text{a.})\qquad \delta(uD\tau) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,u + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,v + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,w\right) D\tau\,dt.$$

---

*) Statt $\left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right]$ schreibt Helmholtz: $\frac{\delta \mathfrak{F}}{\delta t}$, was hier offenbar nicht brauchbar ist, weil wir den Buchstaben δ in ganz andrer Bedeutung eingeführt haben.

Ferner ist die Grösse U (21.), was ihre Abhängigkeit vom Körper M betrifft, eine blosse Function von x, y, z (nämlich unabhängig von u, v, w). Somit folgt:

$$\delta_M U = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad \text{und} \quad \Delta_M U = 0,$$

also unter Anwendung der in (27.) eingeführten Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ:

$$\text{(b.)} \qquad \delta_M U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right) dt, \quad \text{und} \quad \Delta_M U = 0.$$

Endlich wird, auf Grund der Bezeichnungsweise (28 H.) zu schreiben sein:

$$\text{(c.)} \qquad \delta_{M_1} U + \Delta_{M_1} U = \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] dt.$$

Mittelst der Bezeichnungen (27.) und mittelst der Relationen (a.), (b.), (c.), gewinnen jetzt unsere beiden Formeln (25.), (26.) folgende Gestalt:

$$\text{(29.)} \qquad \sum [(X)\alpha + (Y)\beta + (Z)\gamma] =$$
$$= + A^2 \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right) u + U\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}u + \frac{\partial \alpha}{\partial y}v + \frac{\partial \alpha}{\partial z}w\right)\right] + \cdot\cdot \right\} D\tau,$$

$$\text{(30.)} \qquad \int [(\mathfrak{X})u + (\mathfrak{Y})v + (\mathfrak{Z})w] D\tau =$$
$$= - A^2 \int \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma + \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]\right) u + \cdot\cdot \right\} D\tau$$
$$- A^2 \int \left\{ U\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}u + \frac{\partial \alpha}{\partial y}v + \frac{\partial \alpha}{\partial z}w\right) + \cdot\cdot \right\} D\tau.$$

Und aus diesen Formeln (29.), (30.) sind nun die Werthe der ponderomotorischen Kräfte (X), (Y), (Z) und die Werthe der elektromotorischen Kräfte $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ näher zu bestimmen.

Die ponderomotorischen Kräfte. -- Die Functionen f, g, h sind ganz *willkürlich*. Gleiches gilt daher von den α, β, γ (27.) Folglich müssen in (29.) die von α, β, γ herrührenden Glieder auf beiden Seiten einzeln einander gleich sein. Somit folgt z. B.:

$$\text{(31.)} \quad \sum (X)\alpha = A^2 \int \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}u + \frac{\partial V}{\partial x}v + \frac{\partial W}{\partial x}w\right)\alpha + U\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}u + \frac{\partial \alpha}{\partial y}v + \frac{\partial \alpha}{\partial z}w\right)\right\} D\tau.$$

Nun ist offenbar identisch:

$$U\left(u\frac{\partial \alpha}{\partial x} + v\frac{\partial \alpha}{\partial y} + w\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) = + \frac{\partial (U u \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial (U v \alpha)}{\partial y} + \frac{\partial (U w \alpha)}{\partial z}$$
$$- \alpha\left(\frac{\partial (U u)}{\partial x} + \frac{\partial (U v)}{\partial y} + \frac{\partial (U w)}{\partial z}\right),$$

also, falls man über alle Volumelemente $D\tau$ des Körpers M integrirt:

$$\int U\left(u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+v\frac{\partial\alpha}{\partial y}+w\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)D\tau=-\int U\alpha[u\cos(n,x)+v\cos(n,y)+w\cos(n,z)]\,Do$$
$$-\int\alpha\left(\frac{\partial(Uu)}{\partial x}+\frac{\partial(Uv)}{\partial y}+\frac{\partial(Uw)}{\partial z}\right)D\tau;$$

hieraus aber ergiebt sich, weil u, v, w den Bedingungen (11.) unterworfen sind, sofort:

$$\int U\left(u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+v\frac{\partial\alpha}{\partial y}+w\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)D\tau=-\int\alpha\left(u\frac{\partial U}{\partial x}+v\frac{\partial U}{\partial y}+w\frac{\partial U}{\partial z}\right)D\tau.$$

Demgemäss gewinnt unsere Formel (31.) die Gestalt:

$$(32.)\quad \sum(X)\alpha=A^2\int\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}u+\frac{\partial V}{\partial x}v+\frac{\partial W}{\partial x}w\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial x}u+\frac{\partial U}{\partial y}v+\frac{\partial U}{\partial z}w\right)\right\}\alpha\,D\tau.$$

Nun sind aber die α, β, γ, ebenso wie die f, g, h, ganz *willkürliche* Functionen von x, y, z; so dass z. B. α von einer Stelle des Körpers M zur andern in ganz beliebiger Weise variiren kann. Folglich müssen in der Formel (32.) die den einzelnen Werthen von α entsprechenden Glieder auf beiden Seiten einander gleich sein. Somit ergiebt sich:

$$(33.)\quad (X)=A^2\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}u+\frac{\partial V}{\partial x}v+\frac{\partial W}{\partial x}w\right)-\left(\frac{\partial U}{\partial x}u+\frac{\partial U}{\partial y}v+\frac{\partial U}{\partial z}w\right)\right\}D\tau,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(34.)\qquad (X)=A^2\left\{v\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right\}D\tau.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich offenbar für (Y) und (Z).

Hiemit ist die vom ganzen Körper M_1 auf ein einzelnes Element $DM(D\tau)$ des Körpers M ausgeübte ponderomotorische Kraft (X), (Y), (Z) gefunden. Noch weiter zu gehen, nämlich diese Kraft auf die einzelnen Elemente DM_1 jenes einwirkenden Körpers M_1 repartiren zu wollen, würde offenbar unmöglich, oder wenigstens mit grösster Willkür verbunden sein.

Bemerkung. — Wir sind in Betreff der Helmholtz'schen Dilatationshypothese zu einer gewissen *Beschränkung* genöthigt worden [vgl. Seite 270], nämlich zu der Vorstellung hingedrängt worden, dass jene Hypothese nur dann gültig sein könne, wenn die elektrischen Strömungszustände der gegebenen Körper zu Anfang des betrachteten Zeitelementes dt den annularen Bedingungen entsprechen.

Mit diesem Unterschiede, den unsere Vorstellungen gegenüber denen von Helmholtz besitzen, hängt unmittelbar zusammen, dass Helmholtz an Stelle der Formel (34.) eine etwas *andere* Formel, nämlich folgende gefunden hat [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 734 (3i.)]:

$$(\text{H.})\qquad (X)=A^2\left\{v\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z}\right)+U\frac{\partial e}{\partial t}\right\},$$

in welcher e die Dichtigkeit der an der betreffenden Stelle vorhandenen freien Elektricität vorstellt.

Auch übersieht man leicht, dass diese Helmholtz'sche Formel (H.) bei nachträglicher Hinzufügung jener annularen Bedingungen sofort in die von uns gefundene Formel (34.) sich verwandelt.

Die elektromotorischen Kräfte. — Die Formel (30.) ist offenbar in folgende Gestalt versetzbar:

$$\int (\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\, D\tau = 0, \tag{35.}$$

wo alsdann z. B. $\mathfrak{U}$ die Bedeutung hat:

$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{X}) + A^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma + \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] \right) + \left(U\frac{\partial \alpha}{\partial x} + V\frac{\partial \beta}{\partial x} + W\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\}. \tag{36.}$$

Nun sind [vgl. das allgemeine Axiom Seite 76] die Grössen $(\mathfrak{X}), (\mathfrak{Y}), (\mathfrak{Z})$ von u, v, w unabhängig. Gleiches gilt aber nach (21.) auch von den Grössen U, V, W. Und Gleiches wird also auch gelten von der hier eingeführten Grösse $\mathfrak{U}$ (36.), und ebenso auch von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$.

Beachtet man dies, und beachtet man ferner, dass die Functionen $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$, bis auf die ihnen auferlegten annularen Bedingungen (11.):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z) = 0,$$

ganz *willkürlich* sind, so ergiebt sich aus der Formel (35.) sofort, dass die $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ von der Gestalt sein müssen:

$$\mathfrak{U} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}, \quad \mathfrak{V} = \frac{\partial \Lambda}{\partial y}, \quad \mathfrak{W} = \frac{\partial \Lambda}{\partial z}, \tag{37.}$$

wo Λ eine *völlig unbekannte* Function vorstellt. Substituirt man aber diesen Werth von $\mathfrak{U}$ in (36.), so erhält man:

$$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial x} - A^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma + \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] \right) + \left(U\frac{\partial \alpha}{\partial x} + V\frac{\partial \beta}{\partial x} + W\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \right\}. \tag{38.}$$

Was das letzte Trinom dieser Formel (38.) betrifft, so ist offenbar identisch:

$$U\frac{\partial \alpha}{\partial x} + V\frac{\partial \beta}{\partial x} + W\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial (U\alpha + V\beta + W\gamma)}{\partial x} - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma \right).$$

Demgemäss kann man die Formel (38.) auch so schreiben:

$$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} - A^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma + \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma \right) \right\}, \tag{39.}$$

oder auch so:

$$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} - A^2 \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] + \beta \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right\}, \tag{40.}$$

wo alsdann λ zu Λ in der Beziehung steht:

$$\lambda = \Lambda - A^2 (U\alpha + V\beta + W\gamma). \tag{41.}$$

Analoge Formeln ergeben sich für $(\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{Z})$, der Art, dass die Functionen Λ, λ in den Ausdrücken für $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ dieselben sind, wie in dem Ausdrucke für $(\mathfrak{X})$.

Hiemit ist die vom ganzen Körper M_1 in irgend einem Punkt (x, y, z) des Körpers M hervorgebrachte elektromotorische Kraft $(\mathfrak{X}), (\mathfrak{Y}), (\mathfrak{Z})$, bis auf eine noch unbekannte Function λ, vollständig berechnet. Noch weiter zu gehen, nämlich diese Kraft auf die einzelnen Elemente DM_1 jenes einwirkenden Körpers M_1 repartiren zu wollen, würde offenbar eine Sache der Willkür sein.

Bemerkung. — Die betreffende Helmholtz'sche Formel [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 745 (5d.)] lautet, in unsere Bezeichnungsweise übersetzt*), folgendermassen:

$$(\mathfrak{X}) = -A^2 \frac{\partial (U\alpha + V\beta + W\gamma)}{\partial x} - A^2 \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] + \beta \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \gamma \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) \right\}. \tag{J.}$$

Diese Helmholtz'sche Formel (J.) unterscheidet sich also von der unsrigen (40.) dadurch, dass in ihr an Stelle der unbekannten Function λ eine völlig bestimmte Function

$$-A^2(U\alpha + V\beta + W\gamma)$$

sich vorfindet. In Bezug auf den eigentlichen Grund dieses Unterschiedes ist genau dasselbe zu sagen, wie in unserer vorigen Bemerkung [Seite 277].

§ 3.

Fortsetzung. Resultate der Untersuchung.

Wir sind im vorigen Paragraph zu den Resultaten (33.) und (39.) gelangt, d. i. zu folgenden Formeln:

$$(X) = A^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial x} v + \frac{\partial W}{\partial x} w\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w\right) \right\} D\tau, \tag{42.}$$

$$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + A^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma + \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]\right) \right\}. \tag{43.}$$

Auch haben wir diese Resultate einer Vergleichung unterworfen mit den betreffenden Helmholtz'schen Resultaten. Und nur zum Zweck einer solchen Vergleichung ist das Symbol $\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]$ von uns eingeführt worden. Nachträglich wird es jetzt gut sein, dieses Symbol wieder zu beseitigen, wodurch in unseren Resultaten zugleich eine gewisse Vereinfachung hervorgebracht werden wird.

Der vollständige Zuwachs von U während der Zeit dt lautet:

$$dU = \delta_M U + \Delta_M U + \delta_{M_1} U + \Delta_{M_1} U. \tag{A.}$$

Nun ist aber, wie bereits früher [Seite 276 (b.), (c.)] bemerkt wurde:

---

*) Man vgl. die Note Seite 275.

$$\delta_M U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right)dt, \quad \text{und} \quad \Delta_M U = 0,$$

$$\delta_{M_1} U + \Delta_{M_1} U = \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]dt.$$

Dies in (A.) substituirt, erhält man sofort:

(B.) $$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma + \left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]\right)dt;$$

so dass also die Formel (43.) die einfachere Gestalt gewinnt:

(44.) $$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + A^2\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma\right) - \frac{dU}{dt}\right\}.$$

Was die in (42.), (43.), (44.) enthaltenen U, V, W betrifft, so ist z. B. U definirt durch folgenden Ausdruck (21.):

(45.) $$U = \int\left\{\frac{1-k}{2}\,\frac{a(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r} + \frac{1+k}{2}\,\frac{u_1}{r}\right\}D\tau_1.$$

Dieser Ausdruck ist einer bedeutenden Vereinfachung fähig. Für eine beliebige Function $\Phi = \Phi(x, y, z)$ gilt nämlich die Formel [Seite 212 (L.)]:

(α.) $$\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}u + \frac{\partial \Phi}{\partial y}v + \frac{\partial \Phi}{\partial z}w\right)D\tau = -\int\Phi\,[u\cos(n,x) + \cdot\cdot]\,Do - \int\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdot\cdot\right)D\tau;$$

und diese Formel gewinnt im gegenwärtigen Fall mit Rücksicht darauf, dass die Functionen u, v, w im betrachteten Augenblick t den annularen Bedingungen (11.) Genüge leisten sollen, die einfachere Gestalt:

(β.) $$\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}u + \frac{\partial \Phi}{\partial y}v + \frac{\partial \Phi}{\partial z}w\right)D\tau = 0.$$

Nun ist bekanntlich [vgl. (9.)]:

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$$

$$a = \frac{x - x_1}{r}, \qquad b = \frac{y - y_1}{r}, \qquad c = \frac{z - z_1}{r};$$

woraus mittelst elementarer Rechnung sich ergiebt:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1 - a^2}{r}, \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{ab}{r}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{ac}{r}.$$

Nimmt man also in (β.) für Φ die Function a, so erhält man:

(ββ.) $$\int\frac{u - a(au + bv + cw)}{r}D\tau = 0.$$

Ebenso wie die Formeln (β.) und (ββ.) für den Körper M im Augenblick t gelten, ebenso werden offenbar in diesem Augenblick t für den Körper M_1 folgende Formeln in Kraft sein:

(γ.) $$\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}v_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}w_1\right)D\tau_1 = 0,$$

(γγ.) $$\int\frac{u_1 - a(au_1 + bv_1 + cw_1)}{r}D\tau_1 = 0,$$

wo in (γ.) unter $\Phi = \Phi(x_1, y_1, z_1)$ eine beliebig gegebene Function zu verstehen ist.

Mit Rücksicht auf ($\gamma\gamma$.) gewinnt nun der Ausdruck U (45.) die einfachere Gestalt:

$$U = \int \frac{u_1}{r} D\tau_1. \tag{46.}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich offenbar für V und W.

Schliesslich gelangen wir also, auf Grund der Formeln (42.), (44.) und (46.) zu folgenden Resultaten:

Erster Satz. — *Was die generellen Bewegungen der beiden Körper M und M_1, ferner ihre Dilatationsbewegungen und endlich die in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungen betrifft, so halte man fest an den zu Anfang vorigen Paragraphs* [*Seite 271* (3.), (4.), .. (14.)] *angegebenen Vorstellungen. Zu diesen Vorstellungen gehört insbesondere die, dass in einem gegebenen Augenblick t die annularen Bedingungen erfüllt sind:*

$$(47.)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\textit{innerhalb } M), \\ u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z) = 0, \quad (\textit{an der Oberfl. von } M), \end{cases}$$

$$(48.)\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0, \quad (\textit{innerhalb } M_1), \\ u_1\cos(n_1,x) + v_1\cos(n_1,y) + w_1\cos(n_1,z) = 0, \quad (\textit{an der Oberfl. von } M_1). \end{cases}$$

Ferner führe man für irgend zwei Elemente DM und DM_1 der beiden Körper die Bezeichnungen ein:

$$(49.)\qquad \begin{array}{l} DM,\ D\tau,\ x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ w, \\ DM_1,\ D\tau_1,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1, \end{array}$$

und setze [*vgl.* (46.)]:

$$(50.)\qquad U = \int \frac{u_1}{r} D\tau_1, \qquad V = \int \frac{v_1}{r} D\tau_1, \qquad W = \int \frac{w_1}{r} D\tau_1,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über das ganze Volumen des Körpers M_1. Dabei soll r den Abstand des Elementes DM_1 ($D\tau_1$) vom Elemente DM ($D\tau$) vorstellen.

Sind nun (X), (Y), (Z) *die Componenten der im Augenblick t vom ganzen Körper M_1 auf das Element DM ausgeübten ponderomotorischen Kraft, so wird z. B.* (X) *den Werth haben* [*vgl.* (42.)]:

$$(51.)\quad (X) = A^2\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}u + \frac{\partial V}{\partial x}v + \frac{\partial W}{\partial x}w\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}u + \frac{\partial U}{\partial y}v + \frac{\partial U}{\partial z}w\right)\right\} D\tau.$$

Analoge Formeln gelten für (Y) *und* (Z).

Zweiter Satz. — *Es seien dU, dV, dW die vollständigen Zuwüchse der dem Element DM zugehörigen Ausdrücke U, V, W* (50.) *während der Zeit dt; so dass also diese dU, dV, dW theils von der Bewegung*

des Elementes DM, theils von der Bewegung der ponderablen Massenpunkte des Körpers M_1, theils auch von den Aenderungen des in diesem Körper M_1 vorhandenen elektrischen Strömungszustandes herrühren. Ferner seien

$$\alpha = \frac{dx}{dt}, \quad \beta = \frac{dy}{dt}, \quad \gamma = \frac{dz}{dt} \tag{52.}$$

die augenblicklichen Geschwindigkeitscomponenten des Elementes $DM(x, y, z)$.

Sind nun $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ die Componenten der im Augenblick t vom ganzen Körper M_1 in irgend einem Punkt des Elementes $DM(x, y, z)$ hervorgebrachten elektromotorischen Kraft, so wird z. B. $(\mathfrak{X})$ den Werth haben [*vgl.* (44.)]:

$$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + A^2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \beta + \frac{\partial W}{\partial x} \gamma \right) - \frac{dU}{dt} \right\}, \tag{53.}$$

wo das dU die vorhin genannte Bedeutung besitzt, während λ eine völlig unbekannte Function vorstellt. Analoge Formeln gelten für $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$, und zwar der Art, dass in allen drei Formeln für $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{Z})$ die unbekannte Function λ ein und dieselbe ist.

Bei diesem zweiten Satz ist, ebenso wie beim ersten, unter dem Augenblick t immer derjenige zu verstehen, in welchem jene annularen Bedingungen (47.), (48.) *erfüllt gedacht werden.*

§ 4.

Vergleichung der erhaltenen Resultate mit den im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetzen.

Die soeben ausgesprochenen beiden Sätze werden ganz allgemein gelten für beliebige Dilatationen der beiden Körper, und müssen also z. B. auch dann gelten, wenn diese Dilatationen Null sind. Mit andern Worten: Sie müssen gültig sein für *starre* Körper. Und es fragt sich nun, ob für diesen Fall der *starren* Körper zwischen den in Rede stehenden beiden Sätzen und zwischen den früher im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetzen Uebereinstimmung stattfindet. Auf diese Frage soll hier näher eingegangen werden.

Die ponderomotorischen Kräfte. — Es ist:

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \tag{54.}$$

Setzt man nun, wie gewöhnlich:

$$a = \frac{x - x_1}{r}, \quad b = \frac{y - y_1}{r}, \quad c = \frac{z - z_1}{r}, \tag{55.}$$

so ergiebt sich sofort:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = c, \tag{56.}$$

und ferner:

$$(57.)\quad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{1-a^2}{r}, & \frac{\partial b}{\partial z} &= \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{bc}{r}, \\ \frac{\partial b}{\partial y} &= \frac{1-b^2}{r}, & \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{ca}{r}, \\ \frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{1-c^2}{r}, & \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{ab}{r}. \end{aligned}$$

Auch mögen die gewöhnlichen Abkürzungen T, T_1, S benutzt werden:

$$(58.)\quad \begin{aligned} T &= au + bv + cw, \\ T_1 &= au_1 + bv_1 + cw_1, \\ S &= uu_1 + vv_1 + ww_1. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (56.) ergiebt sich nun aus (50.) sofort:

$$(59.)\quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\int \frac{au_1}{r^2} D\tau_1, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\int \frac{bu_1}{r^2} D\tau_1, \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -\int \frac{cu_1}{r^2} D\tau_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -\int \frac{au_1}{r^2} D\tau_1, \\ \frac{\partial V}{\partial x} = -\int \frac{av_1}{r^2} D\tau_1, \\ \frac{\partial W}{\partial x} = -\int \frac{aw_1}{r^2} D\tau_1; \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(60.)\quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w = -\int \frac{u_1 T}{r^2} D\tau_1, \\ \frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial x} v + \frac{\partial W}{\partial x} w = -\int \frac{aS}{r^2} D\tau_1, \\ \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \beta + \frac{\partial W}{\partial x} \gamma = -\int \frac{a(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1)}{r^2} D\tau_1, \end{cases}$$

wo T, S die Bedeutungen (58.) besitzen. *Substituirt man diese Werthe* (60.) *in der zu untersuchenden Formel* (51.), *so erhält man:*

$$(61.)\quad (X) = A^2 D\tau \int \frac{u_1 T - aS}{r^2} D\tau_1;$$

während andrerseits nach dem achten Abschnitt, nämlich zufolge des dort constatirten Ampère'schen Gesetzes [*Seite 168* (45.)] *sich ergeben würde:*

$$(62.)\quad (X) = A^2 D\tau \int \frac{a(3TT_1 - 2S)}{r^2} D\tau_1.$$

Soll nun zwischen diesen beiderlei Ergebnissen Einklang vorhanden sein, so muss sich zeigen lassen, dass das aus (61.) *und* (62.) *durch Subtraction entstehende Integral*

$$(63.)\quad \Omega = \int \frac{u_1 T + aS - 3aTT_1}{r^2} D\tau_1$$

gleich Null sei.

Das Integral Ω (63.) erhält, falls man für T, T_1, S ihre eigentlichen Bedeutungen (58.) substituirt, die Gestalt:

(64.) $$\Omega = \int (\mathfrak{U} u_1 + \mathfrak{V} v_1 + \mathfrak{W} w_1)\, D\tau_1,$$

wo alsdann $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Werthe haben:

$$\mathfrak{U} = \frac{au + (1 - 3a^2)(au + bv + cw)}{r^2},$$

$$\mathfrak{V} = \frac{av - 3ab(au + bv + cw)}{r^2},$$

$$\mathfrak{W} = \frac{aw - 3ac(au + bv + cw)}{r^2}.$$

Diese Werthe aber sind, wie aus (56.), (57.) sich leicht ergiebt, folgendermassen darstellbar:

$$\mathfrak{U} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1},$$

$$\mathfrak{V} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y_1},$$

$$\mathfrak{W} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \quad \text{wo} \quad \Phi = \frac{a(au + bv + cw)}{r};$$

so dass also Ω (64.) übergeht in:

(65.) $$\Omega = -\int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} w_1 \right) D\tau_1.$$

Hieraus aber folgt, auf Grund einer bekannten Formel [Seite 280 (γ.)], dass Ω in der That $= 0$ ist.

Jene zu untersuchende Formel (51.) *oder* (61.) *ist also in vollem Einklang mit dem im achten Abschnitt gefundenem Gesetz, nämlich mit dem Ampère'schen Gesetz.*

Die elektromotorischen Kräfte. — Bei den Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphs haben wir es durchweg nur mit dem Specialfall *starrer* Körper zu thun. Setzen wir also wie gewöhnlich:

(66.) $dx = f,\ dy = g,\ dz = h$ und $dx_1 = f_1,\ dy_1 = g_1,\ dz_1 = h_1,$

so werden z. B. für die Function f im gegenwärtigen Fall folgende Formeln gelten [vgl. Seite 220 (34.)]:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -d\mathfrak{c}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = +d\mathfrak{b}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$b\,d\mathfrak{c} - c\,d\mathfrak{b} = -\left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b} = -\left(u_1\frac{\partial f}{\partial x} + v_1\frac{\partial f}{\partial y} + w_1\frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit $\frac{T_1}{r}$ und $-\frac{1}{r}$, und addirt, so erhält man:

$$(67.)\quad \frac{T_1(b\,d\mathfrak{c} - c\,d\mathfrak{b}) - (v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b})}{r} = \\ = -\left(\frac{aT_1 - u_1}{r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{bT_1 - v_1}{r}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{cT_1 - w_1}{r}\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

dabei bezeichnen $d\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{c}$ die kleinen Winkel, um welche der starre Körper M während der Zeit dt um die drei Coordinatenaxen sich dreht.

Ferner mag, in Uebereinstimmung mit (52.), gesetzt werden:

$$(68.)\quad \alpha = \frac{dx}{dt},\ \beta = \frac{dy}{dt},\ \gamma = \frac{dz}{dt} \text{ und } \alpha_1 = \frac{dx_1}{dt},\ \beta_1 = \frac{dy_1}{dt},\ \gamma_1 = \frac{dz_1}{dt},$$

oder mit Rücksicht auf (66.):

$$(69.)\quad \alpha = \frac{f}{dt},\ \beta = \frac{g}{dt},\ \gamma = \frac{h}{dt} \text{ und } \alpha_1 = \frac{f_1}{dt},\ \beta_1 = \frac{g_1}{dt},\ \gamma_1 = \frac{h_1}{dt}.$$

Endlich sei noch Folgendes bemerkt: U und dU besitzen nach (50.) die Werthe:

$$(70.)\quad U = \int \frac{u_1}{r} D\tau_1,\qquad dU = -\int\left[\frac{u_1\,dr}{r^2} - \frac{du_1}{r}\right] D\tau_1.$$

Analoge Werthe haben V und W. Aus diesen Werthen haben sich z. B. die in (60.) notirten drei Formeln ergeben. Die letzte jener drei Formeln kann aber, mit Hinblick auf (69.) folgendermassen geschrieben werden:

$$(71.)\quad \frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma = -\frac{1}{dt}\int \frac{a(fu_1 + gv_1 + hw_1)}{r^2} D\tau_1.$$

Dies vorangeschickt, kommen wir nun zu unserer eigentlichen Aufgabe. Es handelt sich um die Untersuchung der Formel (53.):

$$(72.)\quad (\mathfrak{X})\,dt = \frac{\partial\lambda}{\partial x}dt + A^2\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma\right)dt - dU\right\}.$$

Diese Formel kann, indem man für $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial x}\beta + \frac{\partial W}{\partial x}\gamma\right)$ *und für* dU *die Werthe* (71.) *und* (70.) *substituirt, auch so geschrieben werden:*

$$(73.)\quad (\mathfrak{X})\,dt = \frac{\partial\lambda}{\partial x}dt - A^2\int\left(\frac{a(fu_1 + gv_1 + hw_1)}{r^2} - \left[\frac{u_1\,dr}{r^2} - \frac{du_1}{r}\right]\right) D\tau_1.$$

Andrerseits aber soll diese Kraft $(\mathfrak{X})$ *nach dem im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetz* [*Seite 174* (18.)] *folgenden Werth haben:*

$$(74.)\quad (\mathfrak{X})\,dt = -A^2\left\{\int\left(\frac{(aT_1 - u_1)\,dr}{r^2} + \frac{a\,dT_1}{r}\right)D\tau_1 - \mathfrak{x}\right\},$$

wo $\mathfrak{x}$ *die Bedeutung hat:*

$$\mathfrak{x} = \frac{1+k}{4}\int\left(\delta\left[\frac{aT_1 - u_1}{r}\right] + \frac{T_1(b\,d\mathfrak{c} - c\,d\mathfrak{b}) - (v_1\,d\mathfrak{c} - w_1\,d\mathfrak{b})}{r}\right)D\tau_1 \\ + \frac{1+k}{2}\int\Delta\left(\frac{aT_1 - u_1}{r}\right)\cdot D\tau_1.$$

Es fragt sich, ob zwischen diesen beiderlei Ergebnissen Einklang vorhanden ist.

Das soeben angegebene ξ ist mit Rücksicht auf (67.) auch so darstellbar:

$$\xi = \frac{1+k}{4}\,\delta\left(\int \frac{a\,T_1 - u_1}{r}\,D\tau_1\right) + \frac{1+k}{2}\,\Delta\left(\int \frac{a\,T_1 - u_1}{r}\,D\tau_1\right)$$

$$-\frac{1+k}{4}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\int \frac{a\,T_1 - u_1}{r}\,D\tau_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\int \frac{b\,T_1 - v_1}{r}\,D\tau_1 + \frac{\partial f}{\partial z}\int \frac{c\,T_1 - w_1}{r}\,D\tau_1\right\}$$

Das hier dreimal auftretende Integral

$$\int \frac{a\,T_1 - u_1}{r}\,D\tau_1 \quad \text{oder} \quad \int \frac{a(a u_1 + b v_1 + c w_1) - u_1}{r}\,D\tau_1$$

ist aber, in Folge der Gleichungen (48.), bekanntlich $= 0$; wie solches früher [Seite 280 ($\gamma\gamma$.)] näher dargelegt wurde. Gleiches gilt von:

$$\int \frac{b\,T_1 - v_1}{r}\,D\tau_1 \quad \text{und} \quad \int \frac{c\,T_1 - w_1}{r}\,D\tau_1.$$

Somit folgt: $\xi = 0$; so dass also die Formel (74.) sich reducirt auf:

$$(75.)\qquad (\mathfrak{X})\,dt = -A^2\int\left(\frac{(a\,T_1 - u_1)\,dr}{r^2} + \frac{a\,d\,T_1}{r}\right)D\tau_1.$$

Soll nun jene hier zu untersuchende Formel mit dem im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetz in Einklang sein, so muss sich zeigen lassen, dass die beiden Ausdrücke (73.) und (75.), bei geeigneter Wahl der noch unbekannten Function λ, unter einander identisch werden. Oder mit andern Worten: *Soll ein solcher Einklang vorhanden sein, so muss sich darthun lassen, dass eine Function λ existirt, die der aus* (73.) *und* (75.) *durch Subtraction entstehenden Formel:*

$$(76.)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial x}\,dt = A^2\int\left\{\frac{a(f u_1 + g v_1 + h w_1)}{r^2} + \frac{d u_1}{r} - \frac{a}{r}\left(\frac{T_1\,dr}{r} + d\,T_1\right)\right\}D\tau_1,$$

sowie auch den beiden analogen für $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ und $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$ sich ergebenden Formeln Genüge leistet.

Nun ist bekanntlich nach (58.) und (55.):

$$T_1 = \frac{(x - x_1)u_1 + (y - y_1)v_1 + (z - z_1)w_1}{r}.$$

Hieraus folgt sofort:

$$d\,T_1 = \frac{(x - x_1)\,d u_1 + \cdots}{r} + \frac{u_1(dx - dx_1) + \cdots}{r} - \frac{(x - x_1)u_1 + \cdots}{r^2}\,dr,$$

also mit Rücksicht auf (55.) und (66.):

$$d\,T_1 = (a\,du_1 + \cdots) + \frac{(f - f_1)u_1 + \cdots}{r} - \frac{(a u_1 + \cdots)\,dr}{r}.$$

Bringt man das letzte Glied auf die linke Seite, und beachtet man zugleich, dass $au_1 + bv_1 + cw_1 = T_1$ ist [vgl. (58.)], so erhält man:

$$(77.)\quad \frac{T_1 dr}{r} + dT_1 = (adu_1 + bdv_1 + cdw_1) + \frac{(f-f_1)u_1 + (g-g_1)v_1 + (h-h_1)w_1}{r}.$$

Der in (76.) in den geschweiften Klammern befindliche Ausdruck — er mag Ω heissen — gewinnt jetzt mit Rücksicht auf (77.) folgende Gestalt:

$$\Omega = \frac{a(f_1 u_1 + g_1 v_1 + h_1 w_1)}{r^2} + \frac{du_1}{r} - \frac{a(adu_1 + bdv_1 + cdw_1)}{r}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (56.) und (57.):

$$\Omega = -(f_1 u_1 + g_1 v_1 + h_1 w_1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial a}{\partial x}du_1 + \frac{\partial b}{\partial x}dv_1 + \frac{\partial c}{\partial x}dw_1,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(78.)\quad \Omega = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \text{wo } \Phi = -\left(\frac{f_1 u_1 + g_1 v_1 + h_1 w_1}{r}\right) + (adu_1 + bdv_1 + cdw_1).$$

Unter Ω war aber der in (76.) in den geschweiften Klammern enthaltene Ausdruck verstanden worden. Jene Formel (76.) wird daher, falls man in ihr für diesen Ausdruck Ω den Werth (78.) substituirt, die Gestalt erhalten:

$$(79.)\qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x}dt = A^2 \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} D\tau_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(A^2 \int \Phi\, D\tau_1\right).$$

Hiemit aber ist die Existenz der Function λ ausser Zweifel gestellt, und zugleich dargethan, dass dieselbe den Werth hat:

$$(80.)\qquad \lambda = \frac{A^2}{dt}\int \Phi\, D\tau_1.$$

Substituirt man hier für Φ seine in (78.) angegebene Bedeutung, so erhält man:

$$(81.)\quad \lambda = \frac{A^2}{dt}\int \left\{(adu_1 + bdv_1 + cdw_1) - \left(\frac{f_1 u_1 + g_1 v_1 + h_1 w_1}{r}\right)\right\} D\tau_1,$$

also mit Rücksicht auf (66.):

$$(82.)\quad \lambda = A^2 \int \left\{\left(a\frac{du_1}{dt} + b\frac{dv_1}{dt} + c\frac{dw_1}{dt}\right) - \frac{1}{r}\left(u_1\frac{dx_1}{dt} + v_1\frac{dy_1}{dt} + w_1\frac{dz_1}{dt}\right)\right\} D\tau_1.$$

Um zur Hauptsache zu kommen: *Aus der Existenz der Function λ ergiebt sich, dass die zu untersuchende Formel* (53.) *oder* (72.) *in vollem Einklang ist mit dem im achten Abschnitt gefundenen Elementargesetz* [*Seite 174* (18.)].

Dreizehnter Abschnitt.

Ueber die ponderomotorischen Kräfte.

Das von uns im achten Abschnitt [Seite 168] gefundene ponderomotorische Elementargesetz ist identisch mit dem *Ampère'schen Gesetz*. Auf Grund dieses Gesetzes soll nun im gegenwärtigen Abschnitt diejenige ponderomotorische Einwirkung untersucht werden, welche ein *geschlossner* linearer Strom auf ein einzelnes Stromelement ausübt, unter der Voraussetzung, dass die Stärke jenes geschlossenen Stromes eine blosse Function der Zeit ist.

Sodann werden wir übergehen zu den sogenannten *magnetischen Massen*, indem wir dabei festhalten an der bekannten Ampère'schen Vorstellung, nach welcher magnetische Massenpunkte oder magnetische Pole nichts Andres sind, als die Endpunkte elektrischer Solenoide. Auf Grund dieser Vorstellung werden wir die ponderomotorische Einwirkung eines Magnetpoles auf ein Stromelement, und ebenso auch diejenige, welche umgekehrt ein Stromelement auf einen Magnetpol ausübt, näher zu bestimmen suchen.

Sehr leicht werden sodann diese Untersuchungen sich ausdehnen lassen auf *annulare Stromsysteme* [vgl. Seite 235, Satz, Zusatz und Note]. Ist nämlich in irgend einem Körper ein annulares Stromsystem vorhanden, so wird sich die ponderomotorische Einwirkung dieses Körpers auf einen Magnetpol, und ebenso auch seine ponderomotorische Einwirkung auf ein einzelnes Stromelement in einfacher Weise angeben lassen.

§ 1.

Umformung des Ampère'schen Gesetzes.

Die Formel des Ampère'schen Gesetzes lautet bekanntlich [vgl. Seite 169 (49.)]:

(1.) $$R = A^2 J J_1 Ds Ds_1 \frac{3\Theta\Theta_1 - 2\mathsf{E}}{r^2}.$$



Die betrachteten beiden linearen Leiter, in denen die Ströme J und J_1 dahinfliessen, mögen in beliebigen Bewegungen begriffen sein; so dass also der gegenseitige Abstand r der beiden Elemente Ds, Ds_1 von den Bogenlängen s, s_1 und überdies auch noch von der Zeit t abhängt. Setzt man nun

$$\psi = \sqrt{r}, \tag{2.}$$

so ist offenbar:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1} = -\frac{1}{4r\sqrt{r}} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s_1} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}.$$

Multiplicirt man diese letzte Formel mit der ebenfalls aus (2.) entspringenden Gleichung:

$$8 \frac{d\psi}{dr} = \frac{4}{\sqrt{r}},$$

so erhält man sofort:

$$8 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s_1} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}. \tag{3.}$$

Nun ist aber [nach Seite 6 (h.)]:

$$\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s_1} = -\Theta\Theta_1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} = \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r}.$$

Somit folgt aus (3.):

$$8 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1} = \frac{\Theta\Theta_1}{r^2} + \frac{2(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})}{r^2} = \frac{3\Theta\Theta_1 - 2\mathsf{E}}{r^2}; \tag{4.}$$

so dass man also dem Ampère'schen Gesetz (1.) folgende Gestalt geben kann:

$$R = 8A^2 JJ_1 Ds Ds_1 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1}, \quad \text{wo} \quad \psi = \sqrt{r}. \tag{5.}$$

Diese höchst elegante Gestalt des Gesetzes ist übrigens schon von Ampère selber angegeben worden. [*Vgl. Ampère: Théorie des Phénomènes électrodynamiques, Paris, 1826 Page 60*].

Sind x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der Elemente Ds und Ds_1, so werden die Componenten X, Y, Z der von Ds_1 auf Ds ausgeübten ponderomotorischen Kraft R die Werthe haben:

$$X = R\frac{x - x_1}{r}, \quad Y = R\frac{y - y_1}{r}, \quad Z = R\frac{z - z_1}{r}. \tag{6.}$$

Die erste dieser drei Formeln ist offenbar auch so darstellbar:

$$X = R\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Substituirt man aber hier für R den Werth (5.), so erhält man sofort:

$$X = 8A^2JJ_1DsDs_1 \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s_1}, \quad \text{wo} \quad \psi = \sqrt{r}. \tag{7.}$$

Analoge Formeln gelten für Y und Z.

§ 2.

Die Integrale F, G, H, und die denselben sich anschliessenden Ausdrücke L, M, N.

Es sei gegeben ein *geschlossener* linearer Strom, dessen Stärke J_1 eine *blosse Function der Zeit* ist. Irgend ein Element des Stromes und die rechtwinkligen Componenten dieses Elementes seien bezeichnet mit Ds_1 und Dx_1, Dy_1, Dz_1. Ferner mögen, mit Bezug auf irgend welchen Raumpunkt (x, y, z), unter F, G, H folgende Ausdrücke verstanden werden:

$$F = J_1\int\frac{Dx_1}{r}, \qquad G = J_1\int\frac{Dy_1}{r}, \qquad H = J_1\int\frac{Dz_1}{r}, \tag{1.}$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente $Ds_1(Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ des gegebenen geschlossenen Stromes; dabei soll r den Abstand eines solchen Elementes vom Punkte (x, y, z) vorstellen. Sind also (x_1, y_1, z_1) die Coordinaten des Elementes Ds_1, so hat r^2 den Werth:

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2. \tag{2.}$$

Das Integral F ist nach dem Stokes'schen Theorem [Formel (α.) Seite 4] in ein Flächenintegral verwandelbar. In solcher Weise ergiebt sich:

$$F = J_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\cos(\nu_1, y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\cos(\nu_1, z)\right)D\omega_1,$$

oder was dasselbe ist:

$$\left\{\begin{aligned} F &= J_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1, z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1, y)\right)D\omega_1. \quad \text{Ebenso wird:}\\ G &= J_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1, x) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(\nu_1, z)\right)D\omega_1,\\ H &= J_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(\nu_1, y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1, x)\right)D\omega_1, \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\omega_1$ einer vom Strome J_1 umgrenzten Fläche ω_1; dabei bezeichnet ν_1 die auf dem Element $D\omega_1$, und zwar auf seiner positiven Seite errichtete Normale.

Von besonderer Wichtigkeit sind die an F, G, H sich anschliessenden Ausdrücke:

$$(4.)\quad L = A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \quad M = A\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \quad N = A\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Hier kann man für F, G, H nach Belieben die Werthe (1.) oder auch die Werthe (3.) substituiren. Im erstern Fall erhält man:

$$(5.)\quad L = AJ_1 \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy_1\right) = AJ_1 \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} Dy_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} Dz_1\right).$$

Andrerseits ergiebt sich im letztern Falle:

$$L = + AJ_1 \int \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \cos(\nu_1, y) - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} \cos(\nu_1, x)\right) D\omega_1$$
$$+ AJ_1 \int \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \cos(\nu_1, z) - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \cos(\nu_1, x)\right) D\omega_1;$$

wofür man, in Anbetracht der bekannten Formel:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0,$$

auch schreiben kann:

$$(6.)\quad L = AJ_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(\nu_1, x) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(\nu_1, y) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(\nu_1, z)\right] D\omega_1.$$

Das hier in den eckigen Klammern enthaltene Trinom ist offenbar

$$= - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \cos(\nu_1, x) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \cos(\nu_1, y) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \cos(\nu_1, z), \text{ also } = - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}.$$

Somit folgt:

$$(7.)\qquad L = - AJ_1 \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} D\omega_1.$$

Der hier in (7.) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist aber nach bekanntem Satze [vgl. den ersten Theil dieses Werkes Seite 242 (5.)] identisch mit $\varepsilon \varkappa$, wo $\varkappa$ die Oeffnung des vom Punkte (x, y, z) nach dem Rande des Elementes $D\omega_1$ gelegten Kegels vorstellt, während $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem dieser Punkt (x, y, z) auf der *positiven* oder *negativen* Seite des Elementes $D\omega_1$ sich befindet. Somit folgt:

$$(8.)\qquad L = - AJ_1 \frac{\partial}{\partial x} \sum (\varepsilon \varkappa).$$

Hat ε für alle Elemente $D\omega_1$ der gegebenen Stromfläche ω_1 *ein und denselben* Werth [was z. B. der Fall sein wird, wenn diese Fläche *eben* ist], so reducirt sich die Formel (8.) auf:

$$L = -AJ_1 \cdot \varepsilon \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x}, \quad \text{wo } \mathsf{K} = \sum \varkappa \text{ ist.} \tag{8a.}$$

Dieses K repräsentirt alsdann die Oeffnung des vom Punkte (x, y, z) nach dem Stromringe J_1 gelegten Kegels.

Weitere beachtenswerthe Ausdrücke für L, M, N ergeben sich dadurch, dass man, an Stelle von r, die Quadratwurzel

$$\psi = \sqrt{r} \tag{9.}$$

einführt. Bezeichnet man die (von irgend welchem Anfangspunkt aus gerechnete) *Bogenlänge* des Elementes $Ds_1(x_1, y_1, z_1)$ mit s_1, so ergiebt sich aus (9.) und (2.) sofort:

$$4\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial s_1} = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{x-x_1}{r}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right),$$

d. i.

$$4\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{x-x_1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s_1} = -\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{x-x_1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial x_1}{\partial s_1}.$$

Diese Formel kann man offenbar auch so schreiben:

$$4\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{Dx_1}{Ds_1}, \tag{α.}$$

oder ein wenig anders geordnet:

$$\frac{1}{r}\frac{Dx_1}{Ds_1} = -4\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right).$$

Desgleichen wird offenbar:

$$\frac{1}{r}\frac{Dy_1}{Ds_1} = -4\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{y_1-y}{r}\right);$$

dabei sind unter Dx_1, Dy_1, Dz_1 die rechtwinkligen Componenten von Ds_1 zu verstehen. Aus der letzten Formel folgt durch partielle Ableitung nach z:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\frac{Dy_1}{Ds_1} = -4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y_1-y}{r}\right). \tag{β.}$$

Desgleichen wird offenbar:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\frac{Dz_1}{Ds_1} = -4\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_1-z}{r}\right). \tag{γ.}$$

Substituirt man jetzt die Werthe (β.), (γ.) in der Formel (5.), und beachtet man dabei, dass der Strom J_1 ein *geschlossener* sein soll, so ergiebt sich sofort:

(10.) $$L = 4AJ_1\int\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\right)\right\}Ds_1,$$

eine Formel, die man offenbar auch so schreiben kann:

(11.) $$L = 4AJ_1\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial s_1} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s_1}\right)Ds_1.$$

§ 3.

Das Ampère'sche Gesetz in seiner Anwendung auf einen geschlossenen linearen Strom.

Es sei gegeben ein *geschlossener* linearer Strom, dessen Stärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist. Und es seien (X), (Y), (Z) die Componenten derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche dieser geschlossene Strom auf irgend ein einzelnes Stromelement JDs ausübt. Alsdann ist nach Seite 290 (7.):

(12.) $$(X) = 8A^2JJ_1Ds\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s_1}Ds_1, \quad \text{wo } \psi = \sqrt{r} \text{ ist,}$$

und wo r den gegenseitigen Abstand der beiden Elemente $JDs(x, y, z)$ und $J_1Ds_1(x_1, y_1, z_1)$ vorstellt.

Während Ds_1 einem *geschlossenen* Strome J_1 angehört, über welchen in (12.) die Integration sich hinerstreckt, mag andrerseits Ds einem *ungeschlossenen* Strome J angehören. Sind nun, ebenso wie in (12.), s und s_1 die Bogenlängen dieser beiden Elemente, so ist:

(13.) $$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{Dx}{Ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{Dy}{Ds} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\frac{Dz}{Ds},$$

(14.) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial s_1} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial s_1}\,\frac{Dx}{Ds} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s_1}\,\frac{Dy}{Ds} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial s_1}\,\frac{Dz}{Ds},$$

wo Dx, Dy, Dz die rechtwinkligen Componenten von Ds vorstellen. Substituirt man den Werth (14.) in der Formel (12.), und bedient man sich dabei der Abbreviaturen:

(15.) $$\Phi_{xx} = 8AJ_1\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial s_1}Ds_1, \quad \Phi_{xy} = 8AJ_1\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s_1}Ds_1, \text{ etc.}$$

so gelangt man sofort zur ersten Gleichung folgenden Systems:

(16.) $$\begin{cases} (X) = AJ(\Phi_{xx}Dx + \Phi_{xy}Dy + \Phi_{xz}Dz), \\ (Y) = AJ(\Phi_{yx}Dx + \Phi_{yy}Dy + \Phi_{yz}Dz), \\ (Z) = AJ(\Phi_{zx}Dx + \Phi_{zy}Dy + \Phi_{zz}Dz), \end{cases}$$

dessen übrige Gleichungen in analoger Art zu erhalten sind.

Nun ist J_1 ein *geschlossener* Strom, und folglich:

$$\int \frac{\partial}{\partial s_1}\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right] \cdot Ds_1 = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial s_1}\left[\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right] \cdot Ds_1 = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial s_1} Ds_1 = 0,$$

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial s_1} Ds_1 + \int \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial s_1} Ds_1 = 0,$$

also nach (15.):

(α.) $$\Phi_{xx} = 0,$$

(β.) $$\Phi_{yz} + \Phi_{zy} = 0.$$

Ferner ist nach (15.) und mit Rücksicht auf (11.):

(γ.) $$\Phi_{yz} - \Phi_{zy} = 2L.$$

Aus (β.), (γ.) ergiebt sich aber sofort:

(δ.) $$\Phi_{yz} = L \quad \text{und} \quad \Phi_{zy} = -L;$$

so dass man also, durch (α.) und (δ.), zu folgender Tabelle gelangt:

(17.) $$\begin{cases} \Phi_{xx} = 0, & \Phi_{yz} = L, & \Phi_{zy} = -L, \\ \Phi_{yy} = 0, & \Phi_{zx} = M, & \Phi_{xz} = -M, \\ \Phi_{zz} = 0, & \Phi_{xy} = N, & \Phi_{yx} = -N. \end{cases}$$

Substituirt man endlich diese Werthe (17.) in den Formeln (16.), so erhält man folgendes Resultat:

Satz. — *Es sei gegeben ein geschlossener linearer Strom, dessen Stärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist. Alsdann werden die Componenten (X), (Y), (Z) der von diesem Strom auf ein einzelnes Stromelement $JDs(Dx, Dy, Dz)$ ausgeübten ponderomotorischen Kraft die Werthe haben:*

(18.) $$\begin{cases} (X) = AJ(NDy - MDz), \\ (Y) = AJ(LDz - NDx), \\ (Z) = AJ(MDx - LDy). \end{cases}$$

Hier bezeichnen L, M, N die Ausdrücke Seite 291 (4.), dieselben gebildet gedacht für den geschlossenen Strom J_1 und für den Ort (x, y, z) des Elementes JDs. — Beiläufig folgt aus (18.), dass die Kraft (X), (Y), (Z) gegen das Element JDs senkrecht steht.

Specialfall. — Ist der geschlossene Strom *unendlich klein*, und bezeichnet man seine *Stromfläche* mit λ_1, so ist nach (7.):

$$(19.)\quad \begin{cases} L = -AJ_1 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial \nu_1} \lambda_1, \quad \text{und ebenso:} \\ M = -AJ_1 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial \nu_1} \lambda_1, \\ N = -AJ_1 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial \nu_1} \lambda_1. \end{cases}$$

Substituirt man aber diese Werthe (19.) in (18.), so folgt:

$$(X) = -AJ \cdot AJ_1 \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial \nu_1} Dy - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial \nu_1} Dz \right),$$

oder was dasselbe ist:

$$(20.)\quad (X) = -AJ \cdot AJ_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \nu_1} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz \right).$$

§ 4.

Die ponderomotorische Einwirkung eines annularen Stromsystems auf ein einzelnes Stromelement.

Die in einem Körper M_1 vorhandenen elektrischen Strömungen u_1, v_1, w_1 mögen den *annularen Bedingungen* entsprechen. Alsdann wird der Körper anzusehen sein als ein System von lauter unendlich dünnen im Laufe der Zeit sich verschiebenden Stromringen. Auch wird die Stromstärke eines solchen Ringes eine blosse Function der Zeit sein. [Vgl. Seite 235 Satz und Zusatz]. Folglich kann die ponderomotorische Einwirkung des gegebenen Körpers auf ein einzelnes Stromelement $JDs(Dx, Dy, Dz)$ sofort berechnet werden auf Grund der Formeln (18.). So z. B. wird die x-Componente dieser Wirkung den Werth haben:

$$(21.)\quad (X) = AJ(N Dy - M Dz),$$

wo L, M, N die Bedeutungen besitzen [vgl. Seite 291 (4.)]:

$$(22.)\quad L = A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \quad M = A\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \quad N = A\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Dabei aber sind alsdann die Integrale

$$F = \int \frac{J_1 Dx_1}{r}, \qquad G = \int \frac{J_1 Dy_1}{r}, \qquad H = \int \frac{J_1 Dz_1}{r}$$

ausgedehnt zu denken über die Elemente all' jener den ganzen Körper constituirenden Stromringe. Für jedes solches Element ist übrigens [vgl. Seite 66 (12.)]:

$$u_1 D\tau_1 = J_1 Dx_1, \quad v_1 D\tau_1 = J_1 Dy_1, \quad w_1 D\tau_1 = J_1 Dz_1;$$

so dass man also die Integrale F, G, H auch so schreiben kann:

$$(23.) \quad F = \int \frac{u_1 D\tau_1}{r}, \quad G = \int \frac{v_1 D\tau_1}{r}, \quad H = \int \frac{w_1 D\tau_1}{r}.$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz. — *In einem Körper M_1 seien irgend welche elektrische Strömungen u_1, v_1, w_1 vorhanden, die den annularen Bedingungen entsprechen [vgl. Seite 235 Satz und Zusatz]. Ferner seien für irgend einen Punkt (x, y, z) die Integrale gebildet:*

$$(24.) \quad F = \int \frac{u_1 D\tau_1}{r}, \quad G = \int \frac{v_1 D\tau_1}{r}, \quad H = \int \frac{w_1 D\tau_1}{r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1; dabei soll r den Abstand eines solchen Elementes $D\tau_1$ vom Punkte (x, y, z) vorstellen. Ueberdies seien gebildet die Ausdrücke:

$$(25.) \quad L = A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \quad M = A\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \quad N = A\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Hier ist A die Constante des F. Neumann'schen Potentials [Seite 57], oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Constante des Ampère'schen Gesetzes [Seite 168].

Denkt man sich nun im Punkte (x, y, z) ein lineares Stromelement $JDs(Dx, Dy, Dz)$, so werden die vom Körper M_1 auf dieses Stromelement ausgeübten ponderomotorischen Kräfte (X), (Y), (Z) folgende Werthe haben:

$$(26.) \quad \begin{aligned} (X) &= AJ(NDy - MDz), \\ (Y) &= AJ(LDz - NDx), \\ (Z) &= AJ(MDx - LDy). \end{aligned}$$

Zusatz. — *Vertauscht man dieses lineare Stromelement mit einem körperlichen Stromelement $D\tau(u, v, w)$, so werden die Kräfte (26.) folgende Gestalt erhalten:*

$$(27.) \quad \begin{aligned} (X) &= A(Nv - Mw)D\tau, \\ (Y) &= A(Lw - Nu)D\tau, \\ (Z) &= A(Mu - Lv)D\tau. \end{aligned}$$

Beweis des Zusatzes. — Das lineare Stromelement JDs ist ein Prisma von der Länge Ds und von unendlich kleinem Querschnitt q. Bezeichnet man nun das Volumen qDs dieses Prismas mit $D\tau$, und die Componenten der in ihm vorhandenen elektrischen Strömung $i = \frac{J}{q}$ mit u v, w, so ist nach Seite 66 (12.):

$$JDx = uD\tau, \quad JDy = vD\tau, \quad JDz = wD\tau;$$

wodurch die erste der Formeln (26.) übergeht in:

$$(X) = A(Nv - Mw)\,D\tau.$$

Hiemit sind die Formeln (27.) für den *speciellen Fall* bewiesen, dass das betrachtete körperliche Stromelement ein der elektrischen Strömung paralleles Prisma ist. Sollte nun aber das gegebene körperliche Stromelement *$D\tau$ von ganz beliebiger Gestalt* (etwa eine kleine Kugel oder ein kleines Tetraeder sein), so wird man dasselbe stets in Elemente zweiter Ordnung, und zwar in Prismata zerlegen können, die parallel sind mit der in $D\tau$ vorhandenen Strömungsrichtung. U. s. w.

§ 5.

Ueber die ponderomotorischen Wirkungen, welche ein Magnetpol auf ein Stromelement, und umgekehrt ein Stromelement auf einen Magnetpol ausübt.

Es soll zunächst irgend ein *Solenoid* $\alpha_1\beta_1$ betrachtet, und die ponderomotorische Einwirkung dieses Solenoids auf ein Stromelement JDs näher untersucht werden. Dabei mögen Stromstärke, Querschnitt und Dichtigkeit des Solenoids $\alpha_1\beta_1$ respective mit J_1, λ_1 und δ_1 bezeichnet sein; so dass also die Intensitäten der beiden Solenoidpole folgende Werthe haben [vgl. den ersten Theil dieses Werkes, Seite 252]:

$$(1.)\quad \begin{cases} (\text{Intensität von } \alpha_1) = -\mu_1 = -AJ_1\lambda_1\delta_1, \\ (\text{Intensität von } \beta_1) = +\mu_1 = +AJ_1\lambda_1\delta_1. \end{cases}$$

Bezeichnet man die von α_1 nach β_1 gehende Axe des Solenoids mit ν_1, und ein Element dieser Axe mit $D\nu_1$, so werden auf dieses Element $D\nu_1$ im Ganzen $\delta_1 D\nu_1$ Windungen kommen. Bezeichnet man nun ferner die x-Componente der von diesen $\delta_1 D\nu_1$ Windungen auf das gegebene Stromelement JDs ausgeübten ponderomotorischen Kraft mit $X^{\delta_1 D\nu_1}$, so wird offenbar $X^{\delta_1 D\nu_1}$ identisch sein mit dem Ausdruck (20.) Seite 295, derselbe noch multiplicirt gedacht mit der Zahl $\delta_1 D\nu_1$. Somit ergiebt sich:

$$(2.)\quad X^{\delta_1 D\nu_1} = -AJ\cdot[AJ_1\lambda_1\delta_1]\,\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}Dy - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}Dz\right)D\nu_1,$$

wofür man mit Rücksicht auf (1.) auch schreiben kann:

$$(3.)\quad X^{\delta_1 D\nu_1} = -AJ\mu_1\cdot\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}Dy - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}Dz\right)D\nu_1.$$

Versteht man also unter $X^{\alpha_1\beta_1}$ die x-Componente der vom *ganzen Solenoid* $\alpha_1\beta_1$ auf JDs ausgeübten ponderomotorischen Kraft, so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad X^{\alpha_1\beta_1} = -AJ\mu_1 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\partial}{\partial \nu_1}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz\right) D\nu_1,$$

oder was dasselbe ist:

$$(5.)\quad X^{\alpha_1\beta_1} = -AJ\mu_1 \left\{\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz\right)_{\beta_1} - \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz\right)_{\alpha_1}\right\}.$$

Die ponderomotorische Wirkung des Solenoids $\alpha_1\beta_1$ auf das Element JDs besteht also aus zwei Theilen, von denen der eine von β_1, der andre von α_1 auszugehen scheint. Liegt der Pol α_1 im Unendlichen, so verschwindet der letztere Theil. Und man kann daher in diesem Fall den übrig bleibenden Theil

$$-AJ\mu_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz\right)_{\beta_1}$$

kurzweg als die ponderomotorische Wirkung des Solenoidpols β_1 bezeichnen, dessen Intensität [vgl. (1.)] den Werth μ_1 hat; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Satz. — *Die Componenten $X^{\mu_1}_{JDs}$, $Y^{\mu_1}_{JDs}$, $Z^{\mu_1}_{JDs}$ derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche ein gegebener Solenoidpol von der Intensität μ_1 auf ein einzelnes Stromelement JDs ausübt, haben folgende Werthe:*

$$(6.)\qquad \begin{cases} X^{\mu_1}_{JDs} = -AJ\mu_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz\right), \\ Y^{\mu_1}_{JDs} = -AJ\mu_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} Dz - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dx\right), \\ Z^{\mu_1}_{JDs} = -AJ\mu_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} Dy\right); \end{cases}$$

und zwar liegt der Angriffspunkt dieser Kraft im sollicitirten Object, d. i. im Elemente JDs.

Dabei bezeichnen x, y, z und Dx, Dy, Dz die Coordinaten und die Componenten des Elementes Ds. Ferner bezeichnet r den Abstand des Elementes Ds vom Pole μ_1.

Bezeichnung. — *Ein solcher Solenoidpol von der Intensität μ_1 wird häufig ein magnetischer Massenpunkt oder ein Magnetpol von der Masse μ_1 genannt.* In Wirklichkeit aber hat man an der Vorstellung festzuhalten, dass ein solcher Pol μ_1 nichts Andres ist, als ein in unendlicher Ferne beginnendes und in μ_1 endigendes Solenoid; so dass

also z. B. die Ausdrücke (6.) diejenige Kraft vorstellen, welche dieses ganze Solenoid auf das gegebene Stromelement JDs ausübt.

Die Kräfte, welche zwischen JDs und zwischen den einzelnen Elementen $J_1 Ds_1$ des soeben genannten Solenoids stattfinden, entsprechen dem Ampère'schen Gesetz und sind also sogenannte *Centralkräfte.* Wenn daher dieses Solenoid in seiner Gesammtheit auf das Element JDs eine gewisse Kraft (6.) ausübt, deren Angriffspunkt in JDs liegt, so wird offenbar die umgekehrt vom Elemente JDs auf das Solenoid ausgeübte Kraft jener ersten Kraft *entgegengesetzt* sein, und *denselben Angriffspunkt* wie jene besitzen. Demgemäss gelangt man, auf Grund der Formeln (6.), zu folgendem Resultat:

Biot-Savart'sches Gesetz. — *Es sei gegeben ein im Unendlichen anfangendes und im Pole μ_1 endigendes Solenoid. Ferner seien $X_{\mu_1}^{JDs}$, $Y_{\mu_1}^{JDs}$, $Z_{\mu_1}^{JDs}$ die Componenten der auf dieses Solenoid von irgend einem elektrischen Stromelement JDs ausgeübten ponderomotorischen Kraft. Alsdann werden diese Componenten folgende Werthe haben:*

$$(7.) \qquad \begin{cases} X_{\mu_1}^{JDs} = + AJ\mu_1 \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz \right), \\[2ex] Y_{\mu_1}^{JDs} = + AJ\mu_1 \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} Dz - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dx \right), \\[2ex] Z_{\mu_1}^{JDs} = + AJ\mu_1 \left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dx - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} Dy \right); \end{cases}$$

und zwar wird der Angriffspunkt dieser Kraft (7.) *im Elemente JDs liegen, oder (anschaulicher ausgedrückt) in einem Punkte liegen, der dem Element JDs unendlich nahe liegt, und der mit jenem Solenoid durch irgend welchen starren Arm verbunden zu denken ist. Dabei sind in den Formeln* (7.) *die Bedeutungen der einzelnen Buchstaben genau dieselben wie früher in* (6.).

Uebrigens wird man die Kraft (7.) *kurzweg als die vom Elemente JDs auf den Pol μ_1 ausgeübte Kraft bezeichnen können. Denn unter einem solchen Pol μ_1 ist stets ein im Unendlichen beginnendes und in μ_1 endigendes Solenoid zu verstehen.*

Unangenehm ist es, dass diese auf μ_1 ausgeübte Kraft (7.) ihren Angriffspunkt an einer *andern* Stelle, nämlich nicht in μ_1 selber, sondern in unmittelbarer Nähe des Elementes JDs hat*). Diesen Uebelstand

*) Uebrigens ist diese Unannehmlichkeit bei dem Biot-Savart'schen Gesetz nur dann vorhanden, wenn man dasselbe, wie hier geschehen ist, aus der Ampère-schen Theorie ableitet. Wollte man nämlich das Gesetz in seiner *ursprünglichen*

kann man in bekannter Weise beseitigen durch Verlegung der Kraft und Hinzufügung eines geeigneten Drehungsmomentes. Man erhält in solcher Weise an Stelle der Kraft (7.): *erstens* eine in μ_1 selber angreifende Kraft, deren Componenten X, Y, Z mit den Componenten (7.) identisch sind:

$$(8.)\quad \begin{cases} X = +AJ\mu_1\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}Dy - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}Dz\right), \\ Y = +AJ\mu_1\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}Dz - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}Dx\right), \\ Z = +AJ\mu_1\left(\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}Dx - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}Dy\right), \end{cases}$$

und *zweitens* ein den Pol μ_1 erfassendes Drehungsmoment, dessen Componenten Δ^x, Δ^y, Δ^z die Werthe haben:

$$(9.)\quad \begin{cases} \Delta^x = (y-y_1)Z - (z-z_1)Y, \\ \Delta^y = (z-z_1)X - (x-x_1)Z, \\ \Delta^z = (x-x_1)Y - (y-y_1)X, \end{cases}$$

wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Poles μ_1 sind, während x, y, z (nach wie vor) die Coordinaten des Elementes JDs vorstellen; dabei haben X, Y, Z die in (8.) angegebenen Werthe, — Werthe, die man offenbar auch so schreiben kann:

$$X = +AJ\mu_1\frac{(y-y_1)Dz-(z-z_1)Dy}{r^3},$$

$$Y = +AJ\mu_1\frac{(z-z_1)Dx-(x-x_1)Dz}{r^3},$$

$$Z = +AJ\mu_1\frac{(x-x_1)Dy-(y-y_1)Dx}{r^3}.$$

Substituirt man diese Werthe in der ersten Formel (9.), so erhält man sofort:

$$\Delta^x = AJ\mu_1\frac{(x-x_1)[(x-x_1)Dx+(y-y_1)Dy+(z-z_1)Dz]-r^2Dx}{r^3};$$

denn es ist zu beachten, dass $r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$ ist. Dieser Ausdruck für Δ^x ist auch so darstellbar:

$$\Delta^x = AJ\mu_1\left\{\left(\frac{(x-x_1)^2}{r^3}-\frac{1}{r}\right)Dx+\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r^3}Dy+\frac{(x-x_1)(z-z_1)}{r^3}Dz\right\},$$

oder auch so:

Gestalt nehmen, wie es von Biot und Savart selber aufgestellt wurde, so würde man zu sagen haben, dass die in Rede stehende Kraft ihren Angriffspunkt direct im Pole selber hat.

$$(10.)\qquad \Delta^x = AJ\mu_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial r}{\partial x} Dx + \frac{\partial r}{\partial y} Dy + \frac{\partial r}{\partial z} Dz\right);$$

so dass man also schliesslich, auf Grund der Formeln (8.) und (10.) zu folgendem Resultat gelangt:

Das Biot-Savart'sche Gesetz in etwas anderer Gestalt. — *Die von einem elektrischen Stromelement $JDs(x, y, z)$ auf einen Magnetpol $\mu_1(x_1, y_1, z_1)$ ausgeübte ponderomotorische Einwirkung besteht aus zwei Theilen, nämlich erstens aus einer direct den Pol erfassenden Kraft X, Y, Z, und zweitens aus einem auf diesen Pol ausgeübten Drehungsmoment Δ^x, Δ^y, Δ^z. Und zwar gelten für jene Kraft und für dieses Drehungsmoment folgende Formeln:*

$$(11.)\qquad X = + AJ\mu_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz\right), \text{ etc. etc.},$$

$$(12.)\qquad \Delta^x = + AJ\mu_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial r}{\partial x} Dx + \frac{\partial r}{\partial y} Dy + \frac{\partial r}{\partial z} Dz\right), \text{ etc. etc.}$$

Oder in etwas anderer Bezeichnungsweise*): *Die von einem Stromelement $J_1 Ds_1(x_1, y_1, z_1)$ auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ ausgeübte ponderomotorische Einwirkung besteht aus zwei Theilen, nämlich erstens aus einer direct den Pol erfassenden Kraft (X, Y, Z), und zweitens aus einem auf den Pol ausgeübten Drehungsmoment (Δ^x, Δ^y, Δ^z). Und zwar gelten für jene Kraft und für dieses Drehungsmoment die Formeln:*

$$(13.)\qquad X = + A\mu J_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} Dy_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} Dz_1\right), \text{ etc. etc.},$$

$$(14.)\qquad \Delta^x = + A\mu J_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x_1} Dx_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} Dy_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} Dz_1\right), \text{ etc. etc.},$$

wo $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ ist.

§ 6.

Ueber die ponderomotorischen Wirkungen, welche ein geschlossener Strom oder ein Solenoid auf einen Magnetpol ausübt.

Es ist offenbar:

$$(15.)\qquad \frac{\partial r}{\partial x_1} Dx_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} Dy_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} Ds_1 = \frac{\partial r}{\partial s_1} Ds_1,$$

falls nämlich [ebenso wie in (13.), (14.)] Dx_1, Dy_1, Dz_1 die Componenten des Elementes Ds_1 vorstellen. Folglich wird das über alle

*) Es sollen nämlich hier, was für das Folgende zweckmässig ist, die Bezeichnungen $JDs(x, y, z)$, $\mu_1(x_1, y_1, z_1)$ ersetzt werden durch $J_1 Ds_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mu(x, y, z)$.

Elemente Ds_1 einer *geschlossenen* Curve hinerstreckte Integral des Ausdrucks (15.) gleich *Null* sein. Und man gelangt daher, auf Grund der Formeln (13.), (14.), zu folgendem Satz:

Satz. — *Es sei gegeben ein geschlossener linearer Strom, dessen Stärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist. Alsdann wird die ponderomotorische Wirkung des Stromes auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ aus einer direct den Pol erfassenden Kraft (X, Y, Z) bestehen (ohne dass zu dieser noch irgend ein Drehungsmoment hinzutritt). Und zwar wird z. B. für die Componente X die Formel gelten:*

$$X = A\mu J_1 \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} Dy_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} Dz_1 \right), \tag{16.}$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente $Ds_1 (Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ des Stromes; dabei bezeichnet r den Abstand eines solchen Elementes vom Pole μ.

Zusatz. — *Die Formel* (16.) *ist auch so darstellbar:*

$$X = - A\mu J_1 \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} D\omega_1, \tag{17.}$$

oder auch so:

$$X = - A\mu J_1 \frac{\partial}{\partial x} \sum (\varepsilon \varkappa), \quad \textit{resp.} = - A\mu J_1 \cdot \varepsilon \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x}, \tag{18.}$$

wo $D\omega_1$, ν_1 und ε, $\varkappa$, K genau dieselben Bedeutungen haben wie früher auf Seite 291, 292. Der letzte der Ausdrücke (18.) *wird z. B. dann anwendbar sein, wenn die Stromcurve mit all' ihren Punkten in ein und derselben Ebene liegt.*

Denkt man sich also einen ebenen linearen Stromring, dessen Stärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist, so werden für die von diesem Ringe auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ ausgeübte ponderomotorische Kraft (X, Y, Z) folgende Formeln gelten:

$$\begin{cases} X = - A\mu J_1 \cdot \varepsilon \dfrac{\partial \mathsf{K}}{\partial x}, \\ Y = - A\mu J_1 \cdot \varepsilon \dfrac{\partial \mathsf{K}}{\partial y}, \\ Z = - A\mu J_1 \cdot \varepsilon \dfrac{\partial \mathsf{K}}{\partial z}, \end{cases} \tag{18a.}$$

wo K die Oeffnung des von μ nach dem Ringe J_1 gelegten Kegels vorstellt, und wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der Pol μ auf der positiven oder negativen Seite der von J_1 umgrenzten ebenen Fläche liegt. Dies ist der berühmte F. Neumann'sche Satz. Vgl. F. Neumann: Vorl. üb. elektrische Ströme, herausgegeben von Von der Mühll, Leipzig bei Teubner, 1884, Seite 164.

Beweis des Zusatzes. — Vergleicht man miteinander die Werthe, welche auf Seite 291 in (5.), (7.), (8.), (8a.) für L aufgestellt worden sind, so erhält man:

$$(g.)\quad \int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}Dy_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}Dz_1\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \nu_1}D\omega_1=-\frac{\partial}{\partial x}\sum(\varepsilon\varkappa),$$

$$(h.)\quad \text{resp.} = -\varepsilon\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x}.$$

Hiedurch aber verwandelt sich in der That die Formel (16.) in (17.) und in (18.). — *Q. e. d.*

Wir gehen über zur Betrachtung eines Solenoids $\alpha_1\beta_1$, indem wir Stromstärke, Querschnitt und Dichtigkeit des Solenoids mit J_1, λ_1 und δ_1 bezeichnen; so dass also die Intensitäten der beiden Pole die Werthe haben [vgl. Seite 297 (1.)]:

$$(19.)\quad \begin{cases}(\text{Intensität des Poles } \alpha_1)=-\mu_1=-AJ_1\lambda_1\delta_1,\\ (\text{Intensität des Poles } \beta_1)=+\mu_1=+AJ_1\lambda_1\delta_1.\end{cases}$$

Ferner sei ν_1 die von α_1 nach β_1 gehende Axe des Solenoids, und $D\nu_1$ ein Element derselben. Das diesem Axenelement $D\nu_1$ entsprechende *Solenoidelement* hat alsdann $\delta_1 D\nu_1$ Windungen. Bezeichnet man nun die Componenten der von *einer* solchen Windung auf irgend einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ ausgeübten ponderomotorischen Wirkung kurzweg mit X, Y, Z, so ist nach (17.):

$$(20.)\quad X=-A\mu J_1\lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}.$$

Die von jenem *Solenoidelement*, d. i. von jenen $\delta_1 D\nu_1$ Windungen ausgeübte Wirkung, oder vielmehr die x-Componente dieser Wirkung — sie mag $X^{\delta_1 D\nu_1}$ heissen — wird nun offenbar dadurch erhalten werden, dass man den Ausdruck (20.) mit $\delta_1 D\nu_1$ multiplicirt. Somit ergiebt sich:

$$(21.)\quad X^{\delta_1 D\nu_1}=-\mu[AJ_1\lambda_1\delta_1]\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}D\nu_1;$$

wofür man, mit Rücksicht auf (19.), auch schreiben kann:

$$(22.)\quad X^{\delta_1 D\nu_1}=-\mu\mu_1\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu_1}D\nu_1.$$

Versteht man also unter $X^{\alpha_1\beta_1}$ die x-Componente der vom *ganzen Solenoid* $\alpha_1\beta_1$ auf den Pol $\mu(x, y, z)$ ausgeübten Kraft, so ergiebt sich:

$$(23.)\qquad X^{\alpha_1\beta_1} = -\mu\mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} D\nu_1 = -\mu\mu_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varsigma} - \frac{1}{\varrho}\right),$$

oder, falls man den constanten Factor μ_1 unter das Differentiationszeichen bringt:

$$(24.)\qquad X^{\alpha_1\beta_1} = -\mu \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(+\mu_1)}{\varsigma} + \frac{(-\mu_1)}{\varrho}\right],$$

wo ϱ und ς die Abstände der beiden Solenoidpole α_1 und β_1 vom Magnetpol $\mu(x, y, z)$ vorstellen. Der in (24.) in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck wird offenbar, falls man die Grössen $(+\mu_1)$ und $(-\mu_1)$ als Massenpunkte sich denkt, die Gestalt eines Potentials haben; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Satz. — *Ein Solenoid ist, was seine ponderomotorische Wirkung auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ betrifft, ersetzbar durch zwei magnetische Massenpunkte. Diese magnetischen Massenpunkte sind in den beiden Polen des Solenoids anzubringen, und ebenso gross zu denken, wie die Intensitäten der beiden Pole.* Dass dieser Satz mit der auf Seite 298 eingeführten Bezeichnung gut harmonirt, bedarf kaum der Erwähnung.

Wir wollen jetzt das betrachtete Solenoid *geradlinig* uns denken, als einen dünnen Cylinder, der in α_1 und β_1 von zwei Endflächen oder Polflächen begrenzt ist. Auch wollen wir die das Solenoid ersetzenden magnetischen Massen $(-\mu_1)$ und $(+\mu_1)$ auf diesen beiden Polflächen *in gleichmässiger Weise ausgebreitet* uns vorstellen. Nach (23.) oder (24.) ist:

$$(25.)\qquad X^{\alpha_1\beta_1} = -\mu \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_1\left(\frac{1}{\varsigma} - \frac{1}{\varrho}\right)\right],$$

wo $\varrho = (\mu\alpha_1)$ und $\varsigma = (\mu\beta_1)$ ist. Setzt man nun die Axe $(\alpha_1\beta_1) = \varepsilon_1$, bezeichnet man ferner den Mittelpunkt dieser Axe mit o_1, setzt man überdies $r = (\mu o_1)$, und nimmt man endlich an, die Axenlänge ε_1 sei *äusserst klein*, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\varsigma} = \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} - \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1},$$

und hieraus durch Subtraction:

$$\frac{1}{\varsigma} - \frac{1}{\varrho} = \varepsilon_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1},$$

wo ν_1, ebenso wie bisher, die Axenrichtung $\alpha_1 \longrightarrow \beta_1$ vorstellt. Demgemäss geht die Formel (25.) über in:

$$(26.)\qquad X^{\alpha_1\beta_1} = -\mu \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu_1 \varepsilon_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\right];$$

wobei zu bemerken ist, dass man das hier auftretende Product $\mu_1 \varepsilon_1$ das *magnetische Moment des Solenoids* zu nennen pflegt. Nun ist nach (19.):

$$\mu_1 \varepsilon_1 = A J_1 \lambda_1 \delta_1 \varepsilon_1.$$

δ_1 ist aber die Dichtigkeit des Solenoids. Folglich ist $\delta_1 D\nu_1$ die Anzahl der auf das Axenelement $D\nu_1$ fallenden Windungen. Und hieraus ergiebt sich sofort, dass $\delta_1 \varepsilon_1$ die Anzahl *aller* Windungen vorstellt, die das Solenoid überhaupt besitzt. Bezeichnet man diese Anzahl mit N_1, so ist also

$$\mu_1 \varepsilon_1 = A J_1 \lambda_1 N_1.$$

Hiedurch geht die Formel (26.) über in:

$$\text{(27.)} \qquad X^{\alpha_1 \beta_1} = -\mu \frac{\partial}{\partial x}\left[A J_1 \lambda_1 N_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\right].$$

Setzt man endlich jene Anzahl $N_1 = 1$, so ergiebt sich:

$$\text{(28.)} \qquad X^{\alpha_1 \beta_1} = -\mu \frac{\partial}{\partial x}\left[A J_1 \lambda_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1}\right];$$

was identisch ist mit (20.), wie *a priori* zu erwarten stand.

Ein Solenoid ist, wie vorhin [auf Seite 304] bemerkt wurde, in seiner Einwirkung auf Magnetpole ersetzbar durch gewisse magnetische Belegungen seiner beiden Polflächen. Gleiches wird daher auch gelten von dem soeben betrachteten Specialfall, d. i. von einem einzelnen kleinen Stromringe. *Ein solcher kleiner Stromring wird also ersetzbar sein durch eine magnetische Doppelbelegung seiner Stromfläche.* Und Gleiches wird daher auch gelten für einen Stromring von beliebig grossen Dimensionen; wie solches in bekannter Weise [durch die Methode der Zerlegung in unendlich kleine Ströme] sich leicht ergiebt. Also:

Satz. — *Ein geschlossener elektrischer Strom ist, was seine ponderomotorische Wirkung auf Magnetpole anbetrifft, ersetzbar durch eine magnetische Doppelfläche. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Stärke des Stromes in dem betrachteten Augenblick an allen Stellen des Stromes ein und dieselbe ist.*

Endlich sei noch folgender Satz hinzugefügt, der schon im ersten Theil dieses Werkes [Seite 254] bewiesen wurde:

Satz. — *Die gegenseitigen ponderomotorischen Einwirkungen zwischen irgend welchen Solenoid- oder Magnetpolen finden statt nach dem Newton-schen Gesetz. Sind nämlich μ und μ_1 die Intensitäten oder Massen zweier solcher Pole, so wird die Kraft R, mit der diese beiden Pole einander abstossen, den Werth haben: $R = \frac{\mu \mu_1}{r^2}$, wo r die Entfernung bezeichnet.*

§ 7.

Ueber die ponderomotorischen Wirkungen eines annularen Stromsystems.

Die von einem *linearen* Stromelement $J_1 Ds_1(x_1, y_1, z_1)$ auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ ausgeübte ponderomotorische Einwirkung besteht im Allgemeinen aus zwei Theilen, nämlich erstens aus einer *direct* den Pol erfassenden Kraft (X, Y, Z), und zweitens aus einem auf den Pol ausgeübten Drehungsmoment $(\Delta^x, \Delta^y, \Delta^z)$. Und zwar gelten für jene Kraft und für dieses Drehungsmoment die Formeln:

$$X = + A\mu J_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy_1 \right), \tag{1.}$$

$$\Delta^x = + A\mu J_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} Dx_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} Dy_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} Dz_1 \right), \tag{2.}$$

wo $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$ ist. — So lautet der auf Seite 301 in (13.), (14.) aufgestellte Satz; wobei allerdings der damaligen Formel (13.) eine etwas andere Gestalt gegeben ist.

Statt des *linearen* Stromelementes $J_1 Ds_1$ kann man nun ein *körperliches* Stromelement $D\tau_1(u_1, v_1, w_1)$ nehmen; indem man dabei von genau derselben Methode Gebrauch macht, die früher auf Seite 296 [beim Beweise des dortigen Zusatzes] benutzt wurde. Man findet alsdann, dass die vom *körperlichen* Stromelement $D\tau_1(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1)$ auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ ausgeübte ponderomotorische Wirkung *erstens* aus einer direct den Pol erfassenden Kraft (X, Y, Z):

$$X = + A\mu \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} w_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} v_1 \right) D\tau_1, \tag{3.}$$

und *zweitens* aus einem auf den Pol ausgeübten Drehungsmoment $(\Delta^x, \Delta^y, \Delta^z)$ besteht:

$$\Delta^x = + A\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1} w_1 \right) D\tau_1. \tag{4.}$$

Denkt man sich nun in einem *Körper* M_1 ein ganz beliebiges System elektrischer Strömungen, so werden offenbar für die von diesem Körper M_1 auf einen Magnetpol $\mu(x, y, z)$ ausgeübte ponderomotorische Wirkung Formeln gelten, die mit den Formeln (3.), (4.) analog sind, und die aus diesen durch Integration über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1 entstehen. Die in Rede stehenden neuen Formeln werden also lauten:

(5.) $$X = A\mu\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w_1 D\tau_1}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v_1 D\tau_1}{r}\right),$$

(6.) $$\Delta^x = A\mu\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1}v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1}w_1\right)D\tau_1.$$

Hiefür kann man schreiben:

(7.) $$X = A\mu\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right),$$

(8.) $$\Delta^x = A\mu\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

wo alsdann unter F, G, H folgende Integrale zu verstehen sind:

(9.) $$F = \int\frac{u_1 D\tau_1}{r}, \quad G = \int\frac{v_1 D\tau_1}{r}, \quad H = \int\frac{w_1 D\tau_1}{r},$$

(10.) $$\Omega = \int\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial r}{\partial y_1}v_1 + \frac{\partial r}{\partial z_1}w_1\right)D\tau_1.$$

Dieses letzte Integral Ω ist übrigens, auf Grund des Satzes (L.) Seite 212, auch so darstellbar:

(10a.) $$\Omega = -\int r\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdot\cdot\right)D\tau_1 - \int r[u_1\cos(n_1, x) + \cdots]\,Do_1,$$

wo Do_1 und n_1 die aus jenem Satz ersichtlichen Bedeutungen haben. Demgemäss gelangt man, mittelst der Formeln (7.), (8.) und (9.), (10a.), zu folgendem Resultat:

Satz. — *In einem Körper M_1 seien irgend welche elektrische Strömungen u_1, v_1, w_1 vorhanden. Ferner sei gegeben ein Magnetpol $\mu(x, y, z)$.*

Man denke sich nun für den Körper M_1 und den Pol $\mu(x, y, z)$ die Integrale gebildet:

(11.) $$F = \int\frac{u_1 D\tau_1}{r}, \quad G = \int\frac{v_1 D\tau_1}{r}, \quad H = \int\frac{w_1 D\tau_1}{r},$$

sowie auch folgenden Ausdruck:

(12.) $$\Omega = -\int r\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)D\tau_1$$
$$-\int r[u_1\cos(n_1, x) + v_1\cos(n_1, y) + w_1\cos(n_1, z)]\,Do_1;$$

und zwar denke man sich in diesen Formeln (11.), (12.) *die Integrationen ausgedehnt über alle Volumelemente $D\tau_1$, respective über alle Oberflächenelemente Do_1 des Körpers M_1. Dabei soll r der Abstand eines solchen Elementes $D\tau_1$ oder Do_1 vom Pole $\mu(x, y, z)$, und n_1 die auf Do_1 errichtete innere Normale sein.*

Alsdann wird die vom Körper M_1 auf den Pol $\mu(x, y, z)$ ausgeübte ponderomotorische Einwirkung aus zwei Theilen bestehen, nämlich erstens

aus einer direct den Pol erfassenden Kraft (X, Y, Z), *und zweitens aus einem auf den Pol ausgeübten Drehungsmoment* $(\Delta^x, \Delta^y, \Delta^z)$. *Und zwar werden für jene Kraft und für dieses Drehungsmoment folgende Formeln gelten:*

$$(13.)\quad \begin{cases} X = A\mu\left(\dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}\right), \\ Y = A\mu\left(\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}\right), \\ Z = A\mu\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\right), \end{cases} \qquad (14.)\quad \begin{cases} \Delta^x = A\mu\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \Delta^y = A\mu\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \Delta^z = A\mu\,\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{cases}$$

Uebrigens kann man, falls es beliebt, die Ausdrücke (11.) *auch so schreiben:*

$$(f.)\qquad F = \int \frac{J_1\,Dx_1}{r}, \qquad G = \int \frac{J_1\,Dy_1}{r}, \qquad H = \int \frac{J_1\,Dz_1}{r};$$

wie solches aus den Betrachtungen auf Seite 296 [im Beweise des Zusatzes] sich leicht ergiebt. Folglich sind die gegenwärtigen F, G, H in voller Uebereinstimmung mit den früher [Seite 290 (1.)] *in Anwendung gebrachten F, G, H.*

Ist nun insbesondre das im Körper M_1 enthaltene Stromsystem ein *annulares* [vgl. Seite 235, Satz, Zusatz u. Note], so wird offenbar der Ausdruck Ω (12.) verschwinden. Folglich werden alsdann die Ausdrücke Δ^x, Δ^y, Δ^z (14.) ebenfalls verschwinden. Demgemäss gelangt man zu folgendem

Satz. — *In einem Körper M_1 sei ein annulares Stromsystem u_1, v_1, w_1 vorhanden. Ueberdies sei gegeben irgend ein Magnetpol $\mu(x, y, z)$.*

Man denke sich nun für den Körper M_1 und den Pol $\mu(x, y, z)$ die Integrale gebildet:

$$(15.)\qquad F = \int \frac{u_1\,D\tau_1}{r}, \quad G = \int \frac{v_1\,D\tau_1}{r}, \quad H = \int \frac{w_1\,D\tau_1}{r},$$

sowie auch die Ausdrücke:

$$(16.)\quad L = A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \quad M = A\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \quad N = A\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Und zwar sollen die Integrationen in (15.) *ausgedehnt sein über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1; dabei soll r der Abstand eines solchen Elementes $D\tau_1$ vom Pole $\mu(x, y, z)$ sein.*

Alsdann wird die ponderomotorische Einwirkung des Körpers M_1 auf den Magnetpol $\mu(x, y, z)$ aus einer direct den Pol erfassenden Kraft X, Y, Z bestehen (ohne dass zu dieser noch irgend welches Drehungsmoment hinzutritt). Und zwar werden die Componenten dieser Kraft die Werthe haben [vgl. (13.)]:

$$(17.)\qquad X = \mu L, \qquad Y = \mu M, \qquad Z = \mu N.$$

Zusatz. — *Denkt man sich, statt des Magnetpoles μ, ein elektrisches Stromelement $D\tau(u, v, w)$ an den Ort (x, y, z) gebracht, so wird die vom Körper M_1 auf dieses Stromelement ausgeübte ponderomotorische Kraft (X), (Y), (Z) ebenfalls in einfacher Weise ausdrückbar sein mittelst der Grössen L, M, N. Es werden nämlich die Componenten dieser Kraft die Werthe haben:*

$$(18.)\qquad \begin{aligned}(X) &= A(Nv - Mw)\,D\tau,\\ (Y) &= A(Lw - Nu)\,D\tau,\\ (Z) &= A(Mu - Lv)\,D\tau;\end{aligned}$$

wie solches aus Seite 296 (27.) *sofort sich ergiebt.*

Substituirt man in der ersten dieser Formeln (18.) *für M, N die Werthe* (16.), *so erhält man sofort:*

$$(19.)\qquad (X) = A^2\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)v + \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right)w\right]D\tau,$$

eine Formel, von welcher späterhin Gebrauch zu machen ist.

Bemerkung. — Die vorstehenden Sätze werden, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, mit wirklicher Sicherheit nur dann anwendbar sein, wenn das sollicitirte Object (d. i. der Pol μ, respective das Stromelement $D\tau$) *ausserhalb* des einwirkenden Körpers M_1 liegt. Beschränkt man sich nun auf diesen Fall, und nimmt man überdies an, die Oberfläche des Körpers M_1 sei *einfach zusammenhängend,* so wird man das innerhalb des Körpers M_1 vorhandene annulare Stromsystem, was seine ponderomotorische Einwirkung auf den Magnetpol $\mu(x, y, z)$ betrifft, *ersetzen können durch eine gewisse magnetische Massenvertheilung im Innern des Körpers M_1.*

Solches ergiebt sich aus dem Umstande, dass jenes annulare Stromsystem [vgl. Seite 235 Satz, Zusatz und Note] anzusehen ist als ein System von lauter unendlich dünnen linearen Stromringen, deren Stromstärken blosse Functionen der Zeit sind, ferner aus dem Umstande, dass jeder solcher Ring in seiner Einwirkung auf den Pol $\mu(x, y, z)$ ersetzbar ist durch eine gewisse magnetische Doppelfläche [Seite 305], und endlich aus dem Umstande, dass jede solche magnetische Doppelfläche, weil die Oberfläche des Körpers M_1 einfach zusammenhängen soll, *innerhalb* dieses Körpers gedacht werden kann. [Vgl. übrigens C. Neumann: „Beiträge zu einzelnen Theilen der Math. Physik, Leipzig bei Teubner, 1893, Seite 128—130].

Die in Rede stehende magnetische Massenvertheilung wird nun also auf den Magnetpol $\mu(x, y, z)$ Kräfte ausüben, welche identisch sind mit den Kräften (17.):

$$(\alpha)\qquad X = \mu L = \mu A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right),\quad Y = \text{etc.},\quad Z = \text{etc.}$$

Bezeichnet man also das Potential jener Massenvertheilung auf den Pol $\mu(x, y, z)$ mit $\mu\Pi$, so werden die Gleichungen stattfinden:

$$(\beta)\qquad \mu A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) = -\,\mu\frac{\partial \Pi}{\partial x},\quad \text{etc., etc.}$$

Schliesslich kann man jene magnetische Massenvertheilung im Verhältniss $1 : AK$ verkleinern; so dass also das Potential P dieser neuen Massenvertheilung $= \frac{\Pi}{AK}$, mithin $\Pi = AKP$ ist; wodurch die Formeln (β.) übergehen in:

$$(\gamma.) \qquad \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = -K\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{etc., etc.}$$

Sucht man das in diesen Formeln (γ.) enthaltene Resultat seines physikalischen Charakters möglichst zu entkleiden, so gelangt man zu folgendem rein mathematischen Satz:

Satz. — *Innerhalb eines Körpers M_1, dessen Oberfläche einfach zusammenhängend ist, seien irgend welche von den Coordinaten abhängende Functionen u_1, v_1, w_1 ausgebreitet. Und zwar mögen diese Functionen den sogenannten annularen Bedingungen, d. i. folgenden beiden Gleichungen entsprechen:*

$$(\delta.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0, \quad (\textit{innerhalb } M_1), \\ u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) = 0, \quad (\textit{an der Oberfl. von } M_1), \end{cases}$$

wo n_1 die auf der Oberfläche errichtete innere Normale sein soll. Ferner mögen mit Bezug auf irgend welchen Raumpunkt (x, y, z) folgende drei Integrale gebildet werden:

$$(\varepsilon.) \qquad F = \int \frac{u_1 D\tau_1}{r}, \quad G = \int \frac{v_1 D\tau_1}{r}, \quad H = \int \frac{w_1 D\tau_1}{r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1; dabei soll r den Abstand eines solchen Elementes $D\tau_1$ vom Punkte (x, y, z) vorstellen.

Alsdann wird man stets im Innern des Körpers M_1 eine Massenvertheilung construiren können von solcher Beschaffenheit, dass das Newton'sche Potential P dieser Massenvertheilung für alle Punkte (x, y, z), die ausserhalb des Körpers M_1 liegen, den Gleichungen entspricht:

$$(\zeta.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z} = -K\dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x} = -K\dfrac{\partial P}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} = -K\dfrac{\partial P}{\partial z}. \end{cases}$$

Dabei ist unter K eine ad libitum gegebene Constante zu verstehen. — Von diesem Satz wird weiterhin Gebrauch gemacht werden.

Vierzehnter Abschnitt.

Ueber die elektromotorischen Kräfte.

Das von uns im achten Abschnitt gefundene elektromotorische Elementargesetz [Seite 174] ist mit einer noch unbekannten Constanten k behaftet, und überhaupt von ziemlich complicirter Beschaffenheit (ausser wenn $k = -1$ gedacht wird). Sehr einfach gestalten sich indessen die aus diesem Gesetz entspringenden Formeln, sobald man voraussetzt, der Inducent sei ein *geschlossener linearer Strom*, *dessen Stärke eine blosse Function der Zeit ist.* [Vgl. den Satz Seite 179]. Insbesondere zeigt sich, dass in diesem speciellen Fall die in jenem Gesetz mit k behafteten Glieder sämmtlich fortfallen.

Der in Rede stehende specielle Fall soll nun im gegenwärtigen Abschnitt einer genaueren Untersuchung unterworfen werden. Sodann aber sollen die Resultate dieser Untersuchung auf den Fall übertragen werden, dass der Inducent durch ein (geschlossenes oder ungeschlossenes) *Solenoid*, oder durch einen *Magnetpol*, oder durch einen beliebig gegebenen *magnetischen Körper* dargestellt ist. Dabei wird sich z. B. zeigen, dass Richtung und Intensität eines gleichförmig magnetischen Feldes in bestimmter Weise als Functionen der Zeit gegeben sein können, und dass trotz dieser Angaben die elektromotorische Wirkung des Feldes noch völlig unbekannt ist. [Vgl. das Theorem, Seite 321].

§ 1.

Die elektromotorische Einwirkung eines geschlossenen linearen Stromes.

Zwei inextensible lineare Leiter M und M_1 seien in beliebigen Bewegungen begriffen. Der lineare Leiter M_1 sei *geschlossen* und von einem elektrischen Strome durchflossen, dessen Stärke J_1 eine *blosse Function der Zeit* ist. Alsdann wird die von diesem geschlossenen Strome J_1 in einem Element Ds des Leiters M in der Richtung Ds hervorgebrachte elektromotorische Kraft ($\mathfrak{E}$) den Werth haben:



$$(1.)\quad (\mathfrak{E}) = -A^2\left\{J_1\int\left(\frac{(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})\,dr}{r^2\,dt} + \frac{\Theta\,d\Theta_1}{r\,dt}\right)Ds_1 + \frac{dJ_1}{dt}\int\left(\frac{\Theta\Theta_1}{r}\right)Ds_1\right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds_1 des Ringes M_1. — So lautet der früher auf Seite 179 gefundene Satz.

Denkt man sich die Ampère'schen Argumente $r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}$ abhängig von s, s_1, t, d. i. von den Bogenlängen und der Zeit, so werden die in (1.) vorhandenen Zuwüchse dr und $d\Theta_1$ die Werthe haben:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial t}\,dt \quad \text{und} \quad d\Theta_1 = \frac{\partial\Theta_1}{\partial t}\,dt.$$

Dies in (1.) substituirt, ergiebt sich:

$$(2.)\quad (\mathfrak{E}) = -A^2\left\{J_1\int\left(\frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\Theta}{r}\,\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}\right)Ds_1 + \frac{dJ_1}{dt}\int\left(\frac{\Theta\Theta_1}{r}\right)Ds_1\right\}.$$

Für jene Ampère'schen Argumente $r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}$ gelten nun aber, weil sie als Functionen von s, s_1, t angesehen werden sollen, die bekannten Gleichungen [Seite 6 (h.)]:

$$\Theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \Theta_1 = -\frac{\partial r}{\partial s_1}, \qquad \frac{\Theta\Theta_1 - \mathsf{E}}{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1};$$

wodurch die Formel (2.) übergeht in:

$$(3.)\quad (\mathfrak{E}) = -A^2\left\{J_1\int\left(\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1}\,\frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s_1}\right)\frac{Ds_1}{r} - \frac{dJ_1}{dt}\int\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s_1}\,\frac{Ds_1}{r}\right\}.$$

An Stelle von r mag jetzt die Quadratwurzel $\psi = \sqrt{r}$ eingeführt werden. Alsdann ist z. B.:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1} - \frac{1}{4r\sqrt{r}}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s_1},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,\frac{\partial r}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial s_1} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s_1} - \frac{1}{4r\sqrt{r}}\,\frac{\partial r}{\partial t}\,\frac{\partial r}{\partial s_1};$$

hieraus ergeben sich sofort die beiden Gleichungen:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial s_1} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s_1} = \frac{1}{4r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial^2 r}{\partial t\,\partial s_1} - \frac{\partial r}{\partial t}\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s_1}\right),$$

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{1}{4r}\,\frac{\partial r}{\partial s}\,\frac{\partial r}{\partial s_1}.$$

Und mittelst dieser Gleichungen (α.), (β.) gewinnt die Formel (3.) die Gestalt:

$$(4.)\quad (\mathfrak{E}) = 4A^2\left\{J_1\int\left[\frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial s_1} - \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial s_1}\right]Ds_1 + \frac{dJ_1}{dt}\int\frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial\psi}{\partial s_1}\,Ds_1\right\}.$$

Der hier in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck ist

$$= 2\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\right).$$

Substituirt man aber dies in (4.), und beachtet man dabei, dass der betrachtete Strom J_1 ein *geschlossener* ist, so erhält man sofort:

$$(5.)\qquad (\mathfrak{E}) = 4A^2\left\{J_1\int 2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial s_1}Ds_1 + \frac{dJ_1}{dt}\int\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial s_1}Ds_1\right\}.$$

Dieses $(\mathfrak{E})$ repräsentirt nun offenbar die der Richtung Ds entsprechende Componente der *in Wirklichkeit* vom Strome J_1 in einem Punkt des Elementes Ds hervorgebrachten elektromotorischen Kraft: $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$; so dass also die Relation stattfindet:

$$(f.)\qquad (\mathfrak{E}) = (\mathfrak{X})A + (\mathfrak{Y})B + (\mathfrak{Z})C,$$

wo A, B, C die Richtungscosinus von Ds vorstellen. Auch ist, falls man einen Punkt des Elementes Ds mit (x, y, z) bezeichnet:

$$(g.)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial x}A + \frac{\partial\psi}{\partial y}B + \frac{\partial\psi}{\partial z}C.$$

Substituirt man diese Werthe (f.), (g.) in (5.), so verwandeln sich, wie man sofort übersieht, beide Seiten der Formel (5.) in homogene lineare Functionen von A, B, C. Und es müssen daher in dieser Formel (5.), weil A, B, C ganz beliebig sind, die Coefficienten von A, B, C einzeln einander gleich sein. Somit gelangt man, was z. B. die Coefficienten von A betrifft, zu folgender Gleichung:

$$(6.)\qquad (\mathfrak{X}) = 4A^2\left\{J_1\int 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial s_1}Ds_1 + \frac{dJ_1}{dt}\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial s_1}Ds_1\right\}.$$

Um die Integrale rechts einer näheren Untersuchung zu unterwerfen, sei zuvörderst bemerkt, dass $\psi = \sqrt{r}$, mithin

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(x-x_1)}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(y-y_1)}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial(z-z_1)}{\partial t}$$

ist. Wir wollen nun aber den linearen Ring M_1 *starr*, und das Axensystem $[x, y, z]$ mit ihm *starr verbunden* uns denken. Alsdann reducirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$(7.)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

wo x, y, z und $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des inducirten Elementes Ds in Bezug auf jenes Axensystem vorstellen. Aus (7.) folgt sofort:

$$(8.)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial s_1} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial s_1}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial s_1}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial s_1}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Multiplicirt man diese Formel (8.) mit $8AJ_1\frac{\partial\psi}{\partial x}Ds_1$, und integrirt, so erhält man sofort:

$$8AJ_1\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial s_1}Ds_1 = \Phi_{xx}\frac{\partial x}{\partial t} + \Phi_{xy}\frac{\partial y}{\partial t} + \Phi_{xz}\frac{\partial z}{\partial t},$$

wo die Φ's die früher [Seite 293 (15.)] angegebenen Bedeutungen haben. Nun ist aber, wie damals [Seite 294 (17.)] bemerkt wurde:

$$\Phi_{xx} = 0, \qquad \Phi_{xy} = N, \qquad \Phi_{xz} = -M.$$

Somit folgt:

$$(9.) \qquad 8AJ_1 \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s_1} Ds_1 = N \frac{\partial y}{\partial t} - M \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ferner ist [nach Seite 292 (α.)]:

$$4 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{x - x_1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{Dx_1}{Ds_1},$$

und folglich:

$$(10.) \qquad 4 \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} Ds_1 = - \int \frac{Dx_1}{r}.$$

Substituirt man jetzt in (6.) die Werthe (9.), (10.), so erhält man sofort:

$$(11.) \qquad (\mathfrak{X}) = A \left(N \frac{\partial y}{\partial t} - M \frac{\partial z}{\partial t} \right) - A^2 \frac{dJ_1}{dt} \int \frac{Dx_1}{r}.$$

Analoge Werthe ergeben sich für $(\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{Z})$. Die inducirte Kraft $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ ist aber [zufolge des allgemeinen Axioms Seite 76] von der Grösse und Gestalt des inducirten Körpers völlig unabhängig, also *ein und dieselbe,* einerlei ob dieser Körper linear oder von irgend welcher andern Gestalt ist. Demgemäss ergiebt sich folgender

Satz. — *Der inducirte Körper M sei von beliebiger Gestalt. Andrerseits aber sei der inducirende Körper M_1 ein starrer linearer Ring, der von einem elektrischen Strome durchflossen wird, dessen Stärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist. In starrer Verbindung mit diesem Ringe M_1 sei das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem* $[x, y, z]$. *Dabei aber mögen die beiden Objecte*

$$(12.) \qquad M \quad \textit{und} \quad \boxed{M_1 [x, y, z]}$$

im Raume in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sein.

Man markire nun im Körper M irgend einen ponderablen Massenpunkt, und bezeichne die augenblicklichen Coordinaten dieses Punktes mit x, y, z; so dass also x, y, z blosse Functionen der Zeit sein werden. Alsdann wird die vom Strome J_1 in diesem Punkte (x, y, z) hervorgebrachte elektromotorische Kraft folgende Componenten haben):*

$$(13.) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{X}) &= A \left(N \frac{dy}{dt} - M \frac{dz}{dt} \right) - A^2 \frac{dJ_1}{dt} \int \frac{Dx_1}{r}, \\ (\mathfrak{Y}) &= A \left(L \frac{dz}{dt} - N \frac{dx}{dt} \right) - A^2 \frac{dJ_1}{dt} \int \frac{Dy_1}{r}, \\ (\mathfrak{Z}) &= A \left(M \frac{dx}{dt} - L \frac{dy}{dt} \right) - A^2 \frac{dJ_1}{dt} \int \frac{Dz_1}{r}, \end{aligned}$$

*) Wie soeben bemerkt wurde, sind im gegenwärtigen Fall die x, y, z *blosse Functionen der Zeit.* Und demgemäss können die in (11.) auftretenden

die Integrationen hinerstreckt gedacht über alle Elemente $Ds_1(Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ *des linearen Ringes* M_1; *dabei bezeichnet* r *den Abstand eines solchen Elementes* Ds_1 *vom inducirten Punkte* (x, y, z).

In den Formeln (17.) *sind* $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ *die den Coordinatenaxen* (12.) *entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten des inducirten Punktes* (x, y, z). *Ferner haben* L, M, N *die früher definirten Bedeutungen* [*vgl. Seite 291* (4.), (5.) ... (8.)]. *Und es können daher* [*wie aus Seite 308* (17.) *hervorgeht*], *diese* L, M, N *definirt werden als die Componenten derjenigen ponderomotorischen Kraft, welche der inducirende Strom* J_1 *ausüben würde auf einen an der inducirten Stelle* (x, y, z) *gedachten Magnetpol* $\mu = 1$.

Zusatz. — *Die Formeln* (13.) *sind in folgende Gestalt versetzbar:*

$$(14.)\quad \begin{aligned} (\mathfrak{X}) &= A^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt}\right) - A^2\frac{dF}{dt}, \\ (\mathfrak{Y}) &= A^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt}\right) - A^2\frac{dG}{dt}, \\ (\mathfrak{Z}) &= A^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt}\right) - A^2\frac{dH}{dt}, \end{aligned}$$

wo F, G, H *die gewöhnlichen Bedeutungen haben:*

$$(15.)\qquad F = J_1\int\frac{Dx_1}{r}, \qquad G = J_1\int\frac{Dy_1}{r}, \qquad H = J_1\int\frac{Dz_1}{r},$$

diese Integrale gebildet gedacht für den inducirenden Strom J_1 *und für die inducirte Stelle* (x, y, z).

Beweis des Zusatzes. — Die L, M, N stehen bekanntlich zu den F, G, H in folgender Beziehung [vgl. Seite 291 (4.)]:

$$(\alpha.)\quad L = A\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \quad M = A\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right), \quad N = A\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

Hieraus folgt sofort:

$$(\beta.)\qquad N\frac{dy}{dt} - M\frac{dz}{dt} = A\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{dz}{dt}\right\},$$

d. i.:

$$(\gamma.)\quad N\frac{dy}{dt} - M\frac{dz}{dt} = A\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dz}{dt}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\right\}.$$

Nun ist aber nach (15.) und mit Rücksicht auf (12.):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dJ_1}{dt}\int\frac{Dx_1}{r} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ im gegenwärtigen Fall mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ bezeichnet werden.

Demgemäss kann man die Formel (γ.) auch so schreiben:

$$(\delta.)\quad N\frac{dy}{dt}-M\frac{dz}{dt}=A\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dz}{dt}\right)+\frac{dJ_1}{dt}\int\frac{Dx_1}{r}-\frac{dF}{dt}\right\},$$

oder, weil x, y, z blosse Functionen der Zeit sind, auch so:

$$(\varepsilon.)\quad N\frac{dy}{dt}-M\frac{dz}{dt}=A\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}\right)+\frac{dJ_1}{dt}\int\frac{Dx_1}{r}-\frac{dF}{dt}\right\}.$$

Substituirt man aber dies in (13.), im Werthe von ($\mathfrak{X}$), so gelangt man sofort zur ersten Formel des Systems (14.). — *Q. e. d.*

Specialfall. — Wir halten fest an den Vorstellungen des Satzes (12.), (13.); nur wollen wir gegenwärtig annehmen, der inducirende geschlossene Strom J_1 sei *unendlich klein.* Seine Stromfläche sei λ_1, und die auf der positiven Seite dieser Stromfläche errichtete Normale sei ν_1. Alsdann haben die Grössen L, M, N [nach Seite 295 (19.)] folgende Werthe:

$$(16.)\quad L=-AJ_1\lambda_1\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial\nu_1},\qquad M=-AJ_1\lambda_1\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial\nu_1},\qquad N=-AJ_1\lambda_1\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\partial\nu_1}.$$

Ferner wird alsdann das Integral

$$F=J_1\int\frac{Dx_1}{r}$$

[wie aus (1.) und (3.) Seite 290 ersichtlich ist] auch folgendermassen darstellbar sein:

$$F=J_1\lambda_1\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1,z)-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1,y)\right);$$

so dass sich also die Formel ergiebt:

$$(17.)\qquad \int\frac{Dx_1}{r}=\lambda_1\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1,z)-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1,y)\right),$$

eine Formel, zu welcher man auch direct auf Grund des Stokes'schen Theorems [nämlich auf Grund der Formel (α.) Seite 4] hätte gelangen können. Substituirt man jetzt die Werthe (16.), (17.) in (13.), so ergiebt sich folgender

Satz. — *Man halte fest an den Vorstellungen des Satzes* (12.), (13.) *denke sich aber den geschlossenen inducirenden Strom* J_1 *von* *unendlicher Kleinheit. Seine Stromfläche bezeichne man mit* λ_1, *und die auf der positiven Seite dieser Fläche errichtete Normale mit* ν_1.

Alsdann wird die von diesem Strome an der inducirten Stelle (x, y, z) *hervorgebrachte elektromotorische Kraft drei Componenten* ($\mathfrak{X}$), ($\mathfrak{Y}$), ($\mathfrak{Z}$) *besitzen, von denen die erste folgendermassen lautet:*

$$(18.)\quad (\mathfrak{X}) = A^2 J_1 \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial \nu_1} \frac{dz}{dt} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial \nu_1} \frac{dy}{dt} \right)$$
$$- A^2 \frac{dJ_1}{dt} \lambda_1 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(\nu_1, z) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(\nu_1, y) \right).$$

Analoge Formeln gelten für $(\mathfrak{Y})$ *und* $(\mathfrak{Z})$.

Uebrigens kann man, wie sofort ersichtlich ist, die Werthe dieser Componenten $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ *in folgende elegante Form bringen:*

$$(19.)\quad \begin{cases} (\mathfrak{X}) = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z}, \\ (\mathfrak{Y}) = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \\ (\mathfrak{Z}) = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \end{cases}$$

wo alsdann $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *die Bedeutungen haben:*

$$(20.)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = A^2 \lambda_1 \left(J_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \frac{dx}{dt} - \frac{dJ_1}{dt} \frac{\cos(\nu_1, x)}{r} \right), \\ \mathfrak{G} = A^2 \lambda_1 \left(J_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \frac{dy}{dt} - \frac{dJ_1}{dt} \frac{\cos(\nu_1, y)}{r} \right), \\ \mathfrak{H} = A^2 \lambda_1 \left(J_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_1} \frac{dz}{dt} - \frac{dJ_1}{dt} \frac{\cos(\nu_1, z)}{r} \right). \end{cases}$$

Diese Formeln (19.), (20.) *sind in Einklang mit gewissen von Lorberg aufgestellten Formeln.* [*Crelle's Journal Bd. 71, Seite 54*].

§ 2.

Die elektromotorische Einwirkung eines Solenoids, insbesondere für den Fall, dass das Solenoid ein geschlossenes ist.

Wir halten fest an den Vorstellungen des Satzes (12.), (13.), nehmen aber gegenwärtig an, dass der inducirende Strom J_1 ein *Solenoid* sei. Dabei ist alsdann, ebenso wie in jenem Satze, der ponderable Träger der das Solenoid constituirenden kleinen Stromringe *starr*, und mit dem Axensystem $[x, y, z]$ *starr verbunden* zu denken.

Wir bezeichnen die beiden Pole des Solenoids mit α_1, β_1, ferner Stromstärke, Querschnitt und Dichtigkeit des Solenoids mit J_1, λ_1 und δ_1; so dass also die Intensitäten der beiden Pole die Werthe haben [vgl. Seite 297 (1.)]:

$$(21.)\quad \begin{cases} (\text{Intensität des Poles } \alpha_1) = -\mu_1 = -AJ_1\lambda_1\delta_1, \\ (\text{Intensität des Poles } \beta_1) = +\mu_1 = +AJ_1\lambda_1\delta. \end{cases}$$

Zufolge dieser Formeln (21.) wird man die Grösse

$$(21\text{a.})\qquad \mu_1 = AJ_1\lambda_1\delta_1$$

kurzweg die *magnetische Intensität* des Solenoides nennen, und dieser Bezeichnungsweise z. B. auch dann sich bedienen können, wenn das Solenoid ein in sich zurücklaufendes sein sollte.

Es sei nun ferner ν_1 die von α_1 nach β_1 gehende Axe des Solenoids, und $D\nu_1$ ein Element derselben. Das diesem Axenelement $D\nu_1$ entsprechende Solenoidelement hat alsdann $\delta_1 D\nu_1$ Windungen. Bezeichnet man nun die von diesem Solenoidelement an der inducirten Stelle (x, y, z) hervorgebrachte elektromotorische Kraft mit $\mathfrak{X}^{\delta_1 D\nu_1}, \mathfrak{Y}^{\delta_1 D\nu_1}, \mathfrak{Z}^{\delta_1 D\nu_1}$, so wird die Componente $\mathfrak{X}^{\delta_1 D\nu_1}$ offenbar gleich dem Ausdruck (18.) sein, derselbe noch multiplicirt mit der Zahl $\delta_1 D\nu_1$. Demgemäss ergiebt sich also:

$$(22.)\quad \mathfrak{X}^{\delta_1 D\nu_1} = A[AJ_1\lambda_1\delta_1]\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{dt} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{dt}\right)D\nu_1$$
$$- A\left[A\frac{dJ_1}{dt}\lambda_1\delta_1\right]\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1, z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1, y)\right)D\nu_1.$$

Nach (21.) ist aber:

$$AJ_1\lambda_1\delta_1 = \mu_1, \quad \text{mithin: } A\frac{dJ_1}{dt}\lambda_1\delta_1 = \frac{d\mu_1}{dt}.$$

Substituirt man dies in (22.), und integrirt man sodann diese Formel (22.) über alle Axenelemente $D\nu_1$ des gegebenen Solenoids, so gelangt man, was die elektromotorische Einwirkung $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ des *ganzen* Solenoids $\alpha_1\beta_1$ betrifft, zu folgender Formel:

$$(23.)\qquad \mathfrak{X} = A\mu_1\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{dt} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{dt}\right)D\nu_1$$
$$- A\frac{d\mu_1}{dt}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1, z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1, y)\right)D\nu_1.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(24.)\qquad \mathfrak{X} = A\mu_1\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\frac{dz}{dt} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\frac{dy}{dt}\right]_{\alpha_1}^{\beta_1}$$
$$- A\frac{d\mu_1}{dt}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}Dz_1 - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}Dy_1\right),$$

falls man nämlich unter Dx_1, Dy_1, Dz_1 die rechtwinkligen Componenten des Axenelementes $D\nu_1$ versteht.

Specieller Fall: *das gegebene Solenoid sei ein in sich zurücklaufendes.* — Alsdann reducirt sich die Formel (24.) auf:

$$\mathfrak{X} = -A\frac{d\mu_1}{dt}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}Dz_1 - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}Dy_1\right), \tag{25.}$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente $D\nu_1\,(Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ der in sich zurücklaufenden Solenoidaxe. Ist nun, wie wir annehmen wollen, diese Integrationscurve eine *ebene* Curve, so gewinnt die Formel (25.), mittelst der früheren Gleichungen (g.), (h.) Seite 303, die einfache Gestalt:

$$\mathfrak{X} = +A\frac{d\mu_1}{dt}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathsf{K}}{\partial x}, \tag{26.}$$

wo ε und K die damals angegebenen Bedeutungen haben. Analoge Formeln ergeben sich für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$; so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Der inducirte Körper M sei von beliebiger Gestalt. Andererseits sei der inducirende Körper ein starres Solenoid, dessen Axe eine ebene und in sich zurücklaufende Curve bildet. Mit diesem starren Solenoid starr verbunden sei das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem $[x, y, z]$. Uebrigens mögen die beiden Objecte*

$$M \quad \text{und} \quad \boxed{\text{Solenoid } [x, y, z]} \tag{27.}$$

im Raume in ganz beliebigen und voneinander unabhängigen Bewegungen begriffen sein.

Denkt man sich nun die magnetische Intensität μ_1 des Solenoids [vgl. (21 a.)] als eine beliebige Function der Zeit, und denkt man sich ferner im Körper M irgend welchen ponderablen Massenpunkt markirt, mit den augenblicklichen Coordinaten x, y, z, so wird die von dem Solenoid in diesem Punkte (x, y, z) hervorgebrachte elektromotorische Kraft folgende Componenten haben:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= A\frac{d\mu_1}{dt}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathsf{K}}{\partial x}, \\ \mathfrak{Y} &= A\frac{d\mu_1}{dt}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathsf{K}}{\partial y}, \\ \mathfrak{Z} &= A\frac{d\mu_1}{dt}\cdot\varepsilon\frac{\partial\mathsf{K}}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{28.}$$

Hier bezeichnet K die Oeffnung des vom ponderablen Massenpunkte (x, y, z) aus nach der Solenoidaxe gelegten Kegels, und ε eine Constante, welche $= +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem dieser ponderable Massenpunkt auf

der positiven oder negativen Seite der vom Solenoid umgrenzten ebenen Fläche liegt)*.

Dieser elektromotorische Satz (28.) hat eine überraschende Aehnlichkeit mit dem früher gefundenen ponderomotorischen Satz Seite 302 (18a.). Und ebenso, wie auf Grund jenes ponderomotorischen Satzes, von *F. Neumann* ein constant-magnetisches Feld construirt ist, ebenso dürften analoge Constructionen auch an den gegenwärtigen elektromotorischen Satz sich anschliessen lassen.

§ 3.

Fortsetzung. Betrachtung eines ungeschlossenen Solenoids.

Wir kehren zurück zum Fall eines *ungeschlossenen* Solenoids, d. i. zur Formel (24.):

$$(29.)\qquad \mathfrak{X} = A\mu_1 \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dz}{dt} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dy}{dt} \right]_{\alpha_1}^{\beta_1} - A\frac{d\mu_1}{dt} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy_1 \right).$$

Man markire nun auf der Solenoidaxe $\alpha_1 \beta_1$ irgend welchen intermediären Punkt γ_1, und denke sich ein *zweites Solenoid*, dessen Axe, abgesehen von einer bei γ_1 liegenden *Schleife*, mit der des ersten Solenoids übereinstimmt. Es soll nämlich die Axe dieses zweiten Solenoids zuvörderst von α_1 bis γ_1 genau denselben Weg verfolgen, wie die des ersten. Sodann soll sie von γ_1 aus irgend welche Schleife machen, und in solcher Weise zu γ_1 wieder zurückkehren. Endlich soll sie jetzt von γ_1 aus nach β_1 gehen, und zwar auf genau demselben Wege, wie die Axe des ersten Solenoids. Ueberdies seien die magnetischen Intensitäten μ_1 [vgl. (21a.)] beider Solenoide gleich gross, also identisch mit *ein und derselben* Function der Zeit.

Ebenso wie die elektromotorische Einwirkung des ersten Solenoids auf die inducirte Stelle (x, y, z) mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bezeichnet ist, ebenso mag die elektromotorische Einwirkung des zweiten Solenoids auf jene Stelle mit $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ bezeichnet werden. Alsdann wird offenbar die Differenz $\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}$, zufolge (29.), den Werth haben:

*) Das Solenoid besteht, kann man sagen, aus einzelnen Stromringen, und unter der *positiven Richtung der Solenoidaxe* versteht man bekanntlich [vgl. den ersten Theil dieses Werkes Seite 252] diejenige, welche markirt wird durch die positiven Normalen jener einzelnen Stromringe. Nachdem aber in solcher Weise die positive Richtung der Solenoidaxe in bestimmter Weise definirt ist, ergiebt sich hieraus sofort, was unter der *positiven Seite der von dieser Axe umgrenzten Fläche* zu verstehen sei.

$$(30.) \qquad \mathfrak{X}' - \mathfrak{X} = - A \frac{d\mu_1}{dt} \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} Dz_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} Dy_1 \right),$$

die Integration hinerstreckt gedacht über alle Elemente $Dv_1(Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ jener *Schleife*. Hieraus aber ergiebt sich [vgl. den Uebergang von (25.) zu (26.)]:

$$(31.) \qquad \mathfrak{X}' - \mathfrak{X} = + A \frac{d\mu_1}{dt} \cdot \varepsilon \frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x},$$

wo ε und K auf die inducirte Stelle (x, y, z) und auf jene *Schleife* sich beziehen.

Die Formel (31.) zeigt, dass die Differenz $\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}$ einen *von Null verschiedenen Werth* hat. Gleiches wird offenbar von $\mathfrak{Y}' - \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}' - \mathfrak{Z}$ gelten; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Theorem. — *Besitzen zwei Solenoide dieselben Pole, und auch dieselbe magnetische Intensität, so werden trotzdem ihre elektromotorischen Einwirkungen sehr verschiedene sein können.*

Mit andern Worten: Ein Solenoid ist, was seine elektromotorischen Einwirkungen betrifft, durch Angabe seiner Pole und seiner magnetischen Intensität noch keineswegs bestimmt.

Dieser allgemeine Satz wird z. B. auch dann noch in Kraft bleiben, wenn von den beiden Polen des Solenoids nur einer im Endlichen, der andere aber in unendlicher Ferne liegt. Wollte man also schlechtweg nach der elektromotorischen Einwirkung fragen, die ein gegebener Magnet- oder Solenoidpol μ_1, dessen Intensität μ_1 eine gegebene Function der Zeit ist, in den einzelnen Punkten eines gegebenen Körpers hervorbringt, — so würde eine solche Frage gar keinen Sinn haben. Vielmehr wird diese Frage erst dann beantwortet werden können, wenn die aus dem Unendlichen kommende und in μ_1 endigende Solenoidaxe ihrem ganzen Laufe nach in bestimmter Weise gegeben ist.

Demgemäss wird z. B. auch die Frage nach der elektromotorischen Einwirkung eines gleichförmigen Magnetfeldes gar keinen Sinn haben; so dass man also sagen kann:

Theorem. — *Sind die Richtung und die Intensität eines sogenannten gleichförmigen Magnetfeldes in bestimmter Weise als Functionen der Zeit gegeben, so wird trotzdem die elektromotorische Wirkung dieses Feldes noch vollständig unbekannt sein.*

Specieller Fall: *Die Intensität μ_1 des Solenoids sei constant, d. h. unabhängig von der Zeit.* — Alsdann reducirt sich die allgemeine Formel (29.) auf:

(32.) $$\mathfrak{X} = A\mu_1 \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dz}{dt} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dy}{dt} \right]_{\alpha_1}^{\beta_1};$$

so dass also in diesem speciellen Falle nur die Lage der beiden Pole α_1 und β_1 in Betracht kommt, der Weg der Solenoidaxe aber vom einen zum andern Pole ganz gleichgültig bleibt. Nur dürfen wir nicht vergessen, dass bei all' unsern Betrachtungen das Solenoid, mithin auch die Solenoidaxe als *starr* vorausgesetzt ist*). Demgemäss ergiebt sich folgender Satz:

Satz. — *Der inducirte Körper M sei von beliebiger Gestalt. Andrerseits sei der inducirende Körper ein* ***starres Solenoid*** *$\alpha_1\beta_1$. Mit diesem starren Solenoid starr verbunden sei das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem [x, y, z]. Uebrigens mögen die beiden Objecte*

(33.) $$M \quad \text{und} \quad \boxed{\text{Solenoid } \alpha_1\beta_1 [x, y, z]}$$

im Raume in beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sein.

Denkt man sich nun die magnetische Intensität μ_1 des Solenoids ***constant*** *(d. h. unabhängig von der Zeit), und denkt man sich ferner im Körper M irgend einen ponderablen Massenpunkt markirt, mit den augenblicklichen Coordinaten x, y, z, so wird die vom Solenoide in diesem Punkte (x, y, z) hervorgebrachte elektromotorische Kraft folgende Componenten haben:*

(34.) $$\begin{cases} \mathfrak{X} = A\mu_1 \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dz}{dt} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dy}{dt} \right]_{\alpha_1}^{\beta_1}, \\ \mathfrak{Y} = A\mu_1 \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dz}{dt} \right]_{\alpha_1}^{\beta_1}, \\ \mathfrak{Z} = A\mu_1 \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{dx}{dt} \right]_{\alpha_1}^{\beta_1}, \end{cases}$$

wo die Indices α_1, β_1 die Differenzen derjenigen Werthe andeuten, welche die eingeklammerten Ausdrücke für die beiden Pole α_1 und β_1 besitzen. Dabei ist unter r der Abstand des einen oder andern Poles von der inducirten Stelle (x, y, z) zu verstehen.

---

*) Diese Voraussetzung der *Starrheit* des inducirenden Objectes, welche schon bei Ableitung des Satzes Seite 314 eine *nothwendige* war (ohne welche man zu jenem Satze nicht hätte hingelangen können), hat sich von dorther übertragen auf die Betrachtungen über das Solenoid Seite 317, 318, . . .

Der Satz gilt aber, seiner Ableitung nach, nur für ein *starres* Solenoid. Er dürfte völlig versagen, wenn etwa die Solenoidaxe während der betrachteten Zeit in irgend welchen Wellenbewegungen sich befinden sollte.

§ 4.

Die elektromotorische Einwirkung eines Magneten.

Der inducirte Körper M sei von beliebiger Gestalt und Beschaffenheit. Andrerseits sei der Inducent M_1 ein *starrer Magnet*, und mit diesem starr verbunden sei ein rechtwinkliges Axensystem $[x, y, z]$. Auch mögen die beiden Objecte

$$(1.)\qquad M \quad \text{und} \quad \boxed{M_1[x, y, z]}$$

in beliebigen Bewegungen begriffen sein.

Jedes Volumelement $D\tau_1$ des Körpers M_1 enthält ausserordentlich viele kleine Solenoide. Und jedes solches Solenoid σ_1 besteht aus ausserordentlich vielen kleinen Stromringen. Bezeichnet man die elektromotorische Einwirkung eines solchen Stromringes auf irgend einen ponderablen Massenpunkt (x, y, z) des Körpers M mit $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$, so ist nach dem Zusatz Seite 315:

$$(2.)\qquad (\mathfrak{X}) = A^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt}\right] - A^2\frac{dF}{dt},$$

wo F, G, H die Bedeutungen haben:

$$(3.)\qquad F = J_1\int\frac{Dx_1}{r},\quad G = J_1\int\frac{Dy_1}{r},\quad H = J_1\int\frac{Dz_1}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $J_1 Ds_1(Dx_1, Dy_1, Dz_1)$ des betrachteten Ringes; dabei bezeichnet r den Abstand eines solchen Elementes von der inducirten Stelle (x, y, z).

Uebrigens kann man den Formeln (3.), weil der betrachtete Stromring J_1 unendlich klein ist, eine etwas bequemere Gestalt geben. So z. B. wird F nach den allgemeinen Formeln Seite 290 (3.) folgendermassen darstellbar sein:

$$(4.)\qquad F = J_1\lambda_1\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(\nu_1, z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(\nu_1, y)\right),$$

wo λ_1 die Stromfläche des kleinen Stromes, und ν_1 die auf der positiven Seite dieser Fläche errichtete Normale bezeichnen.

Will man die elektromotorische Einwirkung $\mathfrak{X}^{\sigma_1}$, $\mathfrak{Y}^{\sigma_1}$, $\mathfrak{Z}^{\sigma_1}$ des ganzen Solenoids σ_1 haben, so wird man den Ausdruck für $(\mathfrak{X})$, (2.), und die analogen Ausdrücke für $(\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{Z})$ über all' diejenigen

N_1 Stromringe zu summiren haben, aus denen das betrachtete Solenoid besteht. Diese Summation aber wird, weil all' diese N_1 Stromringe als congruent und einander unendlich nahe anzusehen sind, dadurch bewerkstelligt werden, dass man jene Ausdrücke mit der Zahl N_1 multiplicirt. Somit folgt:

$$\mathfrak{X}^{\sigma_1} = N_1(\mathfrak{X}), \qquad \mathfrak{Y}^{\sigma_1} = N_1(\mathfrak{Y}), \qquad \mathfrak{Z}^{\sigma_1} = N_1(\mathfrak{Z}),$$

also mit Hinblick auf (2.):

$$(5.) \quad \mathfrak{X}^{\sigma_1} = A\frac{\partial}{\partial x}\left[(AFN_1)\frac{dx}{dt} + (AGN_1)\frac{dy}{dt} + (AHN_1)\frac{dz}{dt}\right] - A\frac{d(AFN_1)}{dt},$$

wo alsdann z. B. AFN_1, zufolge (4.), die Bedeutung hat:

$$(6.) \quad AFN_1 = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} AJ_1\lambda_1 N_1 \cos(\nu_1, z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} AJ_1\lambda_1 N_1 \cos(\nu_1, y).$$

Zur Vereinfachung dieser Formel wollen wir die *magnetischen Momente* des betrachteten Solenoids σ_1 einführen. Sein magnetisches Hauptmoment d_1 ist, wie schon früher [Seite 305 vor (27.)] bemerkt wurde, zu definiren durch die Formel:

$$(\alpha.) \qquad d_1 = \mu_1 \varepsilon_1,$$

vorausgesetzt, dass man unter $-\mu_1$ und $+\mu_1$ die Intensitäten seiner beiden Pole, ferner unter ε_1 die Länge seiner Axe (d. h. den gegenseitigen Abstand der beiden Pole) versteht. Bedient man sich nun hinsichtlich dieses Solenoids der gewöhnlichen Bezeichnungen, so ist [vgl. Seite 318 (21.)]: $\mu_1 = AJ_1\lambda_1\delta_1$. Dies in ($\alpha$.) substituirt, erhält man sofort:

$$(\beta.) \qquad d_1 = AJ_1\lambda_1\delta_1\varepsilon_1.$$

Nun repräsentirt aber δ_1 die Dichtigkeit der Windungen des Solenoids, d. i. diejenige Anzahl von Windungen, welche auf ein Axensegment von der Länge Eins kommt. Folglich wird das Product $\delta_1\varepsilon_1$ diejenige Anzahl von Windungen vorstellen, welche auf die ganze Solenoidaxe ε_1 kommt. Mit andern Worten: Dieses Product $\delta_1\varepsilon_1$ wird $= N_1$ sein, d. i. gleich der Anzahl aller Stromringe, aus denen das betrachtete Solenoid σ_1 besteht. Demgemäss geht die Formel (β.) über in:

$$(\gamma.) \qquad d_1 = AJ_1\lambda_1 N_1.$$

Dies in (6.) substituirt, erhält man sofort:

$$(7.) \quad AFN_1 = \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} d_1 \cos(\nu_1, z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} d_1 \cos(\nu_1, y).$$

Bezeichnet man also schliesslich die den Axen entsprechenden magnetischen Momente des betrachteten Solenoids σ_1 (d. i. die drei Componenten des Hauptmomentes d_1) mit a_1, b_1, c_1, so erhält man:

$$(8.)\qquad AFN_1 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} c_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} b_1 = \frac{\partial \left(\frac{c_1}{r}\right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{b_1}{r}\right)}{\partial z}.$$

Analoge Werthe besitzen AGN_1 und AHN_1 Substituirt man diese Werthe in (5.), so ergiebt sich:

$$(9.)\quad \mathfrak{X}^{\sigma_1} = A\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\left(\frac{c_1}{r}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{b_1}{r}\right)}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \cdots\right] - A\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{c_1}{r}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{b_1}{r}\right)}{\partial z}\right).$$

Es sei nun $D\tau_1$ ein kleines Volumelement des gegebenen Körpers M_1, und es seien $\mathfrak{X}^{D\tau_1}$, $\mathfrak{Y}^{D\tau_1}$, $\mathfrak{Z}^{D\tau_1}$ die Componenten der von diesem Volumelement $D\tau_1$ auf die inducirte Stelle (x, y, z) ausgeübten elektromotorischen Einwirkung. Alsdann wird man offenbar die Componente $\mathfrak{X}^{D\tau_1}$ dadurch erhalten, dass man den Ausdruck (9.) über alle innerhalb $D\tau_1$ befindlichen Solenoide summirt. In solcher Weise aber wird man weil all' diese Solenoide einander unendlich nahe liegen, für die Componente $\mathfrak{X}^{D\tau_1}$ einen Ausdruck erhalten, der vom Ausdrucke (9.) nur dadurch sich unterscheidet, dass in ihm, an Stelle von a_1, b_1, c_1 die Summen

$$(\delta.)\qquad \sum a_1, \quad \sum b_1, \quad \sum c_1$$

sich vorfinden, diese Summen ausgedehnt gedacht über sämmtliche innerhalb $D\tau_1$ vorhandenen Solenoide. Diesen Summen pflegt man bekanntlich folgende Gestalt zu geben:

$$(\varepsilon.)\qquad \sum a_1 = \alpha_1 D\tau_1, \qquad \sum b_1 = \beta_1 D\tau_1, \qquad \sum c_1 = \gamma_1 D\tau_1.$$

Auch pflegt man alsdann die Grössen α_1, β_1, γ_1 zu bezeichnen als die *magnetischen Momente, bezogen auf die Volumeinheit.* — Demgemäss ergiebt sich also für die Componente $\mathfrak{X}^{D\tau_1}$ der Werth:

$$(10.)\qquad \mathfrak{X}^{D\tau_1} = A\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\left(\frac{\gamma_1 D\tau_1}{r}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\beta_1 D\tau_1}{r}\right)}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \cdots\right]$$
$$- A\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{\gamma_1 D\tau_1}{r}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\beta_1 D\tau_1}{r}\right)}{\partial z}\right).$$

Bezeichnet man endlich die vom *ganzen* Körper M_1 auf die Stelle (x, y, z) ausgeübte elektromotorische Kraft kurzweg mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so wird man z. B. $\mathfrak{X}$ dadurch erhalten, dass man den Ausdruck (10.) über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1 integrirt. Demgemäss ergiebt sich:

$$(11.)\quad \mathfrak{X} = A\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial y}\right)\frac{dz}{dt}\right]$$
$$- A\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right),$$

wo alsdann A, B, Γ die Bedeutungen haben:

$$(12.)\qquad \mathsf{A} = \int \frac{\alpha_1 D\tau_1}{r}, \qquad \mathsf{B} = \int \frac{\beta_1 D\tau_1}{r}, \qquad \Gamma = \int \frac{\gamma_1 D\tau_1}{r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1. Man gelangt also zu folgendem Resultat:

Satz. — *Der inducirte Körper M sei von ganz beliebiger Gestalt und Beschaffenheit. Andrerseits sei der inducirende Körper M_1 ein starrer Magnet, und mit diesem starr verbunden sei das Axensystem (x, y, z). Uebrigens mögen die beiden Objecte*

$$(13.)\qquad M \quad und \quad \boxed{M_1[x, y, z]}$$

im Raume in ganz beliebigen und von einander unabhängigen Bewegungen begriffen sein.

Man markire nun im Körper M irgend einen ponderablen Massenpunkt, und bezeichne die augenblicklichen Coordinaten dieses Punktes mit x, y, z. Ferner bezeichne man ein Volumelement des Körpers M_1 mit $D\tau_1$, und die magnetischen Momente der in $D\tau_1$ enthaltenen Masse mit $\alpha_1 D\tau_1$, $\beta_1 D\tau_1$, $\gamma_1 D\tau_1$. Endlich bilde man die Integrale:

$$(14.)\qquad \mathsf{A} = \int \frac{\alpha_1 D\tau_1}{r}, \qquad \mathsf{B} = \int \frac{\beta_1 D\tau_1}{r}, \qquad \Gamma = \int \frac{\gamma_1 D\tau_1}{r},$$

dieselben ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau_1$ des Körpers M_1; dabei soll r den Abstand eines solchen Elementes $D\tau_1$ vom Punkte (x, y, z) vorstellen.

Alsdann wird die vom Körper M_1 im Punkte (x, y, z) hervorgebrachte elektromotorische Kraft folgende Componenten haben:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = A\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \cdots\right] - A\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{Y} = A\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \cdots\right] - A\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{Z} = A\,\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \cdots\right] - A\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial y}\right), \end{cases}$$

wo in allen drei Formeln in den eckigen Klammern ein und derselbe Ausdruck steht. Dieser Ausdruck lautet, vollständig hingeschrieben, folgendermassen:

$$(16.)\qquad \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial y}\right)\frac{dz}{dt}.$$

Dass hier unter $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ die augenblicklichen Geschwindigkeitscomponenten des inducirten Punktes (x, y, z) in Bezug auf das Axensystem (13.) zu verstehen sind, ergiebt sich schon von selber aus den zu Anfang dieses Satzes eingeführten Bezeichnungen.

Specialfall. — Sind die beiden Körper M und M_1 in *relativer Ruhe*, so werden die Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ offenbar $= 0$ sein; so dass also in diesem Fall die Formeln (15.) sich reduciren auf:

$$(17.) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = -A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathsf{\Gamma}}{\partial y} - \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial z} \right), \\ \mathfrak{Y} = -A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathsf{\Gamma}}{\partial x} \right), \\ \mathfrak{Z} = -A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Diese specielleren Formeln (17.) sind, abgesehen vom *entgegengesetzten Vorzeichen*, identisch mit gewissen schon von *Helmholtz* gegebenen Formeln [Wiss. Abh. Bd. 1, Seite 619]. Nur sind die Grössen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{\Gamma}$ dort von Helmholtz mit L, M, N bezeichnet. Das entgegengesetzte Vorzeichen erklärt sich daraus, dass Helmholtz seinen Untersuchungen ein negatives Axensystem zu Grunde gelegt hat, während wir uns fortdauernd des positiven Axensystems bedienen. Vgl. Seite 2.

Bemerkung. — Die Untersuchungen dieses Paragraphs haben ihren Ausgang genommen vom Satze (14.) Seite 315. Jener Satz beruht aber auf der Voraussetzung, dass der ponderable Träger des betrachteten Stromringes *starr*, und mit dem benutzten Axensystem $[x, y, z]$ *starr verbunden* ist. Streng genommen werden daher die Betrachtungen und Resultate des gegenwärtigen Paragraphs nur dann richtig sein, wenn jene unendlich kleinen elektrischen Ströme, die in letzter Instanz den magnetischen Charakter des Körpers M_1 hervorbringen, Bahncurven besitzen, die in Bezug auf die ponderable Masse des Körpers M_1, mithin auch in Bezug auf das mit diesem starr verbundene Axensystem $[x, y, z]$ völlig unveränderlich sind.

§ 5.

Ueber elektrische oder dielektrische Polarisation.

Sind in einem gegebenen Körper irgend welche elektrische Strömungen u, v, w vorhanden, so werden die über alle Volumelemente $D\tau$ dieses Körpers ausgedehnten Integrale

$$\int u\,D\tau, \qquad \int v\,D\tau, \qquad \int w\,D\tau$$

einer gewissen eigenthümlichen Darstellung fähig sein. Für eine beliebig gegebene Function $\Phi = \Phi(x, y, z)$ gilt nämlich im Allgemeinen die Formel (M.) Seite 212:

$$(1.) \qquad \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v + \frac{\partial \Phi}{\partial z} w \right) D\tau = \int \Phi \frac{\partial \eta}{\partial t} Do + \int \Phi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} D\tau.$$

Setzt man nun insbesondere: $\Phi = x$, so erhält man:

$$\int u\,D\tau = \int x\,\frac{\partial\eta}{\partial t}\,Do + \int x\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,D\tau. \tag{2.}$$

Denkt man sich den Körper starr, und das Axensystem $[x, y, z]$ mit dem starren Körper fest verbunden, so sind offenbar Do, $D\tau$ und x von der Zeit unabhängig; so dass man also in diesem Falle die Formel (2.) auch so schreiben kann:

$$\int u\,D\tau = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int x\eta\,Do + \int x\varepsilon\,D\tau\right). \tag{3.}$$

Das hier eingeklammerte Binom repräsentirt aber die Summe aller im Körper enthaltenen elektrischen Theilchen, jedes multiplicirt mit seiner x-Coordinate, und wird daher zu bezeichnen sein als das der x-Axe entsprechende *elektrische Moment* des gegebenen Körpers, oder (genauer ausgedrückt) als der augenblickliche Werth dieses elektrischen Momentes. Demgemäss gelangt man, auf Grund der Formel (3.), zu folgendem Resultat:

Satz. — *Sind in einem starren Körper irgend welche elektrische Strömungen u, v, w vorhanden, und bezeichnet man die den Coordinatenaxen entsprechenden elektrischen Momente des Körpers mit* A, B, Γ, *so werden in jedwedem Augenblick folgende Relationen stattfinden:*

$$\int u\,D\tau = \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial t}, \qquad \int v\,D\tau = \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial t}, \qquad \int w\,D\tau = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \tag{4.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des gegebenen Körpers. Dabei sind die Coordinatenaxen mit der ponderablen Masse des Körpers fest verbunden gedacht.

Bemerkung. — Die Formel (1.) ist identisch mit der Formel (M.) Seite 212, und beruht also wesentlich auf den beiden Formeln (K.), (K′.) Seite 211. Jene Formel (K′.) beruht aber ihrerseits, wie damals (auf Seite 212) besonders hervorgehoben wurde, auf der Voraussetzung, dass der gegebene Körper von einem isolirenden Medium umgeben ist. Dies überträgt sich offenbar auf den Satz (4.). Und es wird also dieser Satz (4.) nur dann gültig sein, wenn der gegebene Körper von einem isolirenden Medium umgeben ist.

Oder besser ausgedrückt: *Der Satz* (4.) *wird nur dann anwendbar sein, wenn aus dem betrachteten Körper keine Elektricität entweichen, noch auch fremde Elektricität von Aussen her in den Körper hineingelangen kann.*

Dies vorangeschickt, gehen wir über zu unserm eigentlichen Thema. Unter *elektrischer* (*oder dielektrischer*) *Polarisation* versteht man bekanntlich einen molecularen Process, bei welchem die in jedem einzelnen Molecül enthaltenen Elektricitäten sich gegen einander verschieben, der Art, dass am einen Ende des Molecüls die positive, am entgegen-

gesetzten Ende die negative Elektricität das Uebergewicht erhält. Ein solcher Process im Innern des Molecüls wird im Allgemeinen stets eintreten, sobald irgend welche elektromotorische Kräfte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von Aussen her auf das Molecül einwirken.

Aendern sich diese äussern Kräfte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ im Laufe der Zeit, so wird die elektrische Polarisation des Molecüls von Augenblick zu Augenblick eine andere werden; denn es werden in solchem Falle die im Innern des Molecüls vorhandenen elektrischen Theilchen von Augenblick zu Augenblick ihre Lage ändern, also in fortwährender Bewegung oder Strömung begriffen sein.

Zu den Molecülen, von denen hier die Rede ist, gehören nicht nur die gewöhnlichen *ponderablen Molecüle*, sondern auch die *Aethermolecüle*. Denn auch der reine Aether ist, nach den Vorstellungen von Hertz und Helmholtz, elektrisch polarisirbar.

Es sei jetzt irgend ein Körper gegeben. Wir construiren im Innern dieses Körpers einen sehr kleinen Raum $D\tau$, der aber, trotz seiner Kleinheit, bereits eine ausserordentlich grosse Anzahl n von Molecülen in sich enthalten mag. Diese innerhalb $D\tau$ vorhandenen n Molecüle werden im Allgemeinen von sehr verschiedener Grösse, und zwar theils gewöhnliche *ponderable Molecüle*, theils *Aethermolecüle* sein; während der Raum zwischen den Molecülen als ein *wirkliches Vacuum* anzusehen ist.

Wir wollen nun annehmen, dass durch irgend welche von Aussen her einwirkenden elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ eine elektrische Polarisirung hervorgebracht werde, dass also die in jedem einzelnen Molecül vorhandenen Elektricitäten durch jene Kräfte in Bewegung gerathen. Alsdann wird man auf diese molecular-elektrischen Bewegungen den Satz (4.) anwenden können, und in solcher Weise für die in Rede stehenden n Molecüle folgende n Formeln erhalten:

$$(5.) \qquad \int u_1 D\tau_1 = \frac{\partial \mathsf{A}_1}{\partial t}, \quad \int u_2 D\tau_2 = \frac{\partial \mathsf{A}_2}{\partial t}, \quad \ldots \quad \int u_n D\tau_n = \frac{\partial \mathsf{A}_n}{\partial t}.$$

In der *ersten* Formel ist die Integration ausgedehnt zu denken über alle Volumelemente $D\tau_1$ des *ersten* Molecüls. Dabei bezeichnet u_1 die x-Componente der in $D\tau_1$ vorhandenen elektrischen Strömung; während A_1 das der x-Axe entsprechende elektrische Moment dieses ersten Molecüls bezeichnet. Ebenso bezieht sich die *zweite* Formel auf das *zweite* Molecül. U. s. w. Durch Addition der n Formeln (5.) ergiebt sich:

$$(6.) \qquad \int u_1 D\tau_1 + \int u_2 D\tau_2 \cdots + \int u_n D\tau_n = \frac{\partial(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \cdots + \mathsf{A}_n)}{\partial t}.$$

Die Volumina der n Molecüle seien bezeichnet mit $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$. Man denke sich nun den ganzen von Hause aus construirten Raum $D\tau$, in welchem diese $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ als einzelne äusserst kleine Inseln figuriren, in der Richtung der x-Axe von einer elektrischen Strömung u' durchzogen, die in allen Punkten des Raumes $D\tau$ gleich stark ist. Und zwar mag diese Strömungsstärke u' der Formel entsprechen:

$$\text{(p.)} \qquad \int u_1 D\tau_1 + \int u_2 D\tau_2 \cdots + \int u_n D\tau_n = u' D\tau.$$

Selbstverständlich ist das so definirte u' nur eine fingirte oder ideale Grösse. Man wird dieses u' bezeichnen können als das arithmetische Mittel aller im ganzen Raume $D\tau$ vorhandenen u's, wobei unter den u's die x-Componenten der im Raume $D\tau$ vorhandenen *molecularelektrischen Strömungen* zu verstehen sind.

In analoger Weise mag, was die Grössen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_n$ betrifft, eine neue Grösse α eingeführt werden, die zu jenen in der Beziehung steht:

$$\text{(q.)} \qquad \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 \cdots + \mathsf{A}_n = \alpha D\tau;$$

so dass also dieses α bezeichnet werden kann als das arithmetische Mittel der x-Componenten aller im ganzen Raume $D\tau$ vorhandenen *molecularelektrischen Momente.*

Durch (p.), (q.) geht die Formel (6.) über in:

$$\text{(7.)} \qquad u' D\tau = \frac{\partial \alpha}{\partial t} D\tau;$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Innerhalb eines gegebenen Körpers sei ein äusserst kleiner Raum $D\tau$ construirt. Und auf diesen Raum $D\tau$, welcher, trotz seiner Kleinheit, bereits ausserordentlich viele Molecüle (theils ponderable Molecüle, theils Aethermolecüle) in sich enthalten soll, mögen von Aussen her irgend welche elektromotorische Kräfte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ einwirken.*

Durch diese Kräfte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ werden alsdann die in den einzelnen Molecülen enthaltenen Elektricitäten in Strömung gerathen. Sind nun u', v', w' die Mittelwerthe dieser molecularelektrischen Strömungen für den Raum $D\tau$, und sind ferner α, β, γ die Mittelwerthe der molecularelektrischen Momente des Raumes $D\tau$, so werden für jedweden Augenblick folgende Formeln stattfinden:

$$\text{(8.)} \qquad u' = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \qquad v' = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad w' = \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Zusatz. — *Man pflegt* a n z u n e h m e n *[vgl. Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 612 (17.)], dass die soeben genannten Mittelwerthe α, β, γ*



den einwirkenden elektromotorischen Kräften $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ *proportional sind, dass sie nämlich die Werthe haben:*

(9.) $$\alpha = h\mathfrak{A}, \quad \beta = h\mathfrak{B}, \quad \gamma = h\mathfrak{C}$$

wo h eine nur von der Natur des gegebenen Körpers abhängende Constante vorstellt. [*Diese Constante h ist von Helmholtz a. a. O. mit* ε *bezeichnet worden*].

Substituirt man diese Werthe (9.) *in* (8.), *so erhält man sofort:*

(10.) $$u' = h\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad v' = h\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad w' = h\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t};$$

so dass also die Mittelwerthe u', v', w' *der molecularelektrischen Strömungen proportional sind mit den zeitlichen Ableitungen der einwirkenden elektromotorischen Kräfte* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Wir haben bis jetzt nur die *Innen*räume der einzelnen Molecüle betrachtet, nicht aber die Räume *zwischen* diesen Molecülen.

Ist der gegebene Körper ein *Isolator*, so kann kein Uebergang der Elektricität von einem Molecül zum andern erfolgen. Ueberhaupt werden alsdann in den Molecularinterstitien keinerlei elektrische Bewegungen stattfinden, so dass also in solchem Falle die soeben besprochene Bewegung (u', v', w'), (10.), *die einzige elektrische Bewegung* repräsentirt, welche durch die gegebenen Kräfte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hervorgebracht wird.

Ist hingegen der gegebene Körper ein *Conductor*, so wird [nach Helmholtz, Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 616] zur Bewegung (u', v', w') *noch diejenige Bewegung* (u, v, w) *hinzutreten, welche dem Ohm'schen Gesetz entspricht:*

(11.) $$u = \lambda\mathfrak{A}, \quad v = \lambda\mathfrak{B}, \quad w = \lambda\mathfrak{C}, \quad \text{[vgl. (1.) Seite 63].}$$

Uebrigens wird man in solchem Falle, statt der beiden Bewegungen (u', v', w') und (u, v, w), eine einzige Bewegung ($\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$) sich denken können, welche mit jenen beiden äquivalent ist, und deren Componenten die Werthe haben:

(12.) $$\mathfrak{u} = u + u', \quad \mathfrak{v} = v + v', \quad \mathfrak{w} = w + w'.$$

Dies ist die sogenannte *Gesammtströmung.* Substituirt man in derselben für u, v, w und u', v', w' die Werthe (11.) und (10.), so erhält man:

(13.) $$\mathfrak{u} = \lambda\mathfrak{A} + h\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{v} = \lambda\mathfrak{B} + h\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \mathfrak{w} = \lambda\mathfrak{C} + h\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}.$$

Mittelst der Formeln (11.), (10.) und (13.) sind die Strömungen $u, v, w, u', v', w', \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ ausgedrückt durch die einwirkenden *elektromotorischen Kräfte* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Uebrigens kann man jene Strömungen

falls es beliebt, auch darstellen als Functionen der *elektrischen Momente* α, β, γ. Nach (9.) und (11.) ist nämlich:

$$(14.) \qquad u = \frac{\lambda \alpha}{h}, \qquad v = \frac{\lambda \beta}{h}, \qquad w = \frac{\lambda \gamma}{h}.$$

Ferner ist nach (8.):

$$(15.) \qquad u' = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \qquad v' = \frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad w' = \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Substituirt man endlich diese Werthe (14.), (15.) in (12.), so folgt:

$$(16.) \qquad \mathfrak{u} = \frac{\lambda \alpha}{h} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \qquad \mathfrak{v} = \frac{\lambda \beta}{h} + \frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad \mathfrak{w} = \frac{\lambda \gamma}{h} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Diese Formeln (16.) sind in Uebereinstimmung mit den von Helmholtz im Jahre 1870 gegebenen Formeln [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 616 (18a.)]. Nur hat Helmholtz, statt der Buchstaben

$$(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}), \qquad (\alpha, \beta, \gamma), \qquad (\lambda, h),$$

die Bezeichnungen angewendet:

$$(u, v, w), \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}), \qquad \left(\frac{1}{\varkappa}, \varepsilon\right).$$

Ich habe mich im gegenwärtigen Paragraph bemüht, diese wichtigen Betrachtungen und Formeln, welche von Helmholtz im Jahre 1870 nur in äusserster Kürze angedeutet sind [Wiss. Abh., Bd. 1, Seite 615, 616], einigermassen anschaulich darzulegen. Allerdings weiss ich nicht mit Bestimmtheit, ob es mir gelungen ist, Helmholtz' Vorstellungen aus jenen kurzen Andeutungen wirklich errathen zu haben.

Wie dem auch sei, — jedenfalls enthalten die Darlegungen dieses Paragraphs manches Bedenkliche und der weiteren Ueberlegung Bedürftige. So z. B. wird der Satz (4.) auf die einzelnen Molecüle (ponderablen Molecüle und Aethermolecüle) nur dann anwendbar sein, wenn man voraussetzt, dass aus einem solchen Molecül keine Elektricität entweichen, noch auch fremde Elektricität von Aussen her in dasselbe hineingelangen kann. [Vgl. d. Bemerkung Seite 328]. Eine derartige Voraussetzung mag zutreffend sein für die Molecüle eines *Isolators*, dürfte aber doch wohl sehr unpassend sein für die Molecüle eines *Conductors*. Oder sollte man etwa annehmen, dass jene dem Ohm'schen Gesetz entsprechenden Strömungen u, v, w (11.) durch die Molecularinterstitien sich hindurchschlängeln, ohne dabei mit den Molecülen selbst jemals in Berührung zu kommen!

Auch bei andern Autoren habe ich über diese Schwierigkeiten keine Aufklärung gefunden. Besitzen doch leider viele Autoren eine merkwürdige Geschicklichkeit, gerade über *principielle* Schwierigkeiten mit grösster Leichtigkeit hinwegzugleiten.

Bemerkung. — Man kann die Formeln (12.), indem man für u', v', w' die Werthe (8.) substituirt, auch so schreiben:

$$\text{(H.)} \qquad \mathfrak{u} = u + \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \qquad \mathfrak{v} = v + \frac{\partial \beta}{\partial t}, \qquad \mathfrak{w} = w + \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Diese *Helmholtz'schen Formeln* (H.) kann man identificiren mit den bekannten *Maxwell'schen Formeln:*

$$\text{(M.)} \qquad u = p + \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad v = q + \frac{\partial g}{\partial t}, \qquad w = r + \frac{\partial h}{\partial t},$$

[Maxwell: Treatise on El. a. M., Vol. 2, 1873, Page 233]. Nur muss man bei einer solchen Identificirung im Auge behalten, dass diese Formeln bei Maxwell und bei Helmholtz aus ganz verschiedenen Quellen entspringen.

Nach Maxwell zerfallen nämlich die in einem Körper enthaltenen elektrischen Theilchen im Allgemeinen in zwei Kategorien, der Art, dass die Theilchen der einen Kategorie durch einwirkende elektromotorische Kräfte in eine strömende Bewegung (p, q, r) gerathen, während die Theilchen der andern Kategorie durch solche Einwirkungen nur gewisse Verschiebungen (f, g, h) erleiden.

Funfzehnter Abschnitt.

Ueber die Untersuchungen von Hertz und Helmholtz aus den Jahren 1890 und 1892.

Die bisherigen Abschnitte repräsentiren (bis auf die Digression des neunten Abschnitts) ein zusammenhängendes Ganzes, eine planmässig fortschreitende Untersuchung von ganz bestimmter Richtung.

Weit abseits von dieser fast geradlinigen Bahn liegen jene hin- und herwogenden Gedanken, die durch Faraday, Maxwell, Heaviside, Poynting, Hertz u. A. in die Wissenschaft hineingetreten sind, von Manchem für Irrlichter gehalten, von Manchem für die ersten noch dämmrigen Strahlen eines neu aufgehenden Gestirnes.

Jedenfalls haben jene Gedanken allmählig mehr und mehr Anklang gefunden. Auch haben sie in letzter Zeit (1892) durch das *Helmholtz'sche Minimalprincip* eine gewisse Consistenz und eine ganz bestimmte Richtung erhalten. Auf diese neue Richtung soll nun im gegenwärtigen und in den folgenden Abschnitten näher eingegangen werden.

§ 1.

Die erste Hertz'sche Abhandlung: Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. (1890.)

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dass Maxwell und Hertz die Fernkräfte ganz beseitigen wollten. Ebenso etwa, wie die *calorischen* Zustände einer ruhenden Substanz, in der berühmten Fourier-schen Wärmetheorie, nach Maassgabe einer bestimmten Differentialgleichung:

$$\text{(F.)} \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$

von Augenblick zu Augenblick sich ändern, — ebenso sollen, nach den Vorstellungen von Maxwell und Hertz, auch die *elektrischen* und *magnetischen* Zustände der betrachteten Substanz von gewissen Differential-



gleichungen beherrscht sein. Und zwar sollen diese Differentialgleichungen nach Hertz folgendermassen lauten:

$$(1.)\quad \begin{cases} A\left(\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\dfrac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{X}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}, \\ A\left(\dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}+\dfrac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}, \\ A\left(\dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}+\dfrac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Z}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}, \end{cases} \qquad (2.)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}-\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \\ A\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}-\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \\ A\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}-\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die elektrischen und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die magnetischen Zustandscomponenten bezeichnen. Diese Componenten sind im Allgemeinen *unbekannte* Functionen von x, y, z, t; während λ (die elektrische Leitungsfähigkeit), ε (der Dielektricitätscoefficient) und μ (der Magnetisirungscoefficient) als *gegebene* Functionen von x, y, z anzusehen sind. Ueberdies repräsentirt A eine Constante.

Diese sechs Grundgleichungen (1.), (2.) *sind also nach Hertz als maassgebend anzusehen für die Aenderungen, welche die elektrischen und magnetischen Zustände einer ruhenden Substanz von Augenblick zu Augenblick erfahren.*

Bemerkung. — Die Temperatur ϑ der betrachteten Substanz ändert sich an jeder Stelle (x, y, z) nach Maassgabe der Fourier'schen Differentialgleichung (F.), ohne dass dabei irgend welche Fernwirkungen eine Rolle spielten. Die eigentlichen *Ursachen* der Temperaturänderung sind daher in den Verhältnissen der *unmittelbaren Nachbarschaft* der betrachteten Stelle (x, y, z) zu suchen. Und die Art und Weise, wie diese unmittelbare Nachbarschaft bei der Hervorbringung der Temperaturänderungen in Action tritt, findet in jener Fourier'schen Differentialgleichung (F.) ihren analytischen Ausdruck (man könnte sagen: ihre analytische Beschreibung). — Analoges wird offenbar in der Hertz'schen Theorie von den eigentlichen *Ursachen* der elektrischen und magnetischen Zustandsänderungen und von den Differentialgleichungen (1.), (2.) zu sagen sein.

Noch eine zweite Aehnlichkeit fällt ins Auge. Ebenso nämlich, wie in der Fourier'schen Wärmetheorie die Temperatur ϑ, ihrem eigentlichen Wesen nach, *unerklärt* bleibt, — ebenso ist in der Hertz'schen Theorie Analoges zu sagen vom elektrischen Zustande $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und vom magnetischen Zustande $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Uebrigens sind für den elektrischen Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ allerlei Namen im Gebrauch. Bald bezeichnet man ihn als elektrische Verschiebung, bald als elektrische Störung, bald als elektrische Polarisation, bald als elektrisches Moment, bald als elektrische Induction. Entsprechendes ist zu berichten über den magnetischen Zustand $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Nach den Grundvorstellungen von Hertz soll der elektrische Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ in engster Beziehung stehen zu den *elektrischen Strömungen* (u, v, w). Es sollen nämlich nach diesen Vorstellungen in

jedwedem Punkte (x, y, z) und in jedwedem Augenblick t zwischen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und u, v, w folgende Gleichungen stattfinden:

$$(3.) \qquad u = \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{X}, \quad v = \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{Y}, \quad w = \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{Z}.$$

Als ein Pleonasmus könnte in der Hertz'schen Theorie erscheinen, dass neben den Buchstaben $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ noch andre Buchstaben X, Y, Z, L, M, N auftreten, und zwar in folgenden Bedeutungen:

$$(4.) \quad X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \quad Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \quad Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \quad \text{und} \quad L = \frac{\mathfrak{L}}{\mu}, \quad M = \frac{\mathfrak{M}}{\mu}, \quad N = \frac{\mathfrak{N}}{\mu}.$$

Doch sind mit diesen neuen Buchstaben auch neue Vorstellungen verbunden. Während nämlich $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die elektrischen Zustandscomponenten im Punkte (x, y, z) im Augenblick t bezeichnen, sollen die lateinischen Buchstaben

$$(5.) \qquad X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \quad Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \quad Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}$$

die Componenten derjenigen *Kraft* sein, von welcher eine *elektrische Masseneinheit* erfasst werden würde, wenn sie im Augenblick t an die Stelle (x, y, z) versetzt würde. Desgleichen sollen die lateinischen Buchstaben

$$(6.) \qquad L = \frac{\mathfrak{L}}{\mu}, \quad M = \frac{\mathfrak{M}}{\mu}, \quad N = \frac{\mathfrak{N}}{\mu}$$

die Componenten derjenigen Kraft sein, von welcher eine *magnetische Masseneinheit* erfasst werden würde, falls sie im Augenblick t an die Stelle (x, y, z) versetzt würde.

Nach der Hertz'schen Vorstellungsweise sollen also die Zustände $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ *und* $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *an demjenigen Ort, an welchem sie vorhanden sind, gewisse Kräfte* (X, Y, Z) *und* (L, M, N) *erzeugen; und diese Kräfte sollen die in* (5.), (6.) *angegebenen Werthe haben.* Zu Gunsten einer solchen Vorstellungsweise könnte etwa erinnert werden an die Theorie der Elasticität. Denn die sogenannte elastische Kraft ist ja ebenfalls nur abhängig vom augenblicklichen Zustande der gegebenen Substanz an der betrachteten Stelle.

Bemerkung. — Da es sich in diesem Paragraph nur darum handelt, von dem allgemeinen Charakter der Hertz'schen Theorie eine ungefähre Vorstellung zu geben, so habe ich gewisse Specialitäten dieser Theorie ganz bei Seite gesetzt. So z. B. habe ich mich durchweg auf den Fall *unkrystallinischer* Substanzen beschränkt. Auch habe ich, der Einfachheit willen, vorausgesetzt, dass die von Hertz mit X', Y', Z' bezeichneten, von der *anhomogenen* Beschaffenheit der Substanz abhängenden Kräfte [Hertz' Ges. Werke, Bd. 2, Seite 219] allenthalben $= 0$ seien.

Alsdann aber sind die Formeln (3.), (4.), (5.), (6.) in der That in voller Uebereinstimmung mit den betreffenden Hertz'schen Formeln [a. a. O. Seite 224]. Bezieht man nämlich jene Hertz'schen Formeln auf eine un-

krystallinische Substanz, und setzt man zugleich $X' = Y' = Z' = 0$, so lauten dieselben:

$$\mathfrak{L} = \mu L, \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X$$

und ferner:

$$u = \lambda X;$$

woraus durch Elimination von X die erste der Formeln (3.) sich ergiebt. — *Q. e. d.*

Solches constatirt, erkennt man nun ferner, dass die Formeln (1.), (2.) ebenfalls mit den betreffenden Hertz'schen Formeln [a. a. O. Seite 219] übereinstimmen. Dabei ist zu beachten, dass Hertz seinen Untersuchungen ein *negatives* Axensystem zu Grunde legt, während das von uns benutzte Axensystem stets ein *positives* ist. [Vgl. Seite 2].

Enthält die gegebene Substanz weder Stahl noch Eisen, noch Nickel, noch Cobalt, so wird μ (der Magnetisirungscoefficient) allenthalben nahezu $= 1$ sein. Setzt man aber $\mu = 1$, so ist nach (6.):

$$L = \mathfrak{L}, \quad M = \mathfrak{M}, \quad N = \mathfrak{N}. \tag{7.}$$

Aus der Hertz'schen Theorie ergeben sich alsdann, bei Vorhandensein eines geschlossenen elektrischen Stromes und nach Eintritt des stationären Zustandes, für die Werthe der L, M, N in irgend einem Punkte (x, y, z) ausserhalb jenes Stromes folgende Formeln:

$$L = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{8.}$$

wo P die Bedeutung hat:

$$P = \pm AJ\mathsf{K}. \quad \text{[Vgl. Hertz' Ges. W., Bd. 2, Seite 244].} \tag{9.}$$

Hier bezeichnet J die Stärke jenes elektrischen Stromes, und K die Oeffnung des vom Punkte (x, y, z) nach dem Strome gelegten Kegels.

Ohne auf die eigentliche Ableitung der Formeln (8.), (9.) hier näher eingehen zu wollen, sei Folgendes bemerkt: Die Kräfte L, M, N (8.) werden, weil sie wesentlich durch die Anwesenheit des Stromes J bedingt sind, zu bezeichnen sein als die *Wirkung* dieses Stromes; so dass man also sagen kann, vom Stromringe J werde auf eine im Punkte (x, y, z) concentrirt gedachte magnetische Masse $m = 1$, eine Wirkung ausgeübt, deren Componenten L, M, N darstellbar sind als die negativen Ableitungen der Function P (9.).

Hieraus aber folgt doch noch keineswegs, dass die umgekehrt von jener Masse $m = 1$ (x, y, z) auf den Ring J ausgeübte Wirkung ebenfalls durch irgend welche Ableitungen der Function P darstellbar sei. Kurz, es folgt hieraus noch keineswegs, dass man mit Hertz berechtigt sei, die Function P als das *Potential* der gegenseitigen Einwirkung anzusehen.

Bemerkung. — Auch würde es ganz fehlerhaft sein, bei derartigen Betrachtungen etwa an das Princip der Gleichheit der Action und Reaction



appelliren zu wollen. Denn ein solches Princip kann für die Hertz'sche Theorie nicht eher existiren, als bis dasselbe aus den Grundformeln und Grundvorstellungen dieser Theorie wirklich abgeleitet ist.

Ueber diesen ganz dunklen Punkt hinwegsehend, wollen wir (um den Darlegungen von Hertz überhaupt folgen zu können) einstweilen annehmen, der betreffende Beweis sei wirklich erbracht. Es sei also constatirt, dass ein Potential P der gegenseitigen Einwirkung wirklich existire, und dass dieses Potential P den in (9.) angegebenen Werth habe. Zufolge (9.) wird alsdann dieses Potential P proportional mit K, oder, wie Hertz sich ausdrückt, proportional mit der Anzahl derjenigen Kraftlinien sein, welche der magnetische Massenpunkt $m = 1\,(x, y, z)$ durch die Oeffnung des Ringes hindurchsendet. Allerdings bedarf diese Hertz'sche Ausdrucksweise eigentlich eines gewissen Zusatzes oder einer gewissen Modification. Man muss nämlich sagen: das Potential P sei proportional mit der Anzahl derjenigen Kraftlinien, welche der magnetische Massenpunkt durch die Oeffnung des Ringes hindurchsenden *würde*, falls der magnetische Massenpunkt *ganz allein* im Raume vorhanden wäre, falls also im ganzen Raume keine anderen Kraftlinien existirten, als solche, die von diesem Punkte ausgehen.

Wenn man nun aber auch den in Rede stehenden Satz in dieser Ausdrucksweise acceptirt, so folgt hieraus doch noch keineswegs, dass ein analoger Satz auch dann noch gelten werde, wenn man den magnetischen Massenpunkt durch *irgend ein anderes Object* ersetzt. Man wird also weder behaupten dürfen, dass zwischen einem solchen neuen Object und dem Stromringe J ein *Potential* existire, noch auch behaupten dürfen, dass dieses Potential proportional der Anzahl der Kraftlinien sei, welche jenes neue Object, für sich allein gedacht, durch die Oeffnung des Ringes hindurchsenden würde.

Trotzdem ist eine derartige Schlussfolgerung in der Hertz'schen Abhandlung vorhanden. Hertz ersetzt nämlich in der That den magnetischen Massenpunkt durch ein neues Object, und zwar durch einen zweiten Stromring J_1, und gelangt alsdann, mittelst jener Schlussfolgerung, zu dem Resultat, dass zwischen den beiden Stromringen J und J_1 ein *Potential* existire, und dass der Werth dieses Potentials dem F. Neumann'schen Ausdruck entspreche:

$$P = -A^2 J J_1 \iint \frac{\cos\varepsilon}{r} Ds Ds_1. \tag{10.}$$

Ueber den Energievorrath. — Wir kommen zu einer *neuen Grundvorstellung* der Hertz'schen Theorie, nämlich zum *Energievorrath* E der betrachteten Substanz. Hertz definirt diesen Energievorrath (ohne nähere Motivirung, ganz *ex abrupto*) durch folgende Formel:



$$(11.)\qquad \mathsf{E} = \int \left(\frac{\varepsilon(X^2 + Y^2 + Z^2)}{8\pi} + \frac{\mu(L^2 + M^2 + N^2)}{8\pi} \right) D\tau,$$

wofür man mit Rücksicht auf (5.), (6.) auch schreiben kann:

$$(12.)\qquad \mathsf{E} = \int \left(\frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} + \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu} \right) D\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ der gegebenen Substanz.

Besteht die betrachtete Substanz aus beliebig vielen elektrisch geladenen Conductoren und aus einem dieselben umgebenden nach allen Seiten hin ins Unendliche sich ausdehnenden homogenen isolirenden Medium, so wird der Ausdruck (12.), wie aus den betreffenden Entwicklungen der Hertz'schen Theorie sich ergiebt, folgendermassen darstellbar sein:

$$(12\text{a.})\qquad \mathsf{E} = \frac{1}{\varepsilon_a} \iint \frac{EDo \cdot E'Do'}{2r},$$ [vgl. Hertz' Ges. W., Bd. 2, Seite 238],

wo ε_a den constanten Dielektricitätscoefficienten jenes homogenen Mediums vorstellt. Dabei bezeichnen EDo und $E'Do'$ die auf irgend zwei Oberflächenelementen Do und Do' der Conductoren vorhandenen Elektricitätsmengen, ferner r den gegenseitigen Abstand dieser Elemente. Die erste Integration ist, bei festgehaltenen $E'Do'$, über alle EDo, sodann aber die zweite Integration über alle $E'Do'$ ausgedehnt zu denken.

Ohne auf die eigentliche Ableitung dieser Formel (12a.) näher eingehen zu wollen, sei Folgendes bemerkt: Die Formel (12a.) zeigt, dass in dem hier betrachteten speciellen Fall die Energie E, der Hauptsache nach, identisch ist mit dem Potential der ponderomotorischen Wirkungen. *Dementsprechend macht nun Hertz die Hypothese, dass eine solche Identität auch in allen andern Fällen, also ganz allgemein stattfinde.* Diese Hypothese scheint sich zu bestätigen für die gegenseitige Einwirkung magnetischer Körper.

Hingegen ergiebt sich aus dieser Hypothese — in directem Widerspruch mit aller Erfahrung —, dass das Potential derjenigen ponderomotorischen Wirkung, welche magnetische Körper und elektrische Ströme aufeinander ausüben, gleich *Null* sei, dass also magnetische Körper und elektrische Ströme *gar keine* ponderomotorische Wirkung aufeinander ausüben würden.

Ferner findet Hertz, auf Grund der genannten Hypothese, für das Potential der von zwei elektrischen Stromringen aufeinander ausgeübten ponderomotorischen Wirkung den bekannten F. Neumann'schen Ausdruck aber *mit falschem Vorzeichen*; was ebenfalls als ein directer Widerspruch mit aller Erfahrung zu bezeichnen ist.

Hertz sucht diese Widersprüche [a. a. O. Seite 247] durch die Bemerkung zu entkräften, dass der Energievorrath noch mit andern Vorgängen in Zusammenhang stünde, und also ein Theil desselben anderweitig, nämlich zu elektromotorischen Wirkungen verbraucht werde; wobei indessen dann wiederum gewisse Ersetzungen nöthig sind, die ebenso bedenklich sein dürften, wie die vorhin [auf Seite 338] von uns besprochenen. Wie wenig Hertz selber mit derartigen Betrachtungen zufrieden war, — das geht wohl am Deutlichsten daraus hervor, dass er in seiner zweiten Abhandlung etwas andre Wege eingeschlagen hat.

Auch hievon abgesehen dürfte zwischen der ersten und zweiten Hertz'schen Abhandlung ein wesentlicher Unterschied stattfinden. Während nämlich die Grössen X, Y, Z in der ersten Abhandlung bald als elektromotorische, bald als ponderomotorische Kräfte angesehen werden, scheinen dieselben in der zweiten Abhandlung nur als *elektromotorische* Kräfte aufzutreten. Analoges ist zu bemerken über die Grössen L, M, N.

§ 2.

Die zweite Hertz'sche Abhandlung: Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper (1890).

Die im Weltraum vorhandene ponderable Materie und Aethermaterie sind im Allgemeinen in Bewegung. Auch sind die Bewegungen dieser beiden Materien voneinander *unabhängig;* wie solches z. B. aus der Thatsache hervorgeht, dass man aus einem von fester ponderabler Masse umschlossenen Raume wohl die Luft nicht aber den Aether zu entfernen vermag.

In einem gegebenen Raumpunkt sind daher in jedwedem Zeitaugenblick im Ganzen *vier* Zustände zu unterscheiden, nämlich der elektrische und magnetische Zustand der daselbst vorhandenen ponderablen Materie, und ferner der elektrische und magnetische Zustand des daselbst vorhandenen Aethers; so dass also die eigentlich „*richtige*" Theorie mit all' diesen vier Zuständen zu rechnen hätte. [Hertz' Ges. Werke, Bd. 2, Seite 257].

Der Einfachheit halber beschränkt sich nun aber Hertz auf solche Fälle, in denen angenommen werden darf, dass der im Innern der ponderablen Materie enthaltene Aether *nur mit dieser zugleich* sich bewege; — also auf solche Fälle, in denen ponderable Materie und Aether zusammengenommen gewissermassen nur als *eine einzige Substanz* anzusehen sind. Alsdann hat man also in einem gegebenen Raumpunkt (x, y, z) in jedwedem Augenblick t nur noch *zwei* Zustände zu unterscheiden, nämlich den elektrischen und magnetischen Zustand der

soeben genannten einheitlichen Substanz. Ersterer soll mit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, letzterer mit $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ bezeichnet werden.

Auch wird alsdann im Raumpunkt (x, y, z) im Augenblick t immer nur von *einer* Geschwindigkeit die Rede sein können, nämlich von derjenigen Geschwindigkeit (α, β, γ), welche jene Substanz daselbst augenblicklich besitzt.

Will man die calorischen Zustände einer Flüssigkeit (etwa des Wassers) für den Fall untersuchen, dass die Flüssigkeit in *Bewegung* begriffen ist, so hat man die Fourier'sche Differentialgleichung (F.) Seite 334 durch folgende zu ersetzen:

$$\text{(FF.)} \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\vartheta)}{\partial z} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right);$$

wie solches von Fourier selber bereits bemerkt worden ist. [Vgl. Oeuvres de Fourier, Tome II, 1890, Pag. 600]. Hier bezeichnen α, β, γ die Geschwindigkeiten. Dabei ist von Fourier vorausgesetzt, dass die Grössen K, C, D völlig unveränderlich seien.

In entsprechender Weise werden nun auch die für die elektrischen und magnetischen Zustände geltenden Differentialgleichungen (1.), (2.) für den Fall einer in *Bewegung* begriffenen Substanz einer gewissen Abänderung zu unterwerfen sein. Und zwar findet Hertz, dass in solchem Falle die linken Seiten jener Gleichungen durch etwas andere Ausdrücke zu ersetzen seien. Nämlich

$$(13.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \text{ zu ersetzen durch: } \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z})}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right).$$

$$(14.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} \text{ zu ersetzen durch: } \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M})}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{N})}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right).$$

Analoges ist selbstverständlich von $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ zu sagen. Dabei sind α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten der Substanz im Punkte (x, y, z) im Augenblick t.

Die in solcher Weise abgeänderten Gleichungen (1.), (2.) können füglich als die *eigentlichen Hertz'schen Differentialgleichungen* bezeichnet werden. Wenn übrigens Hertz bemerkt, es sei nicht nöthig, das zu Grunde gelegte Axensystem als ein absolut ruhendes sich vorzustellen, so muss ich dem widersprechen. Nach meiner Rechnung werden nämlich diese eigentlichen Differentialgleichungen ihre Form ändern, sobald man das Axensystem $[x, y, z]$ durch ein anderes, gegen dieses in Bewegung begriffenes Axensystem $[\xi, \eta, \zeta]$ ersetzt.

Nach der früher [Seite 339] erwähnten Hypothese sollte das Potential der ponderomotorischen Kräfte im Wesentlichen identisch sein mit der Energie E der betrachteten Substanz. Diese Hypothese könnte

man offenbar (weil das Potential diejenige Function ist, deren *negative* Ableitungen die Kräfte sind) auch so aussprechen: *Die von den ponderomotorischen Kräften während eines Zeitelementes dt verrichtete Arbeit ist, der Hauptsache nach, $= -d\mathsf{E}$, wo $d\mathsf{E}$ den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs der Energie E vorstellt.*

Diese Hypothese führt nun aber, wie vorhin [Seite 339] gezeigt wurde, zu wenig befriedigenden Resultaten. Demgemäss mag dieselbe gegenwärtig abgeändert, nämlich durch folgende Hypothese ersetzt werden:

Hypothese. — *Die betrachtete Substanz sei in irgend welcher Bewegung begriffen; so dass also ihre einzelnen substantiellen Punkte irgend welche Geschwindigkeiten α, β, γ besitzen. Alsdann werden die ponderomotorischen Kräfte, mit denen die Substanz selber auf ihre einzelnen substantiellen Punkte einwirkt, während der Zeit dt eine gewisse Arbeit verrichten. Und zwar wollen wir annehmen, dass diese Arbeit*

$$= -\delta\mathsf{E} \tag{15.}$$

sei, wo $\delta\mathsf{E}$ denjenigen partiellen Zuwachs vorstellt, den die Energie E der Substanz während der Zeit dt, blos allein in Folge der Geschwindigkeiten α, β, γ erfährt.

Auf Grund dieser Hypothese wollen wir nun aus dem analytischen Ausdruck der Energie E (12.) die ponderomotorischen Kräfte zu berechnen suchen. Jener Ausdruck besteht aber aus zwei Theilen:

$$\mathsf{E} = \mathsf{E}_e + \mathsf{E}_m, \tag{16.}$$

wo E_e und E_m die Bedeutungen haben:

$$\mathsf{E}_e = \int \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} D\tau, \quad \text{und} \quad \mathsf{E}_m = \int \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu} D\tau; \tag{17.}$$

so dass also E_e elektrischen, und E_m magnetischen Ursprungs ist. Demgemäss werden die aus E abzuleitenden ponderomotorischen Kräfte in zwei entsprechende Theile zerfallen, von denen wiederum der eine elektrischen, der andre magnetischen Ursprungs ist. Uebrigens wollen wir bei der Berechnung jener ponderomotorischen Kräfte annehmen, dass die gegebene Substanz den ganzen unendlichen Weltraum erfüllt, und dass die Werthe der

$$u, v, w, \ \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \ \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \ \text{ und } \ \alpha, \beta, \gamma \tag{18.}$$

im Unendlichen stets $= 0$ bleiben. Auch wollen wir mit Helmholtz annehmen, dass jedweder substantielle Punkt seinen Werth von ε für alle Zeiten *unverändert* beibehält, und dass Analoges auch von μ gelte. Diese Annahme über ε und μ hat Hertz nicht gleich von Anfang gemacht, wohl aber später einfliessen lassen [nämlich beim Uebergange von seinen Formeln a. a. O. Seite 282 zu denen auf Seite 284].



Jedwedes Substanzelement wird (weil die Substanz in Bewegung sein soll) im Laufe der Zeit, seiner Lage, Grösse und Gestalt nach, sich ändern. Bezeichnet man also das Volumen eines solchen Substanzelementes mit $D\tau$, so wird der diesem Element zugehörige Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}\,D\tau$$

während der Zeit dt anwachsen um:

$$\left(\frac{2(\mathfrak{X}d\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}d\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}d\mathfrak{Z})}{8\pi\varepsilon}-\frac{(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)d\varepsilon}{8\pi\varepsilon^2}\right)D\tau+\frac{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}\,d(D\tau);$$

wo indessen $d\varepsilon=0$ ist, zufolge der soeben über ε gemachten Annahme. Auch ist zu beachten, dass $d(D\tau)$ den Werth hat:

$$d(D\tau)=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)D\tau\,dt. \quad \text{[Vgl. Seite 250 (17.)]}$$

Demgemäss erhält man aus (17.) für den der Zeit dt entsprechenden Zuwachs $d\mathsf{E}_e$ folgenden Ausdruck:

$$(19.)\quad d\mathsf{E}_e=\int\left\{\frac{2(\mathfrak{X}d\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}d\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}d\mathfrak{Z})}{8\pi\varepsilon}+\frac{(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)dt}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right\}D\tau,$$

die Integration, ebenso wie in (17.), ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes.

Was nun ferner den in (15.) genannten *partiellen* Zuwachs $\delta\mathsf{E}=\delta\mathsf{E}_e+\delta\mathsf{E}_m$ betrifft, so wird man offenbar für $\delta\mathsf{E}_e$ folgenden mit (19.) parallel laufenden Ausdruck erhalten:

$$(20.)\quad \delta\mathsf{E}_e=\int\left\{\frac{2(\mathfrak{X}\delta\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\delta\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}\delta\mathfrak{Z})}{8\pi\varepsilon}+\frac{(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)dt}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right\}D\tau,$$

wo alsdann unter $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$ diejenigen partiellen Zuwüchse zu verstehen sind, welche $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, *blos in Folge der Geschwindigkeiten* α, β, γ, erfahren. Für diese $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$ findet nun Hertz folgende Werthe*):

$$\delta\mathfrak{X}=\left[\left(\mathfrak{X}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\mathfrak{Y}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\mathfrak{Z}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)-\mathfrak{X}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]dt,$$

$$(21.)\quad \delta\mathfrak{Y}=\left[\left(\mathfrak{X}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\mathfrak{Y}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\mathfrak{Z}\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)-\mathfrak{Y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]dt,$$

$$\delta\mathfrak{Z}=\left[\left(\mathfrak{X}\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\mathfrak{Y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\mathfrak{Z}\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)-\mathfrak{Z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)\right]dt.$$

*) Zu bemerken ist, dass Hertz [Ges. W., Bd. 2, Seite 279] nicht die Werthe der $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$, sondern die mit diesen *völlig analogen* Werthe der $\delta\mathfrak{L}$, $\delta\mathfrak{M}$, $\delta\mathfrak{N}$ angiebt. Noch sei bemerkt, dass diese Werthe (21.) identisch sind mit denen, zu welchen wir selber im gegenwärtigen Abschnitt [Seite 370 (9.)] gelangen werden.

Multiplicirt man diese Formeln mit $2\mathfrak{X}$, $2\mathfrak{Y}$, $2\mathfrak{Z}$, und addirt, so erhält man sofort:

$$(22.)\quad \overline{2(\mathfrak{X}\delta\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}\delta\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}\delta\mathfrak{Z})} = 2\left[\mathfrak{X}^2\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+\cdots\right]dt$$
$$-2(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)dt;$$

so dass also die Formel (20.) folgende Gestalt erhält:

$$(23.)\quad \frac{\delta \mathsf{E}_e}{dt} = \int \frac{2\left[\mathfrak{X}^2\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+\cdots\right]-(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)}{8\pi\varepsilon}D\tau,$$

wofür man zur augenblicklichen Abkürzung schreiben kann:

$$(24.)\quad \frac{\delta \mathsf{E}_e}{dt} = \int\left[p_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+p_{12}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)+\cdots\right]D\tau,\quad \text{[vgl. (27a.)]}.$$

Diese Formel (24.) ist nun offenbar auch so darstellbar:

$$\frac{\delta \mathsf{E}_e}{dt} = \int\left[\left(p_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+p_{12}\frac{\partial\beta}{\partial x}+p_{13}\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+\cdots\right]D\tau,$$

oder auch so:

$$\frac{\delta \mathsf{E}_e}{dt} = \int\left[\frac{\partial(p_{11}\alpha+p_{12}\beta+p_{13}\gamma)}{\partial x}+\cdots\right]D\tau$$
$$-\int\left[\left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x}\alpha+\frac{\partial p_{12}}{\partial x}\beta+\frac{\partial p_{13}}{\partial x}\gamma\right)+\cdots\right]D\tau.$$

Hieraus aber folgt mittelst einer bekannten Transformation:

$$\frac{\delta \mathsf{E}_e}{dt} = -\int[(p_{11}\alpha+p_{12}\beta+p_{13}\gamma)\cos(n,x)+\cdots]\,Do$$
$$-\int\left[\left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x}\alpha+\frac{\partial p_{12}}{\partial x}\beta+\frac{\partial p_{13}}{\partial x}\gamma\right)+\cdots\right]D\tau.$$

Das erste dieser beiden Integrale ist ausgedehnt zu denken über alle Elemente Do derjenigen *unendlich fernen* Fläche, von welcher der ganze unendliche Raum umgrenzt gedacht werden kann; dabei ist n die auf Do errichtete innere Normale. Folglich ist dieses Integral $=0$; denn die α, β, γ sollen nach (18.) im Unendlichen stets $=0$ sein.

Man erhält also schliesslich:

$$\frac{\delta \mathsf{E}_e}{dt} = -\int\left[\left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x}\alpha+\frac{\partial p_{12}}{\partial x}\beta+\frac{\partial p_{13}}{\partial x}\gamma\right)+\cdots\right]D\tau,$$

oder etwas anders geordnet:

$$(25.)\quad -\delta\mathsf{E}_e = \int\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x}+\frac{\partial p_{12}}{\partial y}+\frac{\partial p_{13}}{\partial z}\right)\alpha\,dt+\left(\frac{\partial p_{21}}{\partial x}+\frac{\partial p_{22}}{\partial y}+\frac{\partial p_{23}}{\partial z}\right)\beta dt\\ +\left(\frac{\partial p_{31}}{\partial x}+\frac{\partial p_{32}}{\partial y}+\frac{\partial p_{33}}{\partial z}\right)\gamma dt\end{matrix}\right\}D\tau.$$

Nach der Hypothese (15.) soll nun aber $-\delta \mathsf{E}$ identisch sein mit der Arbeit der ponderomotorischen Kräfte. Demgemäss wird das hier berechnete $-\delta \mathsf{E}_e$ (25.) identisch sein mit der Arbeit der ponderomotorischen Kräfte *elektrischen Ursprungs;* so dass man also zu folgendem Resultat gelangt [vgl. d. Bemerkung auf Seite 378]:

Erster Satz. — *Bezeichnet man diejenigen ponderomotorischen Kräfte elektrischen Ursprungs, welche die Substanz selber auf das im Volumen $D\tau$ enthaltene Substanzelement ausübt, mit*

$$\Xi_e D\tau, \quad \mathsf{H}_e D\tau, \quad \mathsf{Z}_e D\tau, \tag{26.}$$

so gelten folgende Formeln:

$$\begin{cases} \Xi_e D\tau = \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z}\right) D\tau, \\ \mathsf{H}_e D\tau = \left(\frac{\partial p_{21}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z}\right) D\tau, \\ \mathsf{Z}_e D\tau = \left(\frac{\partial p_{31}}{\partial x} + \frac{\partial p_{32}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z}\right) D\tau, \end{cases} \tag{27.}$$

wo die $p_{11}, p_{12}, \ldots$ [vgl. den Uebergang von (23.) zu (24.)] die Bedeutungen haben:

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{2\mathfrak{X}^2 - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{22} = \frac{2\mathfrak{Y}^2 - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{33} = \frac{2\mathfrak{Z}^2 - (\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)}{8\pi\varepsilon}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{23} = \frac{2\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{31} = \frac{2\mathfrak{Z}\mathfrak{X}}{8\pi\varepsilon}, \\ p_{12} = \frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}. \end{cases} \tag{27a.}$$

In ganz analoger Weise wird man nun, auf Grund der Hypothese (15.) und auf Grund der Ausdrücke (16.), (17.), offenbar auch zu folgendem Satz gelangen:

Zweiter Satz. — *Sind*

$$\Xi_m D\tau, \quad \mathsf{H}_m D\tau, \quad \mathsf{Z}_m D\tau \tag{28.}$$

diejenigen ponderomotorischen Kräfte magnetischen Ursprungs, welche die Substanz selber auf das im Volumen $D\tau$ enthaltene Substanzelement ausübt, so gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} \Xi_m D\tau &= \left(\frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial q_{12}}{\partial y} + \frac{\partial q_{13}}{\partial z}\right) D\tau, \\ \mathsf{H}_m D\tau &= \left(\frac{\partial q_{21}}{\partial x} + \frac{\partial q_{22}}{\partial y} + \frac{\partial q_{23}}{\partial z}\right) D\tau, \\ \mathsf{Z}_m D\tau &= \left(\frac{\partial q_{31}}{\partial x} + \frac{\partial q_{32}}{\partial y} + \frac{\partial q_{33}}{\partial z}\right) D\tau, \end{aligned} \tag{29.}$$

wo die $q_{11}, q_{12}, \ldots$ die Bedeutungen haben:

$$(29a.)\quad \begin{cases} q_{11} = \dfrac{2\mathfrak{L}^2 - (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)}{8\pi\mu}, \\ q_{22} = \dfrac{2\mathfrak{M}^2 - (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)}{8\pi\mu}, \\ q_{33} = \dfrac{2\mathfrak{N}^2 - (\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)}{8\pi\mu}, \end{cases} \qquad \begin{cases} q_{23} = \dfrac{2\mathfrak{M}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}, \\ q_{31} = \dfrac{2\mathfrak{N}\mathfrak{L}}{8\pi\mu}, \\ q_{12} = \dfrac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}. \end{cases}$$

Es ist im Ganzen schwer, den ausserordentlich anregenden, dabei aber doch häufig dunkel bleibenden Worten des berühmten Physikers Schritt für Schritt zu folgen. Ich kann daher z. B. nicht mit Bestimmtheit behaupten, dass die Hypothese (15.) wirklich mit den Hertz'schen Vorstellungen völlig übereinstimmt. Es ist mir sogar fraglich, ob die Sätze (27.) und (29.) mit den betreffenden Hertz'schen Formeln [Ges. W., Bd. 2, Seite 284] in vollem Einklang sind. Im Allgemeinen aber glaube ich, bei meiner Darstellung wenigstens diejenige *Richtung* verfolgt zu haben, welche Hertz im Sinne gehabt hat.

Noch sei bemerkt, dass die Ergebnisse (27.) und (29.) völlig übereinstimmen mit demjenigen Satz, zu welchem wir im folgenden Abschnitt [auf Seite 396], auf Grund der *Helmholtz'schen Theorie*, gelangen werden.

§ 3.

Die Helmholtz'sche Abhandlung: Ueber das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik (1892).

In dieser Abhandlung ist es Helmholtz gelungen, die vereinzelten Formeln, Hypothesen und Sätze der Hertz'schen Abhandlungen unter einen einheitlichen Gesichtspunkt zu bringen, dieselben nämlich darzustellen als den Ausfluss eines gewissen *Minimalprincips*.

Wenn man in der Physik an allen transcendenten (nicht weiter erklärbaren) Vorstellungen, wie z. B. an der Vorstellung der Fernkräfte Anstoss nimmt, und derartige Vorstellungen ganz zu beseitigen bestrebt ist, — so würde allerdings das Helmholtz'sche Minimalprincip, weil es seinem ganzen Wesen nach eine noch viel höhere Transcendenz repräsentirt, als ein *Rückschritt* zu bezeichnen sein.

Derartige Bestrebungen aber sind nach meiner Ansicht ebenso ungereimt wie aussichtslos. Und ich erblicke daher meinerseits in jenem Helmholtz'schen Princip einen *eminenten Fortschritt*, insofern uns dasselbe in den Stand setzt, jene von Faraday, Maxwell, Heaviside, Hertz u. A. zu Tage geförderten *membra disjecta* zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden.

Von dieser Helmholtz'schen Theorie soll nun im gegenwärtigen und in den weiter folgenden Abschnitten die Rede sein. Dabei werde

ich, um an Bekanntes anzuknüpfen, mit den *Euler'schen und Lagrange-schen aërodynamischen Differentialgleichungen* beginnen, und dabei namentlich der höchst merkwürdigen Entdeckungen zu gedenken haben, welche Helmholtz in diesem Gebiete, im Laufe seiner elektrodynamischen Untersuchungen (gewissermassen beiläufig) gemacht hat.

§ 4.

Ueber die Variationen in der Aërodynamik und Hydrodynamik, und über den verschiedenen Charakter, den diese Variationen besitzen werden, je nachdem man der Vorstellungsweise von Lagrange oder der von Euler sich anschliesst.

Bei der Bewegung elastischer oder liquider Flüssigkeiten hat man es mit Functionen von x, y, z, t zu thun. Dabei aber laufen zwei verschiedene Vorstellungsweisen nebeneinander her, von denen man, je nach Umständen, bald der einen, bald der andern den Vorzug giebt.

Entweder nämlich wird man nach Lagrange die x, y, z als die mit der Zeit sich ändernden Coordinaten eines *bestimmten Massenpunktes* m sich denken. In diesem Fall pflegt man zu setzen:

$$\text{(L.)} \quad x = \varphi(A, B, C, t), \quad y = \psi(A, B, C, t), \quad z = \chi(A, B, C, t),$$

wo A, B, C die Anfangscoordinaten des Punktes m, etwa die Werthe seiner Coordinaten zur Zeit $t = 0$ vorstellen. Ist von unendlich vielen Massenpunkten m die Rede, die zusammengenommen ein unendlich kleines *Flüssigkeitselement* DM repräsentiren, so wird man das Volumen dieses Elementes DM mit $D\tau$ bezeichnen können; so dass also dieses $D\tau$ seiner Lage, Grösse und Gestalt nach im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick sich ändert.

Oder aber man wird, nach Euler, die x, y, z als unabhängig von der Zeit, als Coordinaten eines *festen Raumpunktes* ansehen. Gleichzeitig wird man alsdann unter $D\tau$ ein *festes Raumelement* verstehen, durch welches die betrachtete Flüssigkeit hindurchwandert; so dass also dieses Element $D\tau$ seiner Lage, Grösse und Gestalt nach constant bleibt, hingegen seinem materiellen Inhalt nach von Augenblick zu Augenblick sich ändert.

Bemerkung. — Unter einem „*festen Raumpunkt*“ ist ein Punkt zu verstehen, dessen Coordinaten in Bezug auf das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem *unveränderlich* sind. Ferner ist unter einem „*festen Raumelement*“ ein solches zu verstehen, welches aus lauter festen Raumpunkten besteht. Dabei aber bleibt völlig dahingestellt, ob jenes der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem in absoluter Ruhe ist, oder in irgend welcher Bewegung sich befindet.



Correctur. — Streng genommen hat man die Euler'sche Vorstellungsweise als *erste* Euler'sche Conception (1755), und die sogenannte Lagrange'sche Vorstellungsweise als *zweite* Euler'sche Conception (1759) zu bezeichnen. Denn in Wirklichkeit rühren beide Conceptionen von Euler her; wie solches von *Riemann* und *H. Hankel* bemerkt worden ist. [Vgl. *H. Hankel: „Zur allg. Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten“.* Gekrönte Preisschrift, Göttingen, 1861, daselbst Seite 1—3].

Je nachdem man für die Lagrange'sche oder für die Euler'sche Vorstellungsweise sich entscheidet, gestalten sich die Dinge sehr verschieden bei Bildung der sogenannten *Variationen*, d. i. in solchen Fällen, wo, wie z. B. bei Anwendung des Hamilton'schen Princips, neben der *wirklichen* Bewegung, noch eine zweite, nur *fingirte* Bewegung in Betracht zu ziehen ist. Um näher hierauf einzugehen, wird es gut sein, zunächst

Die Lagrange'sche Vorstellungsweise zu adoptiren. Man denke sich in den Functionen (L.) irgend welchen Parameter ϑ enthalten:

$$(1.)\quad x=\varphi(A,B,C,t,\vartheta),\quad y=\psi(A,B,C,t,\vartheta),\quad z=\chi(A,B,C,t,\vartheta),$$

ertheile sodann diesem Parameter ϑ einen unendlich kleinen Zuwachs ε, und bezeichne die so sich ergebenden neuen Werthe der Coordinaten mit x', y', z':

$$(2.)\quad x'=\varphi(A,B,C,t,\vartheta+\varepsilon),\ y'=\psi(A,B,C,t,\vartheta+\varepsilon),\ z'=\chi(A,B,C,t,\vartheta+\varepsilon).$$

Man betrachte nun die Formeln (1.) als die Gleichungen der *wirklichen*, andrerseits aber die Formeln (2.) als die Gleichungen einer blos *fingirten* Bewegung. Sind mithin α, β, γ und α', β', γ' die Geschwindigkeitscomponenten bei der einen und bei der andern Bewegung, so gelten z. B. für α und α' die Ausdrücke:

$$(3.)\qquad \alpha=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(A,B,C,t,\vartheta)}{\partial t},$$

$$(4.)\qquad \alpha'=\frac{\partial x'}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(A,B,C,t,\vartheta+\varepsilon)}{\partial t}.$$

Unter einer *Variation* $\mathfrak{d}$ versteht man bekanntlich den Unterschied derjenigen beiden Werthe, welche ein und dieselbe Grösse bei der wirklichen und bei der fingirten Bewegung besitzt*). Demgemäss werden z. B. die Variationen von x und α folgendermassen lauten:

*) Wenigstens dürften einer solcher Definition der Variation wohl keine ernstlichen Bedenken entgegenstehen. Da das δ im vorliegenden Werke bereits seine ganz bestimmte Bedeutung erhalten hat (nämlich zur Bezeichnung der convectiven Aenderungen dient), so werden wir zur Andeutung der Variationen das Zeichen $\mathfrak{d}$ benutzen. Ich möchte bitten, die Einführung dieses neuen Zeichens als einen Nothbehelf entschuldigen zu wollen, und dasselbe beim Lesen der Formeln als „Delta“ auszusprechen.

(5.) $$\mathfrak{d}x = x' - x,$$

(6.) $$\mathfrak{d}\alpha = \alpha' - \alpha.$$

Hieraus aber ergiebt sich, indem man für x, x', α, α' die Werthe (1.), (2.), (3.), (4.) substituirt, sofort:

(7.) $$\mathfrak{d}x = \frac{\partial\varphi(A, B, C, t, \vartheta)}{\partial\vartheta}\,\varepsilon,$$

(8.) $$\mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial^2\varphi(A, B, C, t, \vartheta)}{\partial t\,\partial\vartheta}\,\varepsilon.$$

Nun ergiebt sich aus (7.), (8.) sofort:

(9.) $$\mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial\,\mathfrak{d}x}{\partial t};$$

und in analoger Beziehung werden offenbar $\mathfrak{d}\beta$ und $\mathfrak{d}y$ zu einander stehen, ebenso $\mathfrak{d}\gamma$ und $\mathfrak{d}z$. Schliesslich kann man über die Grössen ϑ, ε hinwegsehen, nämlich dieselben als gegebene Constanten sich denken; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Satz. — *Man versetze sich in die Lagrange'sche Vorstellungsweise, und betrachte also sämmtliche Grössen, nämlich die Coordinaten x, y, z und Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ der einzelnen Massenpunkte, sowie auch die betreffenden Variationen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ und $\mathfrak{d}\alpha$, $\mathfrak{d}\beta$, $\mathfrak{d}\gamma$, als Functionen der vier Grundvariablen A, B, C, t* [*vgl.* (L.) *Seite 347*]. *Alsdann werden zwischen diesen Variationen folgende Beziehungen stattfinden:*

(10.) $$\mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial\,\mathfrak{d}x}{\partial t}, \qquad \mathfrak{d}\beta = \frac{\partial\,\mathfrak{d}y}{\partial t}, \qquad \mathfrak{d}\gamma = \frac{\partial\,\mathfrak{d}z}{\partial t}.$$

Verlässt man aber die Lagrange'sche Vorstellungsweise und geht man über zur Euler'schen Vorstellungsweise, so werden, wie sich im Folgenden zeigen wird, die Relationen (10.) *durch ganz andere und viel complicirtere Relationen zu ersetzen sein.*

Um von hier aus zur Euler'schen Vorstellungsweise zu gelangen, muss man an Stelle von A, B, C, t die Argumente x, y, z, t einführen, was zu bewerkstelligen ist mittelst der Gleichungen (1.). Man wird nämlich für A, B, C überall diejenigen Werthe

(f.) $$A = \mathfrak{F}(x, y, z, t, \vartheta), \quad B = \mathfrak{G}(x, y, z, t, \vartheta), \quad C = \mathfrak{H}(x, y, z, t, \vartheta)$$

zu substituiren haben, welche durch Auflösung jener Gleichungen (1.) sich ergeben.

Ebenso wie nun die Gleichungen (f.) die Auflösungen der Gleichungen (1.) sind, ebenso werden offenbar auch umgekehrt jene Gleichungen (1.) als die Auflösungen der Gleichungen (f.) anzusehen sein. Folglich werden die Gleichungen (f.) *identisch* erfüllt sein, wenn man in ihnen für x, y, z die Werthe (1.) substituirt. Nach Ausführung

dieser Substitution wird also z. B. die *erste* der Gleichungen (f.) gültig sein für ganz beliebige Werthe von A, B, C, t, ϑ, mithin z. B. nach A differenzirbar sein, ebenso nach B, C, t, ϑ. In solcher Weise ergiebt sich, und zwar durch Differentiation nach t:

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t},$$

eine Formel, die man, weil $\mathfrak{F}$ [vgl. (f.)] den Werth von A repräsentirt, auch so schreiben kann:

$$0 = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Analoges ist zu bemerken mit Bezug auf die *zweite* und die *dritte* der Formeln (f.); so dass man also im Ganzen zu folgenden drei Formeln gelangt:

$$\text{(g.)}\qquad \begin{cases} 0 = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}, \\ 0 = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t}, \\ 0 = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t}. \end{cases}$$

Ebenso wie diese Formeln (g.) durch Differentiation der vorhin genannten identischen Gleichungen nach t erhalten sind, in genau derselben Art wird man offenbar durch Differentiation jener identischen Gleichungen nach ϑ zu folgenden Formeln gelangen:

$$\text{(h.)}\qquad \begin{cases} 0 = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial A}{\partial \vartheta}, \\ 0 = \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial B}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial B}{\partial \vartheta}, \\ 0 = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial C}{\partial \vartheta}. \end{cases}$$

Nach Aufstellung dieser Hülfsformeln (f.), (g.), (h.), mögen jetzt zuvörderst die Ausdrücke (1.), (3.), (7.) notirt sein:

$$\text{(11.)}\quad x = \varphi(A, B, C, t, \vartheta),\quad \alpha = \frac{\partial \varphi(A, B, C, t, \vartheta)}{\partial t},\quad \mathfrak{d}x = \varepsilon\frac{\partial \varphi(A, B, C, t, \vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Ferner mögen diejenigen Gestalten, welche diese Ausdrücke (11.) durch Substitution der Werthe (f.) erhalten, bezeichnet gedacht werden mit:

$$\text{(12.)}\qquad [x],\quad [\alpha],\quad [\mathfrak{d}x];$$

so dass also diese Grössen (12.) nur allein von x, y, z, t, ϑ, ε abhängen.

Selbstverständlich sind die Grössen (11.) und (12.), an und für sich, einander gleich. Grosse Unterschiede aber finden statt zwischen ihren *Ableitungen*. So z. B. sind die partiellen Ableitungen von α und $\mathfrak{d}x$

nach x offenbar beide $= 0$, während andererseits die nach x genommenen partiellen Ableitungen von $[\alpha]$ und $[\mathfrak{b}x]$ im Allgemeinem irgend welche von 0 verschiedenen Werthe besitzen werden.

Aus (11.), (12.) ergiebt sich nun sofort:

$$\frac{\partial[\alpha]}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial x},$$

$$\frac{\partial[\alpha]}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial y},$$

$$\frac{\partial[\alpha]}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial z},$$

$$\frac{\partial[\alpha]}{\partial \vartheta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial \vartheta}.$$

Multiplicirt man diese vier Formeln respective mit $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial y}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial z}{\partial \vartheta}$ und 1, und addirt, so werden die drei ersten Colonnen rechter Hand, zufolge der Hülfsformeln (h.), *verschwinden*; so dass man also erhält:

$$(13.)\qquad \frac{\partial[\alpha]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial[\alpha]}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vartheta} + \frac{\partial[\alpha]}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial[\alpha]}{\partial \vartheta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial \vartheta}.$$

Ebenso wie hier die Grösse $[\alpha]$ behandelt ist, in ganz analoger Weise lässt sich die Grösse $[\mathfrak{b}x]$ behandeln. In der That erhält man aus (11.), (12.) folgende Formeln:

$$\frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial x} = \varepsilon\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial y} = \varepsilon\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right],$$

$$\frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial z} = \varepsilon\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial t} = \varepsilon\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial A}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial B}\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial C}\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial t}\right].$$

Multiplicirt man diese vier Formeln der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ und 1, und addirt, so werden die drei ersten Colonnen rechter Hand, zufolge der Hülfsformeln (g.), *verschwinden*; so dass man also erhält:

$$(14.)\qquad \frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial[\mathfrak{b}x]}{\partial t} = \varepsilon\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial \vartheta\,\partial t}.$$

Die rechten Seiten der beiden Gleichungen (13.) und (14.) sind, bis auf den Factor ε, unter einander identisch. Analoges gilt daher von ihren linken Seiten; so dass man zu folgender Formel gelangt:

$$(15.)\quad \frac{\partial[\alpha]}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\varepsilon\right) + \frac{\partial[\alpha]}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\varepsilon\right) + \frac{\partial[\alpha]}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\varepsilon\right) + \left(\frac{\partial[\alpha]}{\partial \vartheta}\varepsilon\right) =$$

$$= \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial t}.$$

Nun ist aber nach (11.):

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \beta, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \gamma,$$

und ferner, ebenfalls nach (11.):

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\varepsilon = \mathfrak{d}x, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\varepsilon = \mathfrak{d}y, \quad \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\varepsilon = \mathfrak{d}z;$$

so dass man also die Gleichung (15.) auch so schreiben kann:

$$(16.)\quad \frac{\partial[\alpha]}{\partial x}\mathfrak{d}x + \frac{\partial[\alpha]}{\partial y}\mathfrak{d}y + \frac{\partial[\alpha]}{\partial z}\mathfrak{d}z + \frac{\partial[\alpha]}{\partial \vartheta}\varepsilon =$$

$$= \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial x}\alpha + \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial y}\beta + \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial z}\gamma + \frac{\partial[\mathfrak{d}x]}{\partial t}.$$

Die in dieser Gleichung (16.) auftretenden Grössen:

$$(17.)\qquad [\mathfrak{d}x], \quad [\alpha] \quad \text{und} \quad \frac{\partial[\alpha]}{\partial \vartheta}\varepsilon$$

werden offenbar im Sinne der Euler'schen Vorstellungsweise kurzweg mit

$$(18.)\qquad \mathfrak{d}x, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{d}\alpha$$

zu bezeichnen sein. Denn bei der Euler'schen Vorstellungsweise sind die Variationen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ und die Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ als Functionen von x, y, z, t, respective als Functionen von x, y, z, t, ϑ aufzufassen. Auch werden bei der Euler'schen Vorstellungsweise unter $\mathfrak{d}\alpha$, $\mathfrak{d}\beta$, $\mathfrak{d}\gamma$ die Zuwüchse zu verstehen sein, welche diese von x, y, z, t, ϑ abhängenden Functionen α, β, γ durch eine kleine Aenderung $d\vartheta = \varepsilon$ des Argumentes ϑ erfahren.

Mit Rücksicht auf (17.), (18.) geht nun die Gleichung (16.) über in:

$$(19.)\quad \frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathfrak{d}x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\mathfrak{d}y + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\mathfrak{d}z + \mathfrak{d}\alpha =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial t};$$

so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Man denke sich, im Einklang mit der Euler'schen Vorstellungsweise, die Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ und ebenso auch die Variationen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ und $\mathfrak{d}\alpha$, $\mathfrak{d}\beta$, $\mathfrak{d}\gamma$ als Functionen der Coordinaten und der Zeit:*

$$(20.)\quad\begin{cases} \alpha = \alpha(x, y, z, t), & \beta = \beta(x, y, z, t), & \gamma = \gamma(x, y, z, t), \\ \mathfrak{d}x = f(x, y, z, t), & \mathfrak{d}y = g(x, y, z, t), & \mathfrak{d}z = h(x, y, z, t), \\ \mathfrak{d}\alpha = F(x, y, z, t), & \mathfrak{d}\beta = G(x, y, z, t), & \mathfrak{d}\gamma = H(x, y, z, t). \end{cases}$$

Alsdann werden zwischen diesen Variationen folgende Beziehungen stattfinden [*vgl.* (19.)]:

$$(21.)\quad\begin{cases} \mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathfrak{d}x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\mathfrak{d}y + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\mathfrak{d}z\right), \\ \mathfrak{d}\beta = \frac{\partial \mathfrak{d}y}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{d}y}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{d}y}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{d}y}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\mathfrak{d}x + \frac{\partial \beta}{\partial y}\mathfrak{d}y + \frac{\partial \beta}{\partial z}\mathfrak{d}z\right), \\ \mathfrak{d}\gamma = \frac{\partial \mathfrak{d}z}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{d}z}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{d}z}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{d}z}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\mathfrak{d}x + \frac{\partial \gamma}{\partial y}\mathfrak{d}y + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\mathfrak{d}z\right). \end{cases}$$

Uebrigens kann man die erste dieser drei Formeln (21.) *auch so schreiben:*

$$(22.)\quad \mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\alpha\,\mathfrak{d}x)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\,\mathfrak{d}x)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\,\mathfrak{d}x)}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial(\alpha\,\mathfrak{d}x)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\,\mathfrak{d}y)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha\,\mathfrak{d}z)}{\partial z}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\mathfrak{d}x + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{d}y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{d}z}{\partial z}\right);$$

und hieraus ergiebt sich sofort:

$$(23.)\quad \mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{d}x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{d}y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{d}z}{\partial z}\right) + \mathfrak{d}\alpha_0,$$

falls man nämlich unter $\mathfrak{d}\alpha_0$ *folgenden Ausdruck versteht:*

$$(23\text{a.})\quad \mathfrak{d}\alpha_0 = \frac{\partial(\beta\,\mathfrak{d}x - \alpha\,\mathfrak{d}y)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\,\mathfrak{d}x - \alpha\,\mathfrak{d}z)}{\partial z} - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\mathfrak{d}x.$$

Diese wichtigen Formeln verdanken wir Helmholtz. Sie sind im Jahre 1892 von Helmholtz auf einem höchst merkwürdigen Wege gefunden worden, den ich aber mehr als eine Divination denn als eine legitime Ableitung bezeichnen möchte. Man findet diese Formeln, und zwar in der Gestalt (23.), (23a.), in Helmholtz' Wiss. Abh. Bd. 3, Seite 497. Die Buchstaben sind dort genau dieselben, nur mit dem Unterschiede, dass die Variationen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ dort mit $\mathfrak{d}\xi$, $\mathfrak{d}\eta$, $\mathfrak{d}\zeta$ bezeichnet sind.

Diese Einführung der Zeichen ξ, η, ζ ist offenbar durchaus berechtigt. Denn wenn wir z. B. zurückblicken auf die Formeln (20.):

$$(\text{f.})\quad \mathfrak{d}x = f(x, y, z, t), \quad \mathfrak{d}y = g(x, y, z, t), \quad \mathfrak{d}z = h(x, y, z, t),$$

so haben wir hier offenbar die Buchstaben x, y, z links und rechts in ganz verschiedenen Bedeutungen vor uns. Rechts haben wir nämlich die unveränderlichen Coordinaten der *festen Raumpunkte*, links hingegen die Veränderungen oder Variationen derjenigen Coordinaten, welche die in diesen festen Raumpunkten augenblicklich befindlichen *materiellen Punkte* während eines nächstfolgenden Zeitelementes erleiden, respective

erleiden könnten. Oder kürzer ausgedrückt: Die x, y, z rechter Hand sind die unveränderlichen *localen Coordinaten*, die x, y, z linker Hand hingegen sind die veränderlichen *materiellen oder substantiellen Coordinaten*. Demgemäss werden die links stehenden Variationen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ als *materielle oder substantielle Verschiebungen* zu bezeichnen sein.

Obwohl es nun, nach dem Vorgange von Helmholtz, zur bequemeren Unterscheidung recht zweckmässig sein würde, die Buchstaben x, y, z nur für die localen Coordinaten zu brauchen, und die materiellen oder substantiellen Coordinaten mit ξ, η, ζ zu benennen, so werde ich dennoch davon Abstand nehmen, um (namentlich, was die weiteren Untersuchungen dieses und des folgenden Abschnittes betrifft) nicht gar zu viele Buchstaben einzuführen.

Beiläufig sei noch bemerkt, dass bei der hier adoptirten Euler'schen Vorstellungsweise zwischen der Dichtigkeit ϱ der betrachteten Flüssigkeit und zwischen ihren Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ die bekannte Beziehung stattfinden wird:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \beta)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho \gamma)}{\partial z} = 0. \tag{24.}$$

Diese Gleichung ist offenbar auch so darstellbar:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} dt + \frac{\partial (\varrho \alpha dt)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \beta dt)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho \gamma dt)}{\partial z} = 0.$$

Und hieraus erkennt man sofort, dass, was den Uebergang von der wirklichen zur fingirten Bewegung betrifft, zwischen den Variationen $\mathfrak{d}\varrho$, $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ folgende analoge Gleichung stattfinden wird:

$$\mathfrak{d}\varrho + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{d} x)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{d} y)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho \mathfrak{d} z)}{\partial z} = 0, \tag{25.}$$

von welcher weiterhin Gebrauch zu machen ist.

§ 5.

Fortsetzung. Ableitung der Euler'schen aërodynamischen und hydrodynamischen Differentialgleichungen auf dem von Helmholtz angedeuteten Wege.

Bezeichnet man alle auf das Flüssigkeitselement $DM(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ einwirkenden Kräfte (inclusive der Druckkräfte) mit XDM, YDM, ZDM, so wird bekanntlich nach dem *Hamilton'schen Princip* die Formel stattfinden:

$$\int dt \int \left\{ \mathfrak{d} \left(\frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) DM}{2} \right) + (X \mathfrak{d} x + Y \mathfrak{d} y + Z \mathfrak{d} z) DM \right\} = 0, \tag{26.}$$

wo die innere Integration über alle Elemente DM der gegebenen Flüssigkeit sich ausdehnt, während die äussere Integration über ein

beliebig zu wählendes Zeitintervall $t_1 \dots t_2$ sich hinerstreckt. Dabei sind sämmtliche Variationen im Augenblick t_1, und ebenso auch im Augenblick t_2 gleich *Null* zu denken. Auch ist das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem $[x, y, z]$, falls die Formel (26.) wirkliche Strenge besitzen soll, als ein *absolut ruhendes* zu denken.

Es sei nun $D\tau$ ein beliebig construirtes *absolut ruhendes* Raumelement, welches also, seiner Lage und Gestalt nach, in Bezug auf jenes absolut ruhende Axensystem $[x, y, z]$ völlig unveränderlich ist. Nimmt man in der Formel (26.) für DM dasjenige Flüssigkeitselement, welches im Augenblick t im Raumelement $D\tau$ enthalten ist, und bezeichnet man die augenblickliche Dichtigkeit dieses Flüssigkeitselementes mit ϱ, so wird offenbar $DM = \varrho D\tau$; so dass also jene Formel (26.) die Gestalt erhält:

$$(27.) \quad \int dt \int \left\{ \delta\left(\frac{\varrho(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2}\right) + \varrho\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right\} D\tau = 0,$$

die innere Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des im Augenblick t von der Flüssigkeit occupirten Raumes.

Wir wollen jetzt die aus dem Hamilton'schen Princip, d. i. aus der Formel (27.) *entspringenden Differentialgleichungen zu finden suchen, indem wir dabei beständig festhalten an der Euler'schen Vorstellungsweise.*

Zuvörderst sei die Formel notirt:

$$(28.) \quad \delta\left(\frac{\varrho(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2}\right) = \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,\delta\varrho}{2} + \varrho(\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma).$$

Bezeichnet man nun [in Einklang mit (20.)] die Variationen δx, δy, δz kurzweg mit f, g, h:

$$(29.) \qquad \delta x = f, \quad \delta y = g, \quad \delta z = h,$$

und deutet man überdies die Ableitungen nach x, y, z durch die Indices 1, 2, 3 an, so ist nach (25.):

$$\delta\varrho = -\,[(\varrho f)_1 + (\varrho g)_2 + (\varrho h)_3],$$

und ferner nach (21.):

$$\delta\alpha = \frac{\partial f}{\partial t} + (f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma) - (\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h),$$

$$\delta\beta = \frac{\partial g}{\partial t} + (g_1\alpha + g_2\beta + g_3\gamma) - (\beta_1 f + \beta_2 g + \beta_3 h),$$

$$\delta\gamma = \frac{\partial h}{\partial t} + (h_1\alpha + h_2\beta + h_3\gamma) - (\gamma_1 f + \gamma_2 g + \gamma_3 h).$$

Substituirt man aber diese vier Ausdrücke in (28.), so wird man zu einer Formel von folgender Gestalt gelangen:

$$(30.) \qquad \delta\left(\frac{\varrho(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2}\right) = \delta_f + \delta_g + \delta_h,$$

in welcher $\mathfrak{d}_f$ nur allein von f abhängt, ebenso $\mathfrak{d}_g$ nur von g, und $\mathfrak{d}_h$ nur von h. Und zwar wird z. B. $\mathfrak{d}_f$ folgenden Werth besitzen:

$$\mathfrak{d}_f = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\right)(\varrho f)_1 + \varrho\alpha\frac{\partial f}{\partial t} + \varrho\alpha(f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma) \\ -\varrho f\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}\right)_1 \end{array} \right\};$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$\mathfrak{d}_f = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varrho f}{2}\right)_1 + \frac{\partial(\varrho\alpha f)}{\partial t} + [(\varrho\alpha\alpha f)_1 + (\varrho\beta\alpha f)_2 + (\varrho\gamma\alpha f)_3] \\ \qquad\qquad - \frac{\partial\varrho}{\partial t}\alpha f - [(\varrho\alpha)_1 + (\varrho\beta)_2 + (\varrho\gamma)_3]\alpha f \\ \qquad\qquad - \frac{\partial\alpha}{\partial t}\varrho f - [\varrho\alpha\alpha_1 + \varrho\beta\alpha_2 + \varrho\gamma\alpha_3]f \end{array} \right\}.$$

Hier zerstören sich die Glieder der *mittleren* Zeile, wie aus (24.) ersichtlich ist. Demgemäss erhält man schliesslich (durch etwas andre Anordnung der Glieder *erster* Zeile) folgenden Ausdruck:

$$(31.)\qquad \mathfrak{d}_f = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\varrho\alpha f)}{\partial t} + \left(\frac{(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)\varrho f}{2}\right)_1 + \left(\frac{2\alpha\beta\varrho f}{2}\right)_2 + \left(\frac{2\alpha\gamma\varrho f}{2}\right)_3 \\ \qquad - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\alpha_1\alpha + \alpha_2\beta + \alpha_3\gamma)\right)\varrho f \end{array} \right\}.$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für $\mathfrak{d}_g$ und $\mathfrak{d}_h$.

Die Hamilton'sche Formel (27.) nimmt nun, falls man in ihr die Werthe (29.), (30.) einsetzt, die Gestalt an:

$$(32.)\qquad \int dt \int \Big\{(\mathfrak{d}_f + \mathfrak{d}_g + \mathfrak{d}_h) + \varrho(Xf + Yg + Zh)\Big\} D\tau = 0.$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{d}_f$, $\mathfrak{d}_g$, $\mathfrak{d}_h$ den Werth (31.) und die analogen Werthe, so wird offenbar, was den Ausdruck (31.) betrifft, das daselbst vorhandene erste Glied $\frac{\partial(\varrho\alpha f)}{\partial t}$ *verschwinden*, weil alle Variationen, also z. B. auch die Variation f oder $\mathfrak{d}x$ an den beiden Grenzen t_1 und t_2 des gewählten Zeitintervalls *Null* sein sollen. Die Hamilton'sche Formel (32.) wird daher durch die in Rede stehende Substitution folgende Gestalt erhalten:

$$(33.)\quad \int dt \int \Big\{\Big[\left(\frac{(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)\varrho f}{2}\right)_1 + \left(\frac{2\alpha\beta\varrho f}{2}\right)_2 + \left(\frac{2\alpha\beta\varrho f}{2}\right)_3\Big] + \text{etc.}\Big\} D\tau$$
$$- \int dt \int \Big\{\Big[\frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\alpha_1\alpha + \alpha_2\beta + \alpha_3\gamma) - X\Big]\varrho f + \text{etc.}\Big\} D\tau = 0,$$

wo nur die mit f behafteten Glieder wirklich hingeschrieben sind, während die analogen mit g und h behafteten Glieder durch die Zeichen etc., etc. angedeutet sein sollen. Beachtet man, dass die

Indices 1, 2, 3 Ableitungen nach x, y, z anzeigen, so erkennt man sofort, dass die Formel (33.) auch so darstellbar ist:

$$(34.)\quad \int dt \int \left\{ \left[\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) A + (2\alpha\beta) B + (2\alpha\gamma) C}{2} \right] \varrho f + \text{etc.} \right\} Do$$
$$+ \int dt \int \left\{ \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \beta + \alpha_3 \gamma) - X \right] \varrho f + \text{etc.} \right\} D\tau = 0,$$

wo das Integral erster Zeile über alle Oberflächenelemente Do des im Augenblick t von der Flüssigkeit occupirten Raumes sich ausdehnt; dabei bezeichnen A, B, C die Richtungscosinus der auf Do errichteten *äussern* Normale.

Aus dieser Formel (34.) ergeben sich nun gewisse Gleichungen für die *Oberflächenpunkte* der Flüssigkeit, andrerseits aber auch gewisse Gleichungen für die *innern* Punkte der Flüssigkeit. Und zwar werden diese letztern, wie man aus der Formel (34.) sofort erkennt, folgendermassen lauten:

$$(35.)\quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + (\alpha_1 \alpha + \alpha_2 \beta + \alpha_3 \gamma) - X = 0, \quad \text{etc.}$$

d. i.

$$(36.)\quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \gamma = X, \quad \text{etc.}$$

Dies aber sind die bekannten *Euler'schen Differentialgleichungen*.

Sehr interessant sind auch die für die Oberflächenpunkte sich ergebenden Gleichungen. Doch wollen wir auf diese hier nicht näher eingehen, um uns von unserm eigentlichen Ziele nicht allzuweit zu entfernen.

§ 6.

Allgemeine Betrachtungen.

Es sei $\mathfrak{F}$ die Temperatur einer *gegebenen Substanz*. Oder allgemeiner: Es sei $\mathfrak{F}$ irgend eine Grösse, die von der *augenblicklichen Verfassung* der Substanz abhängt*), und die in jedem Augenblick an allen Stellen der Substanz ihre bestimmten Werthe hat. Diese Grösse $\mathfrak{F}$ mag im Euler'schen Sinne als eine Function der Coordinaten und der Zeit gedacht werden:

$$(1.)\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(x, y, z, t).$$

Fasst man nun diejenigen Werthe ins Auge, welche die Function $\mathfrak{F}$ in einem gegebenem *festen Raumpunkt***) (x, y, z) im Laufe der Zeit

*) Unter der *augenblicklichen Verfassung* der Substanz verstehe ich Alles, was der Augenblick darbietet, also sowohl den augenblicklichen innern Zustand der Substanz, wie auch ihre augenblickliche räumliche Vertheilung, u. s. w.

**) Vgl. die Bemerkung auf Seite 347.

der Reihe nach annimmt, so hat man eine Werthenreihe, deren zeitlicher Differentialquotient gleich

$$(2.)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t},$$

nämlich gleich der partiellen Ableitung der Function (1.) nach ihrem vierten Argumente sein wird.

Fasst man hingegen irgend einen (im Allgemeinen in Bewegung begriffenen) *substantiellen Punkt* $m(x, y, z)$ ins Auge, und betrachtet man diejenigen Werthe, welche die Function $\mathfrak{F}$ in diesem substantiellen Punkt $m(x, y, z)$ im Laufe der Zeit der Reihe nach annimmt, so erhält man eine Werthenreihe, deren zeitlicher Differentialquotient folgendermassen lautet:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(3.)\qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t},$$

wo alsdann α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten des betrachteten substantiellen Punktes $m(x, y, z)$ vorstellen. Die Differenz der beiderlei Differentialquotienten (2.) und (3.) hat den Werth:

$$(4.)\qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\gamma.$$

Zur Unterscheidung kann man etwa den Ausdruck (2.) als *localen* Differentialquotienten, andrerseits aber den Ausdruck (3.) als den *einen substantiellen Punkt begleitenden*†) Differentialquotienten bezeichnen. Das in diesem letztern Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ auftretende $d\mathfrak{F}$ mag nun, *nach irgend welchem Princip*, in zwei Theile zerlegt gedacht werden:

$$(5.)\qquad d\mathfrak{F} = \Delta\mathfrak{F} + \delta\mathfrak{F};$$

so dass also

$$(6.)\qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\Delta\mathfrak{F}}{dt} + \frac{\delta\mathfrak{F}}{dt}$$

ist. Substituirt man diesen Werth (6.) auf der linken Seite der Formel (3.), so erhält man sofort:

$$\frac{\Delta\mathfrak{F}}{dt} + \frac{\delta\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\gamma + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t};$$

eine Gleichung, die man auch so schreiben kann:

$$(7.)\qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\Delta\mathfrak{F}}{dt} + \frac{\delta^*\mathfrak{F}}{dt},$$

†) In demselben Sinne ist das Wort „*begleiten*“ schon früher gebraucht worden in den Sätzen Seite 258 und Seite 262.

wo alsdann $\frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt}$ die Bedeutung hat:

$$\frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt} = \frac{\delta \mathfrak{F}}{dt} - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\gamma\right). \tag{8.}$$

Nachträglich sei nun in Betreff der Formel (5.) *noch bemerkt, dass unter* $\Delta \mathfrak{F}$ *und* $\delta \mathfrak{F}$, *ebenso wie bisher, der endogene und der convective Theil des Zuwachses* $d\mathfrak{F}$ *verstanden werden sollen. Jeder der beiden Differentialquotienten*

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} \quad \textit{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} \tag{9.}$$

wird alsdann durch die beiden Formeln (6.) *und* (7.):

$$\begin{cases} \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt} + \frac{\delta \mathfrak{F}}{dt}, \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt} + \frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt} \end{cases} \tag{10.}$$

in seinen endogenen und in seinen convectiven Theil zerlegt sein. Die beiden endogenen Theile sind, wie man sieht, unter einander identisch, die beiden convectiven Theile aber nicht.

Um eine bessere Uebersicht zu gewinnen, mögen aus dem Gewirre der allgemeinen Formeln (3.), (4.), ... (8.) *noch besonders herausgehoben werden die beiden Formeln* (3.) *und* (8.):

$$\begin{cases} \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\gamma\right), \\ \frac{\delta \mathfrak{F}}{dt} = \frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt} + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\gamma\right), \end{cases} \tag{11.}$$

welche einander sehr ähnlich sind, und vermöge dieser Aehnlichkeit dem Gedächtniss sich leicht einprägen.

Die convectiven Aenderungen rühren her von der Aenderung der *räumlichen Vertheilung* der Substanz, die endogenen hingegen von der Aenderung ihres *innern Zustandes*. Befindet sich z. B. die betrachtete Substanz in *völliger Ruhe*, so werden die convectiven Zuwüchse alle $= 0$ sein; so dass also in diesem Fall die mit δ und δ^* behafteten Glieder verschwinden; mithin z. B. die Formeln (10.) die Gestalt erhalten:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt}, \tag{α.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt}; \tag{β.}$$

woraus alsdann weiter sich ergiebt:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}. \tag{γ.}$$

Auch wird alsdann die *erste* der Formeln (11.) auf (γ.), und die *zweite* derselben auf $0 = 0$ sich reduciren. Denn es ist zu beachten, dass die α, β, γ für den Fall einer völlig ruhenden Substanz alle $= 0$ sind.

§ 7.

Anwendung der allgemeinen Betrachtungen auf einige Beispiele.

Es sollte $\mathfrak{F}$ eine Grösse sein, die von der augenblicklichen Verfassung†) der Substanz abhängt, die also abhängig sein kann sowohl von der augenblicklichen *räumlichen Vertheilung* der Substanz, wie auch von ihrem augenblicklichen *innern Zustande*. Wir können uns nun aber eine Function $\mathfrak{F}$ denken, die (wie z. B. die Dichtigkeit der Substanz) nur allein von der *räumlichen Vertheilung* abhängt. Für eine solche Function $\mathfrak{F}$ wird alsdann $\Delta\mathfrak{F} = 0$, mithin auch

$$\text{(A.)} \qquad \frac{\Delta\mathfrak{F}}{dt} = 0$$

sein; so dass also die Formeln (10.) und (11.) übergehen in:

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{F}}{dt} = \dfrac{\delta\mathfrak{F}}{dt}, \\[2mm] \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t} = \dfrac{\delta^*\mathfrak{F}}{dt}, \end{cases}$$

$$\text{(C.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{F}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\gamma\right), \\[2mm] \dfrac{\delta\mathfrak{F}}{dt} = \dfrac{\delta^*\mathfrak{F}}{dt} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\gamma\right). \end{cases}$$

Die hier in (A.), (B.) angegebenen Gleichungen $\Delta\mathfrak{F} = 0$ und $d\mathfrak{F} = \delta\mathfrak{F}$ sind, wie beiläufig bemerkt sein mag, in vollem Einklang mit dem, was früher auf Seite 129 in (20.), (20a.) dargelegt worden ist.

Erstes Beispiel. — Zur Function $\mathfrak{F}$ mag genommen werden die *Dichtigkeit der Substanz:*

$$\text{(D.)} \qquad \varrho = \varrho(x, y, z, t).$$

Alsdann ist nach (A.), (B.):

$$\text{(E.)} \qquad \frac{\Delta\varrho}{dt} = 0, \qquad \frac{\delta\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{dt}, \qquad \frac{\delta^*\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t},$$

und ferner nach (C.):

$$\text{(F.)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varrho}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varrho}{\partial z}\gamma\right).$$

---

†) Vgl. die erste Note Seite 357.

Denkt man sich nun an der Stelle (x, y, z) ein kleines *Substanzelement* construirt, so wird offenbar die *Masse* dieses Elementes unveränderlich sein. Bezeichnet man also das Volumen des Elementes mit $D\tau$, und seine Dichtigkeit mit ϱ, so ergiebt sich:

$$d(\varrho D\tau) = 0,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{d(D\tau)}{D\tau} = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Seite 250 (17.):

$$\frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

wo f, g, h die der Zeit dt entsprechenden räumlichen Verschiebungen vorstellen. Demgemäss ist $f = \alpha\, dt$, $g = \beta\, dt$, $h = \gamma\, dt$; so dass also die vorstehende Formel übergeht in:

$$\text{(G.)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} = -\varrho\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right).$$

Dies in (F.) substituirt, ergiebt sich sofort:

$$\text{(H.)} \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\varrho\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\gamma)}{\partial z}\right).$$

Durch (G.) und (H.) gewinnen nun die Formeln (E.) folgende Gestalt:

$$\text{(J.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta\varrho}{dt} = 0, \quad \dfrac{\delta\varrho}{dt} = \dfrac{d\varrho}{dt} = -\varrho\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\right), \\ \qquad\qquad\quad \dfrac{\delta^*\varrho}{dt} = \dfrac{\partial\varrho}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial(\varrho\alpha)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho\beta)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho\gamma)}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Zweites Beispiel. — Es sei ε der Dielektricitätscoefficient der gegebenen Substanz, ferner μ ihr Magnetisirungscoefficient, und endlich λ ihre elektrische Leitungsfähigkeit. Nach einer, allerdings nur provisorischen, Annahme von *Helmholtz* [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 491] bleiben die Werthe von $\varepsilon, \mu, \lambda$ für einen bestimmten substantiellen Punkt fortdauernd ein und dieselben; so dass also $\varepsilon, \mu, \lambda$ nur allein von der *räumlichen Vertheilung* der Substanz abhängen. Folglich werden z. B. für die Function

$$\text{(K.)} \qquad \varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$$

die Formeln (A.), (B.), (C.) gelten. Nach (A.), (B.) ist:

$$\text{(L.)} \qquad \frac{\Delta\varepsilon}{dt} = 0, \qquad \frac{\delta\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \qquad \frac{\delta^*\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t},$$

und nach (C.):

$$\text{(M.)} \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\beta + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\gamma\right).$$

Das einen substantiellen Punkt begleitende ε hat aber (nach der soeben genannten Helmholtz'schen Annahme) fortdauernd ein und denselben Werth. Folglich ist

$$\text{(N.)} \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0;$$

und hiedurch erhält die Gleichung (M.) die Gestalt:

$$\text{(O.)} \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\beta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\gamma\right).$$

Substituirt man jetzt die Werthe (N.), (O.) in den Formeln (L.), so erhält man schliesslich:

$$\text{(P.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta \varepsilon}{dt} = 0, \quad \dfrac{\delta \varepsilon}{dt} = \dfrac{d\varepsilon}{dt} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\delta^* \varepsilon}{dt} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left(\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial z}\gamma\right). \end{cases}$$

Dass genau dieselben Formeln auch für

$$\text{(Q.)} \qquad \mu \quad \text{und} \quad \lambda$$

gelten, bedarf kaum noch der Erwähnung.

§ 8.

Wiederaufnahme der allgemeinen Betrachtungen.

Ebenso wie früher sei $\mathfrak{F}$ irgend eine Grösse, die von der *augenblicklichen Verfassung* †) der gegebenen Substanz abhängt. Diese Grösse $\mathfrak{F}$, die also im Allgemeinen sowohl von der augenblicklichen *räumlichen Vertheilung* der Substanz, wie auch von ihrem augenblicklichen *innern Zustande* abhängig sein wird, mag nun im Euler'schen Sinne als eine Function der Coordinaten und der Zeit gedacht werden:

$$\text{(12.)} \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(x, y, z, t),$$

genau ebenso, wie solches auch bisher stets vorausgesetzt ist. Alsdann ist offenbar:

$$\text{(13.)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t\, \partial x} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x\, \partial t}.$$

Es fragt sich, ob ein solcher *Commutationssatz* auch für die Charakteristiken Δ und ∂ gilt, ob also z. B. die beiden Ausdrücke

$$\text{(13a.)} \qquad \frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt}$$

einander gleich sind.

---

†) Vgl. die erste Note Seite 357.

Ebenso wie $\mathfrak{F}$ selber, ebenso werden wir uns auch den Werth der Ableitung $\frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt}$ im Euler'schen Sinne als eine Function von x, y, z, t vorzustellen haben:

$$\frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt} = \Phi(x, y, z, t) = \Phi. \tag{14.}$$

Und ebenso wie diese Formel (14.) dem Raumpunkt (x, y, z) zugehört, ebenso wird einem benachbarten Raumpunkt $(x + \xi,\ x + \eta,\ z + \zeta)$ folgende Formel zugehören:

$$\frac{\Delta}{dt}\left(\mathfrak{F} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\zeta\right) = \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\zeta; \tag{15.}$$

wo die ξ, η, ζ unendlich klein zu denken sind.

Nun sollen aber (x, y, z) und $(x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta)$ bestimmte *Raumpunkte* sein. Ihre Coordinaten sind also *unveränderlich*. Demgemäss ergiebt sich aus (14.), (15.) durch Subtraction:

$$\xi \frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \eta \frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \zeta \frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = \xi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{16.}$$

Die Werthe der ξ, η, ζ sind aber vollkommen willkürlich. Folglich müssen in (16.) die Coefficienten von ξ, η, ζ einzeln einander gleich sein. Somit ergiebt sich z. B.:

$$\frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

oder, falls man für Φ seine eigentliche Bedeutung (14.) substituirt:

$$\frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt} = 0; \tag{17.}$$

so dass also die in (13a.) aufgeworfene Frage *bejahend* zu beantworten ist.

Die Sätze (13.), (17.) sind, mittelst der allgemeinen Formel (10.) Seite 359:

$$\frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} - \frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt}, \tag{18.}$$

sofort übertragbar auf die Charakteristik δ^*. Ebenso wie nämlich diese allgemeine Formel (18.) für $\mathfrak{F}$ selber gilt, ebenso wird sie offenbar z. B. auch gelten für $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}$; so dass man also schreiben kann:

$$\frac{\delta^*}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} - \frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}. \tag{α.}$$

Andrerseits folgt aus (18.) durch partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt}. \tag{β.}$$

Die *rechten* Seiten dieser beiden Formeln (α.), (β.) sind aber nach

(13.), (17.) einander gleich. Dies überträgt sich auf die *linken* Seiten; so dass man also zu folgender neuen Formel gelangt:

$$\frac{\delta^*}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt}=0. \tag{19.}$$

Es entsteht die Frage, ob diese für Δ *und* δ^* *geltenden* Commutationssätze (17.), (19.) *auch noch für die Charakteristiken* d *und* δ *gelten.* Die allgemeine Formel (11.) Seite 359:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt}=\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}+\alpha\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}+\beta\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}+\gamma\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \tag{20.}$$

wird offenbar, ebenso wie für $\mathfrak{F}$ selber, ebenso auch für $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}$ gelten; so dass man also schreiben kann:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}=\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t\partial x}+\alpha\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y\partial x}+\gamma\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z\partial x}. \tag{γ.}$$

Andrerseits folgt aus (20.) durch partielle Ableitung nach x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\mathfrak{F}}{dt}=\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t\partial x}+\alpha\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y\partial x}+\gamma\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z\partial x}\\+\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}.\end{aligned} \tag{δ.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen (γ.), (δ.) ergiebt sich aber durch Subtraction sofort:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\mathfrak{F}}{dt}=-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right); \tag{21.}$$

so dass also die gestellte Frage hinsichtlich der Charakteristik d *zu verneinen ist.*

Wir gehen über zur Untersuchung der Charakteristik δ. Die allgemeine Formel (10.) Seite 359:

$$\frac{\delta\mathfrak{F}}{dt}=\frac{d\mathfrak{F}}{dt}-\frac{\Delta\mathfrak{F}}{dt}, \tag{22.}$$

wird offenbar, ebenso wie für $\mathfrak{F}$ selber, ebenso auch für $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}$ gelten; so dass man also schreiben kann:

$$\frac{\delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}-\frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}. \tag{ε.}$$

Andrerseits ergiebt sich aus (22.) durch partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathfrak{F}}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\mathfrak{F}}{dt}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta\mathfrak{F}}{dt}. \tag{ζ.}$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen (ε.), (ζ.) von einander, so erhält man mit Rücksicht auf (21.) und (17.) sofort:

$$\frac{\delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\mathfrak{F}}{dt}=-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right); \tag{23.}$$

so dass also die gestellte Frage hinsichtlich der Charakteristik δ *zu verneinen ist.*

Um die Hauptresultate zusammenzustellen: *Nach* (17.) *und* (19.) *ist:*

$$(24.)\qquad \frac{\Delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt} \quad \textit{und} \quad \frac{\delta^*}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt}.$$

Hingegen ist nach (21.) *und* (23.):

$$(25.)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \neq \frac{\partial}{\partial x}\frac{d \mathfrak{F}}{dt} \quad \textit{und} \quad \frac{\delta}{dt}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \neq \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta \mathfrak{F}}{dt}.$$

Dass diese Formeln (24.), (25.) *nicht blos für x, sondern ebenso auch für y und z gelten, bedarf kaum noch der Erwähnung.*

§ 9.

Die elektrischen und magnetischen Zustände der den Weltraum erfüllenden Substanz, nach den Vorstellungen von Helmholtz.

Helmholtz bemerkt gelegentlich [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 489], seine Bezeichnungen seien mit den Hertz'schen im Wesentlichen in Uebereinstimmung, nur seien die von ihm selber mit ε, μ bezeichneten Grössen von Hertz mit $4\pi\varepsilon$, $4\pi\mu$ bezeichnet worden. Ich habe das *nicht* bestätigt gefunden. Wenn man nämlich

einerseits die Helmholtz'sche *Abhandlung von 1892* [über das Princip der kleinsten Wirkung, Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 476—504], sowie auch die Helmholtz'schen *Vorlesungen* [Vorl. üb. Th. Physik, Bd. 5, 1897, Seite 38—97],

und andrerseits die beiden Hertz'schen Abhandlungen von 1890 [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 208—285]

mit einander vergleicht, so findet man, dass die Formeln der beiden Autoren in einander übergehen, sobald man setzt:

$$(F.)\quad \begin{cases} \varepsilon_{hr} = \varepsilon_{hl}, & \mathfrak{X}_{hr} = 4\pi\mathfrak{X}_{hl}, & \mathfrak{Y}_{hr} = 4\pi\mathfrak{Y}_{hl}, & \mathfrak{Z}_{hr} = 4\pi\mathfrak{Z}_{hl}, \\ \mu_{hr} = \mu_{hl}, & \mathfrak{L}_{hr} = 4\pi\mathfrak{L}_{hl}, & \mathfrak{M}_{hr} = 4\pi\mathfrak{M}_{hl}, & \mathfrak{N}_{hr} = 4\pi\mathfrak{N}_{hl}, \end{cases}$$

wo die von Hertz und Helmholtz gebrauchten Buchstaben respective mit den Indices hr (Hertz) und hl (Helmholtz) versehen sind. — Uebrigens sehe ich keinen Grund, von der Hertz'schen Bezeichnungsweise abzugehen. *Und ich werde daher im Folgenden durchweg und allenthalben die Buchstaben ε, μ im Hertz'schen Sinne anwenden; so dass also z. B. für den reinen Aether $\varepsilon = \mu = 1$ sein wird.*

Erste Bemerkung. — Die früher Seite 336 (5.), (6.) angegebenen Hertzschen Formeln lauten:

$$(\alpha.)\qquad X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad L = \frac{\mathfrak{L}}{\mu}, \quad \text{(Hertz)};$$

und diese Formeln nehmen im reinen Aether, d. i. für $\varepsilon = \mu = 1$ die Gestalt an:

$$(\beta.)\qquad X = \mathfrak{X} \quad \text{und} \quad L = \mathfrak{L}, \quad \text{(Hertz)}.$$

Uebersetzt man jetzt diese Hertz'schen Formeln (α.), (β.), auf Grund der Angaben (F.), in die Helmholtz'sche Bezeichnungsweise, so erhält man im Allgemeinen:

$$(\gamma.) \qquad X = \frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad L = \frac{4\pi\mathfrak{L}}{\mu}, \quad \text{(Helmholtz)},$$

und speciell im reinen Aether:

$$(\delta.) \qquad X = 4\pi\mathfrak{X} \quad \text{und} \quad L = 4\pi\mathfrak{L}, \quad \text{(Helmholtz)}.$$

Und in der That sind diese Formeln (γ.), (δ.) in voller Uebereinstimmung mit gewissen von Helmholtz selber hingestellten Gleichungen. In den vorhin genannten Helmholtz'schen Vorlesungen [daselbst Seite 93 und 94] findet man nämlich die Gleichungen:

$$(\varepsilon.) \qquad u = \lambda X \quad \text{und} \quad u = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{X};$$

woraus durch Elimination von u die erste der beiden Formeln (γ.) sich ergiebt. — *Q. e. d.*

Zweite Bemerkung. — Das soeben Gesagte bezieht sich nur auf die Helmholtz'schen *Vorlesungen* und seine Abhandlung *von 1892*, nicht aber auf seine Abhandlung *von 1893* [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 526—535]. In dieser letzten Abhandlung stösst man nämlich [z. B. auf Seite 528 in (1c, d.)] auf Gleichungen, die von den Formeln (δ.) ausserordentlich verschieden sind.

Wollen wir in die Vorstellungen von Helmholtz (1892) uns hineinversetzen, so haben wir, ebenso wie in der zweiten Hertz'schen Abhandlung, ponderable Materie und Aethermaterie zusammengenommen als eine *einzige* den ganzen unendlichen Raum erfüllende Substanz anzusehen [vgl. Seite 340]. Auch haben wir [ebenso wie im achten Abschnitt, Seite 182] an allen Grenzen uns dünne Uebergangsschichten zu denken; so dass also die den Weltraum erfüllende Substanz allenthalben stetig ist, und auch bei ihrer Bewegung stetig bleibt.

Jedes Element dieser Substanz ist verschiedener elektrischer, und ebenso auch verschiedener magnetischer Zustände fähig. Der augenblickliche *elektrische* Zustand des Elementes ist geometrisch darstellbar durch eine von dem Element ausgehende gerade Linie von bestimmter Richtung und Länge. Die rechtwinkligen Componenten dieser Linie oder (wie man auch zu sagen pflegt) dieses *Vectors* seien bezeichnet mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Andrerseits ist der augenblickliche magnetische Zustand des Elementes geometrisch darstellbar durch einen zweiten Vector, dessen Componenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ heissen mögen. An Stelle dieses zweiten (im Allgemeinen den Hertz'schen Vorstellungen entsprechenden) Vectors $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, hat aber Helmholtz einen etwas andern Vector $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ eingeführt, der Art, dass zwischen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Relationen stattfinden:

$$
\text{(H.)}\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}, \\
\mathfrak{M} &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}, \\
\mathfrak{N} &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x},
\end{aligned}
$$

dabei sind die $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, ebenso wie auch die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, im Euler'schen Sinne als Functionen von x, y, z, t zu denken.

Demgemäss kann man $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ als den *elektrischen* und andrerseits $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ oder $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ als den *magnetischen Vector* bezeichnen. Sind die Grössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ alle $= 0$, so befindet sich das betrachtete Substanzelement in seinem *natürlichen Zustande.*

Ob die Zustände $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ oder $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mechanisch erklärbar, ob sie durch bestimmte mechanische Bilder interpretirbar seien, — soll vorläufig ganz dahingestellt bleiben; so dass also diese Zustände, ihrem eigentlichen Wesen nach, einstweilen als *völlig unbekannt* anzusehen sind.

Sind die Zustände der einzelnen Elemente der den Weltraum erfüllenden Substanz in irgend einem Augenblick $t = 0$ in bestimmter Weise gegeben, so werden sie im Laufe der Zeit, in Folge ihrer gegenseitigen Einwirkungen, von Augenblick zu Augenblick sich ändern. Aber auch diese gegenseitigen Einwirkungen und deren Gesetze wollen wir einstweilen als *völlig unbekannt* ansehen. Endlich wollen wir auch ganz dahingestellt sein lassen, ob das der Betrachtung zu Grunde gelegte rechtwinklige Axensystem $[x, y, z]$, nach welchem die Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gerechnet sind, ein absolut ruhendes ist, oder in irgend welcher Bewegung sich befindet.

Bemerkung. — Helmholtz und Hertz bezeichnen allerdings die Zustände $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ als *elektrische* respective als *magnetische Polarisation.* Doch habe ich nicht bemerkt, dass Helmholtz von dieser Vorstellung bei den eigentlichen Grundzügen seiner Theorie wesentlichen Gebrauch macht. Und gesetzt auch, man wollte eine solche Vorstellung wirklich acceptiren, so würde das doch nur die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, nicht aber die $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ betreffen. In der That würde das eigentliche Wesen dieser $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ dabei noch völlig in Dunkel gehüllt bleiben, was höchst störend ist; denn $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ repräsentirt ja nach der Helmholtz'schen Auffassung [vgl. die Formeln (H.)] den eigentlich *primären* magnetischen Vector, während $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ nur als ein von $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ abhängender *secundärer* Vector anzusehen ist.

Fragt man übrigens nach dem *eigentlichen Inhalt jener Vorstellungen,* welche Hertz und Helmholtz mit dem Worte „elektrische Polarisation" verbinden, so dürfte es wohl recht schwer sein, diese Frage in bestimmter Weise zu beantworten.

Hertz hat, so viel ich weiss, in seinen Abhandlungen dieses Wort überhaupt nicht zu erklären versucht. Andrerseits sagt Helmholtz in seinen

Vorlesungen [Vorl. üb. Th. Physik, Bd. 5, 1897, Seite 12], die elektrische Polarisation sei ein molecularer Process, bei welchem die in jedem Molecül enthaltene Elektricität sich in der Weise verschiebt, dass sich zwei elektrische Pole bilden, ein positiver und ein negativer. Ferner sagt Helmholtz etwas später [a. a. O. Seite 37], in isolirender Substanz finde kein Uebergang freier Elektricität von einem Raumelement zum andern statt; die elektrischen Ansammlungen an den beiden Enden des Raumelementes entstünden daher durch die Verschiebung der ursprünglich in ihm enthaltenen neutralen Elektricität. In solcher Weise sucht also Helmholtz das Wesen der elektrischen Polarisation $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ aus den Vorstellungen über Elektricität abzuleiten. Und dagegen würde nichts einzuwenden sein, wenn die Vorstellungen über Elektricität, namentlich über die Quantität der Elektricität, *schon vorher* von ihm in irgend welcher Weise festgelegt worden wären. Das aber ist nicht der Fall. Vielmehr wird der Begriff der Quantität der Elektricität erst zehn Seiten später [a. a. O. Seite 48] von ihm erklärt, und zwar definirt auf Grund der Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. — Es scheint mir hier also ein *circulus vitiosus* vorzuliegen: Die Polarisation $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ wird durch elektrische Quantitäten (elektrische Pole), und die elektrischen Quantitäten ihrerseits werden durch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ erklärt.

Dieses Urtheil ist wohl etwas zu scharf. Man wird vielmehr zu sagen haben, dass bei Helmholtz (ebenso wie bei vielen anderen Autoren) ganz verschiedene Vorstellungsreihen durcheinander laufen, und dass man zu einem solchen *circulus vitiosus* gelangt, sobald man all' diese Vorstellungen in *eine einzige* Reihe zu bringen sucht.

§ 10.

Ueber den elektrischen Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und über die betreffende convective Charakteristik δ.

Wir werden die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des elektrischen Zustandes, ebenso etwa wie die Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ der einzelnen substantiellen Punkte, im Euler'schen Sinne als Functionen der Coordinaten und der Zeit uns denken können:

$$(1.)\qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{X}(x, y, z, t), \qquad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(x, y, z, t), \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(x, y, z, t),$$

$$(2.)\qquad \alpha = \alpha(x, y, z, t), \qquad \beta = \beta(x, y, z, t), \qquad \gamma = \gamma(x, y, z, t).$$

Auch werden wir auf die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ohne Weiteres unsere allgemeinen Gleichungen [(10.), (11.) Seite 359] anwenden können; so dass wir also die beiden Formelgruppen vor uns haben:

$$(3.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} + \dfrac{\delta\mathfrak{X}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} + \dfrac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt}, \end{cases}$$

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}\gamma\right), \\[2ex] \dfrac{\delta\mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}\gamma\right). \end{cases}$$

Nur werden leider diese Formeln (3.), (4.) völlig in der Luft hängen, so lange wir nicht wissen, was unter den Symbolen Δ, δ, δ^* eigentlich zu verstehen sei. Und hierüber wird sich absolut Nichts sagen lassen, weil wir mit dem eigentlichen Wesen des betrachteten Zustandes ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) völlig unbekannt sind†).

Allerdings würde nur *eines* jener drei Symbole zu definiren sein. Denn sollte z. B. die Bedeutung von δ gegeben sein, so würden alsdann, vermöge der beiden Formeln (3.), die Bedeutungen von Δ und δ^* ebenfalls bekannt sein. Wir wollen nun in der That, und zwar in vollem Einklang mit Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 494], der convectiven Charakteristik δ eine ganz bestimmte Bedeutung zuertheilen, nämlich folgende Definition adoptiren:

Definition. — *Jener noch ganz unbekannte Zustand* ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) *soll, was seine convectiven Aenderungen* δ *anbelangt, von solcher Art gedacht werden, dass für jedwedes substantielle Flächenelement* Do *die Formel stattfindet:*

$$(5.) \qquad \delta(\mathfrak{X}\,aDo + \mathfrak{Y}\,bDo + \mathfrak{Z}\,cDo) = 0,$$

wo a, b, c *die Richtungscosinus der Normale jenes substantiellen Elementes* Do *vorstellen.*

Bemerkung. — Diese Formel (5.) ist völlig identisch mit derjenigen, durch welche, wie wir früher [Seite 260 (β.)] gesehen haben, die convectiven Aenderungen des *elektrischen Strömungszustandes* (u, v, w) definirt werden können. Hieraus aber folgt offenbar noch keineswegs, dass der unbekannte Zustand ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) mit jenem Strömungszustande (u, v, w) identisch sei.

Vielmehr wird der Zustand ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) nach wie vor als *unbekannt* anzusehen sein, als unbekannt innerhalb der durch die Definition (5.) gezogenen Grenzen.

Uebrigens wollen wir uns auch in Betreff des elektrischen Strömungszustandes (u, v, w) *keineswegs binden* an unsere früheren Betrachtungen und Formeln. Es handelt sich hier um die Helmholtz'sche Theorie, also um eine ganz *neue* Theorie. Und für diese wird der Zustand (u, v, w) *von Neuem* zu definiren sein; was im folgenden Paragraph geschehen soll.

Man kann die Formel (5.), weil [nach Seite 360 (B.)] $\delta(aDo) = d(aDo)$ ist, auch so schreiben:

$$(6.) \qquad \begin{aligned}&[(\delta\mathfrak{X})\,aDo + (\delta\mathfrak{Y})\,bDo + (\delta\mathfrak{Z})\,cDo] + \\ &+ [\mathfrak{X}\,d(aDo) + \mathfrak{Y}\,d(bDo) + \mathfrak{Z}\,d(cDo)] = 0.\end{aligned}$$

Nun ist nach Seite 252 (23.):

$$d(aDo) = [a(f_1 + g_2 + h_3) - (af_1 + bg_1 + ch_1)]\,Do,$$

wo f, g, h die der Zeit dt entsprechenden substantiellen Verschiebungen vorstellen. Diese Verschiebungen stehen zu den Geschwindigkeitscom-

†) Vgl. die zweite Bemerkung auf Seite 378.

ponenten α, β, γ in der Beziehung: $f = \alpha\,dt$, $g = \beta\,dt$, $h = \gamma\,dt$. Somit ergiebt sich die erste Formel folgenden Systems:

$$(7.)\quad \begin{cases} d(aDo) = [a(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1)]\,Do\,dt, \\ d(bDo) = [b(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2)]\,Do\,dt, \\ d(cDo) = [c(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - (a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3)]\,Do\,dt, \end{cases}$$

dessen übrige Formeln in analoger Weise zu erhalten sind. Substituirt man diese Werthe (7.) in (6.), und ordnet nach aDo, bDo, cDo, so erhält man sofort:

$$(8.)\quad [\delta\mathfrak{X} + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)dt - (\mathfrak{X}\alpha_1 + \mathfrak{Y}\alpha_2 + \mathfrak{Z}\alpha_3)dt]\,aDo + \text{etc.} = 0,$$

wo nur der mit aDo behaftete Term wirklich hingeschrieben ist, während die analogen mit bDo und cDo behafteten Terme durch das etc. angedeutet sein sollen.

Die Formeln (6.), (7.), (8.) müssen nun aber, ebenso wie (5.), für jedes beliebige substantielle Element Do, also z. B. auch für beliebige Werthe der Richtungscosinus a, b, c gelten. Somit ergeben sich aus (8.) im Ganzen *drei* Gleichungen, von denen die erste lautet:

$$(9.)\qquad \delta\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}\alpha_1 + \mathfrak{Y}\alpha_2 + \mathfrak{Z}\alpha_3)\,dt - \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\,dt;$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(10.)\qquad \frac{\delta\mathfrak{X}}{dt} = (\alpha_1\mathfrak{X} + \alpha_2\mathfrak{Y} + \alpha_3\mathfrak{Z}) - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\,\mathfrak{X}.$$

Dies in die zweite der Gleichungen (4.) substituirt, ergiebt sich:

$$(11.)\quad \frac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt} = -(\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{X}_2\beta + \mathfrak{X}_3\gamma) + (\alpha_1\mathfrak{X} + \alpha_2\mathfrak{Y} + \alpha_3\mathfrak{Z}) - (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\mathfrak{X}.$$

Diese letzte Formel ist offenbar auch so darstellbar:

$$\frac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt} = (\alpha_1\mathfrak{X} + \alpha_2\mathfrak{Y} + \alpha_3\mathfrak{Z}) - [(\alpha\mathfrak{X})_1 + (\beta\mathfrak{X})_2 + (\gamma\mathfrak{X})_3],$$

oder auch so:

$$\frac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt} = [(\alpha\mathfrak{X})_1 + (\alpha\mathfrak{Y})_2 + (\alpha\mathfrak{Z})_3] - [(\alpha\mathfrak{X})_1 + (\beta\mathfrak{X})_2 + (\gamma\mathfrak{X})_3] - \alpha(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3),$$

oder endlich auch so:

$$(12.)\quad \frac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt} = (\alpha\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{X})_2 + (\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X})_3 - \alpha(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3).$$

Dies in die zweite der Formeln (3.) substituirt, erhält man sofort:

$$(13.)\quad \frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y})_2 + (\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z})_3 + \alpha(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3),$$

wo überall die Indices 1, 2, 3 die Ableitungen nach x, y, z andeuten. Beiläufig sei bemerkt, dass Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 495] den Ausdruck (13.) mit $\left[\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right]$ bezeichnet.

Die dem Zustande $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ zugehörige Function σ. — Die Function σ mag in vollem Einklang mit Helmholtz*), definirt werden durch die Formel:

$$4\pi\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}. \tag{14.}$$

Demgemäss kann die Formel (12.) jetzt auch so geschrieben werden:

$$\text{(E.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\delta^* \mathfrak{X}}{dt} = \dfrac{\partial(\alpha\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{X})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X})}{\partial z} - 4\pi\alpha\sigma. \quad \text{Ebenso wird:} \\ \dfrac{\delta^* \mathfrak{Y}}{dt} = \dfrac{\partial(\beta\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{Y})}{\partial z} + \dfrac{\partial(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y})}{\partial x} - 4\pi\beta\sigma. \\ \dfrac{\delta^* \mathfrak{Z}}{dt} = \dfrac{\partial(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\gamma\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{Z})}{\partial y} - 4\pi\gamma\sigma. \end{cases}$$

Differenzirt man diese Formeln (E.) partiell nach x, y, z und addirt, so heben sich die meisten Glieder fort; so dass man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^*\mathfrak{X}}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\delta^*\mathfrak{Y}}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta^*\mathfrak{Z}}{dt} = -4\pi\left(\frac{\partial(\alpha\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\sigma)}{\partial z}\right).$$

Hieraus folgt, mittelst des Satzes (24.) Seite 365, sofort:

$$\frac{\delta^*}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = -4\pi\left(\frac{\partial(\sigma\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma\gamma)}{\partial z}\right),$$

also mit Hinblick auf (14.):

$$\frac{\delta^*\sigma}{dt} = -\left(\frac{\partial(\sigma\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma\gamma)}{\partial z}\right), \tag{15.}$$

eine Formel, die merkwürdiger Weise völlig übereinstimmt mit einer früher [Seite 361 (J.)] *für die* **Dichtigkeit** ϱ *gefundenen Formel.*

Nun ist allgemein für jede beliebige von x, y, z, t abhängende Function $\mathfrak{F}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\Delta \mathfrak{F}}{dt} + \frac{\delta^* \mathfrak{F}}{dt}, \quad \text{[vgl. Seite 359 (10.)]},$$

also z. B. auch:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\Delta \sigma}{dt} + \frac{\delta^* \sigma}{dt}. \tag{16.}$$

---

*) Bei Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 487] lautet die Definition von σ:

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}. \tag{f.}$$

Wir bedienen uns aber durchweg der *Hertz'schen Bezeichnungsweise,* und haben also in (f.) die Helmholtz'schen Buchstaben $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ [vgl. (F.) Seite 365] zu ersetzen durch $\frac{\mathfrak{X}}{4\pi}, \frac{\mathfrak{Y}}{4\pi}, \frac{\mathfrak{Z}}{4\pi}$. Und in solcher Weise erhält die Helmholtz'sche Formel (f.) die in (14.) angegebene Gestalt.

Substituirt man für das letzte Glied den Werth (15.), so erhält man:

(17.) $$\frac{\Delta\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial(\sigma\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma\gamma)}{\partial z},$$

was mit den betreffenden für ϱ geltenden Formeln [Seite 361 (J.)] ebenfalls harmonirt. Nur werden die in (17.) links und rechts stehenden Ausdrücke, falls man in ihnen ϱ für σ einsetzt, beide $= 0$ sein.

§ 11.

Die elektrische Strömung (u, v, w). Definition derselben in Anlehnung an den Zustand $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

Im gegenwärtigen Paragraph werden wir es mit Dingen zu thun haben, über welche Helmholtz in den betreffenden Publicationen [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 476, 526 und 597] sich nicht näher ausgesprochen hat. Doch ist wohl anzunehmen, dass er sich in diesen Dingen an die Hertz'schen Vorstellungen und Bezeichnungen unmittelbar angeschlossen hat, — abgesehen von den in (F.) Seite 365 notirten Unterschieden. Demgemäss werde ich im gegenwärtigen Paragraph hin und wieder auf Hertz mich zu berufen haben.

Nach allgemeiner Ansicht sind die in der betrachteten Substanz in irgend einem Punkt (x, y, z) vorhandenen elektrischen Strömungen (u, v, w) abhängig von der augenblicklich im Punkte (x, y, z) vorhandenen elektromotorischen Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Es ist nämlich [vgl. Seite 63 (1.)]:

(1.) $$u = \lambda\mathfrak{A}, \quad v = \lambda\mathfrak{B}, \quad w = \lambda\mathfrak{C},$$

wo λ die Leitungsfähigkeit der Substanz im Punkte (x, y, z) vorstellt. Wir setzen nun:

(2.) $$\mathfrak{A} = X + X', \quad \mathfrak{B} = Y + Y', \quad \mathfrak{C} = Z + Z',$$

indem wir dabei unter (X, Y, Z) denjenigen Theil der elektromotorischen Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ verstehen, über welchen die in diesem und im folgenden Abschnitt zu entwickelnde Theorie wirklich Auskunft giebt; während (X', Y', Z') derjenige andere Theil sein soll, der dieser Theorie *fremd* ist, und über welche sie (ihrer ganzen Anlage nach) keine Auskunft zu geben vermag*).

Was nun die Kräfte X, Y, Z betrifft, die der zu entwickelnden Theorie sich subordiniren sollen, so ist zu beachten, dass *Fernkräfte*

*) Diese der Theorie *fremden* Kräfte X', Y', Z', zu denen z. B. die durch Anhomogenität und thermische Processe hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte gehören, dürften wohl dieselben sein, welche Hertz [Ges. Werke, Bd. 2, Seite 218, 219] mit $-X', -Y', -Z'$ bezeichnet hat.

bei dieser Theorie von vornherein excludirt sind. Demgemäss können die Werthe jener Kräfte X, Y, Z im Punkte (x, y, z) nur allein abhängen von der Beschaffenheit der Substanz *in unmittelbarer Nähe des Punktes* (x, y, z). Dementsprechend mag angenommen werden, dass die Kräfte X, Y, Z proportional sind mit denjenigen drei Grössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, durch welche der augenblickliche elektrische Zustand der Substanz im Punkte (x, y, z) charakterisirt ist. Und zwar wollen wir in Einklang mit Hertz setzen*):

$$(3.)\qquad X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \qquad Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \qquad Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon},$$

wo ε den Werth des Dielektricitätscoefficienten im Punkte (x, y, z) bezeichnet. Substituirt man die Ausdrücke (3.) in (2.), so erhält man:

$$(4.)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X', \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y', \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z'.$$

Und substituirt man dies endlich in (1.), so ergiebt sich:

$$(5.)\qquad u = \frac{\lambda\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \lambda X', \qquad v = \frac{\lambda\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \lambda Y', \qquad w = \frac{\lambda\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + \lambda Z'.$$

Specialfall: $X' = Y' = Z' = Null$. — Alsdann ist offenbar nach (5.):

$$(\text{A.})\qquad u = \frac{\lambda\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \qquad v = \frac{\lambda\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \qquad w = \frac{\lambda\mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Nun ist nach Seite 362 (P.), (Q.) : $\delta\varepsilon = 0$ und $\delta\lambda = 0$, mithin z. B. auch:

$$(\text{B.})\qquad \delta\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = 0.$$

Dies vorangeschickt, bemerken wir, dass $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ [nach der Definition Seite 369] von solcher Beschaffenheit sein sollen, dass für jedwedes substantielle Flächenelement Do die Gleichung stattfindet:

$$(\text{C.})\qquad \delta(\mathfrak{X}aDo + \mathfrak{Y}bDo + \mathfrak{Z}cDo) = 0.$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die aus (A.) entspringenden Werthe, so folgt:

$$\delta\left[\frac{\varepsilon}{\lambda}(uaDo + vbDo + wcDo)\right] = 0;$$

und hieraus folgt weiter mit Hinblick auf (B.):

$$(\text{D.})\qquad \delta(uaDo + vbDo + wcDo) = 0.$$

Diese Gleichung (D.) ist völlig analog mit (C.), und überdies *identisch* mit der im eilften Abschnitt erhaltenen Gleichung (β.) Seite 260,

*) In der That sind die Formeln (1.), (2.), (3.), falls man $X' = -X'$, $Y' = -Y'$, $Z' = -Z'$ setzt, in vollem Einklang mit den betreffenden Hertz'schen Formeln [Hertz, Ges. W., Bd. 2, Seite 224], — nur mit dem Unterschiede, dass die Hertz'schen Formeln auf *krystallinische* Substanzen sich beziehen, während wir uns durchweg auf den Specialfall *unkrystallinischer* Substanzen beschränken.

also z. B. auch in Einklang mit den damals auf Seite 261 aufgestellten Formeln. *Folglich wird sie in Einklang sein mit allen in jenem eilften Abschnitt über u, v, w angestellten Betrachtungen, also namentlich auch in Einklang sein mit der damaligen Vorstellung, dass die elektrischen Strömungen in der Bewegung einer gewissen Materie (der sogenannten elektrischen Materie) bestehen.*

Allgemeiner Fall: *Die X^f, Y^f, Z^f haben irgend welche von Null verschiedenen Werthe.* — Bei der Behandlung dieses allgemeinen Falles wird man wohl in vielen Fällen voraussetzen dürfen, dass die convectiven Zuwüchse

$$(E.) \qquad \delta X^f, \qquad \delta Y^f, \qquad \delta Z^f$$

allenthalben $= 0$ sind; so dass also alsdann die Dinge sich offenbar genau ebenso gestalten, wie in dem vorhin betrachteten Specialfall.

Bemerkung. — Sind die Voraussetzungen (B.) und (E.) *nicht* erfüllt, so würde offenbar die Gleichung (D.) aufhören richtig zu sein. Es würden dann also für die elektrischen Strömungen u, v, w Formeln und Vorstellungen sich ergeben, welche mehr oder weniger *ungewöhnlich* sind, und welche z. B. auch wesentlich verschieden sein dürften von denen im eilften Abschnitt.

§ 12.

Ueber den magnetischen Zustand $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ oder $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, und über die betreffende convective Charakteristik δ.

Wenn wir auch den magnetischen Zustand $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$, seiner eigentlichen Natur nach, als etwas völlig Unbekanntes betrachten [vgl. Seite 367], so wird es doch erlaubt sein, die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, ebenso wie die Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ der einzelnen substantiellen Punkte, im Euler'schen Sinne als Functionen der Coordinaten und der Zeit uns zu denken:

$$(1.) \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}(x, y, z, t), \qquad \mathfrak{V} = \mathfrak{V}(x, y, z, t), \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{W}(x, y, z, t),$$

$$(2.) \qquad \alpha = \alpha(x, y, z, t), \qquad \beta = \beta(x, y, z, t), \qquad \gamma = \gamma(x, y, z, t).$$

Auf diese Functionen werden wir unsere allgemeinen Gleichungen Seite 359 (10.), (11.) anwenden können; so dass wir also folgende beide Formelsysteme vor uns haben:

$$(3.) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{U}}{dt} = \dfrac{\Delta \mathfrak{U}}{dt} + \dfrac{\delta \mathfrak{U}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} = \dfrac{\Delta \mathfrak{U}}{dt} + \dfrac{\delta^* \mathfrak{U}}{dt}, \end{cases}$$

(4.)
$$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{U}}{dt} = \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\gamma\right), \\ \dfrac{\delta\mathfrak{U}}{dt} = \dfrac{\delta^*\mathfrak{U}}{dt} + \left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\alpha + \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\beta + \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\gamma\right). \end{cases}$$

Um diesen Formeln (3.), (4.) einen wirklichen Sinn zu verleihen, muss *eine* der drei Charakteristiken Δ, δ, δ^* in bestimmter Weise definirt werden†). Und zu diesem Zweck adoptiren wir in vollem Einklang mit Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 492] folgende

Definition. — *Jener noch unbekannte Zustand* ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$) *soll, was seine convectiven Aenderungen* δ *betrifft, von solcher Art gedacht werden, dass für jedwedes substantielle Linienelement* Ds *die Formel stattfindet:*

(5.)
$$\delta(\mathfrak{U}\,Dx + \mathfrak{V}\,Dy + \mathfrak{W}\,Dz) = 0,$$

wo Dx, Dy, Dz *die rechtwinkligen Componenten jenes substantiellen Linienelementes* Ds *vorstellen.*

Man kann die Formel (5.), weil [nach Seite 360 (B.)] $\delta(Dx) = d(Dx)$ ist, auch so schreiben:

(6.)
$$[(\delta\mathfrak{U})Dx + (\delta\mathfrak{V})Dy + (\delta\mathfrak{W})Dz] + [\mathfrak{U}\,d(Dx) + \mathfrak{V}\,d(Dy) + \mathfrak{W}\,d(Dz)] = 0.$$

Nun ist aber [nämlich nach Seite 249 (12.); die Componenten Dx, Dy, Dz sind dort mit ξ, η, ζ bezeichnet]:

$$d(Dx) = f_1 Dx + f_2 Dy + f_3 Dz.$$

Führt man hier, statt der substantiellen Verschiebung f, die Geschwindigkeitscomponente α ein, indem man $f = \alpha\,dt$ setzt, so erhält man:

(7.)
$$\begin{cases} d(Dx) = (\alpha_1 Dx + \alpha_2 Dy + \alpha_3 Dz)\,dt. \quad \text{Ebenso wird:} \\ d(Dy) = (\beta_1 Dx + \beta_2 Dy + \beta_3 Dz)\,dt, \\ d(Dz) = (\gamma_1 Dx + \gamma_2 Dy + \gamma_3 Dz)\,dt. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe (7.) in (6.), so ergiebt sich:

(8.)
$$[\delta\mathfrak{U} + (\alpha_1\mathfrak{U} + \beta_1\mathfrak{V} + \gamma_1\mathfrak{W})\,dt]\,Dx + \text{etc.} = 0,$$

wo durch das etc. die analogen, mit Dy und Dz behafteten Terme angedeutet sein sollen. Die Formeln (6.), (7.), (8.) müssen nun aber, ebenso wie (5.), für jedes beliebige substantielle Element Ds gelten, also gültig sein für beliebige Werthe der Dx, Dy, Dz. Folglich müssen in (8.) die Coefficienten von Dx, Dy, Dz einzeln $= 0$ sein. Somit gelangen wir zu drei Gleichungen, von denen die erste lautet:

(9.)
$$\delta\mathfrak{U} = -(\alpha_1\mathfrak{U} + \beta_1\mathfrak{V} + \gamma_1\mathfrak{W})\,dt;$$

wofür man auch schreiben kann:

(10.)
$$\frac{\delta\mathfrak{U}}{dt} = -(\alpha_1\mathfrak{U} + \beta_1\mathfrak{V} + \gamma_1\mathfrak{W}).$$

†) Man vgl. die zweite Bemerkung auf Seite 378.

Dies in der zweiten der Gleichungen (4.) substituirt, ergiebt sich:

$$(11.)\qquad \frac{\delta^*\mathfrak{U}}{dt} = -(\mathfrak{U}_1\alpha + \mathfrak{U}_2\beta + \mathfrak{U}_3\gamma) - (\alpha_1\mathfrak{U} + \beta_1\mathfrak{B} + \gamma_1\mathfrak{W}),$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\delta^*\mathfrak{U}}{dt} = -(\mathfrak{U}_1\alpha + \mathfrak{U}_2\beta + \mathfrak{U}_3\gamma) - (\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{W})_1 + (\alpha\mathfrak{U}_1 + \beta\mathfrak{B}_1 + \gamma\mathfrak{W}_1).$$

Hieraus folgt sofort:

$$(12.)\qquad \frac{\delta^*\mathfrak{U}}{dt} = \beta(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{U}_2) + \gamma(\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{U}_3) - (\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{W})_1.$$

Dies endlich in der zweiten der Formeln (3.) substituirt, erhält man:

$$(13.)\qquad \frac{\Delta\mathfrak{U}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + \beta(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{B}_1) + \gamma(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1) + (\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{W})_1.$$

Helmholtz hat diesen Ausdruck (13.) mit $\left[\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\right]$ bezeichnet. [Vgl. Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 493].

Mit den $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ sollen nun nach Helmholtz die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ durch folgende Relationen verbunden sein [vgl. (H.) Seite 367]:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}, \\ \mathfrak{M} = \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}, \\ \mathfrak{N} = \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x}, \end{cases} \qquad \text{d. i.} \begin{cases} \mathfrak{L} = \mathfrak{B}_3 - \mathfrak{W}_2, \\ \mathfrak{M} = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{U}_3, \\ \mathfrak{N} = \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{B}_1; \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(15.)\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z} = 0, \qquad \text{d. i. } \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3 = 0.$$

Auch kann man, wie gelegentlich schon geschehen ist [vgl. die Bemerkung Seite 367], in vollem Einklang mit der Helmholtz'schen Vorstellungsweise, ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$) als den *primären*, und ($\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) als den *secundären* Vector des magnetischen Zustandes bezeichnen.

Die Formel (12.) nimmt nun mit Rücksicht auf (14.) die einfachere Gestalt an:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta^*\mathfrak{U}}{dt} = \gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{N} - \dfrac{\partial(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{W})}{\partial x}. \quad \text{Ebenso wird:} \\ \dfrac{\delta^*\mathfrak{B}}{dt} = \alpha\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{L} - \dfrac{\partial(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{W})}{\partial y}, \\ \dfrac{\delta^*\mathfrak{W}}{dt} = \beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M} - \dfrac{\partial(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{W})}{\partial z}. \end{cases}$$

Sehr merkwürdig erscheint, dass die durch (14.) *eingeführten Grössen* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, *hinsichtlich ihrer analytischen Eigenschaften, grosse Aehnlichkeit*

besitzen mit den früher behandelten Grössen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Um näher hierauf einzugehen, unterwerfen wir die erste Gleichung (14.) der Operation δ^* und erhalten in solcher Weise:

$$\frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt} = \frac{\delta^*}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right) - \frac{\delta^*}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right),$$

oder mit Hinblick auf Seite 365 (24.):

$$\frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^* \mathfrak{V}}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\delta^* \mathfrak{W}}{dt}\right).$$

Substituirt man hier für die eingeklammerten Grössen ihre in (16.) angegebenen Werthe, so ergiebt sich sofort:

$$\frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial(\alpha \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{L})}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha \mathfrak{N} - \gamma \mathfrak{L})}{\partial z}; \tag{17.}$$

wofür man mit Rücksicht auf (15.) auch schreiben kann:

$$\frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial(\alpha \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{L})}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha \mathfrak{N} - \gamma \mathfrak{L})}{\partial z} - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right). \tag{18.}$$

Selbstverständlich gelten analoge Formeln für $\delta^* \mathfrak{M}$ und $\delta^* \mathfrak{N}$. Diese drei Formeln für $\delta^* \mathfrak{L}$, $\delta^* \mathfrak{M}$, $\delta^* \mathfrak{N}$ sind aber von genau derselben Beschaffenheit, wie die früher [Seite 370 (12.)] für $\delta^* \mathfrak{X}$, $\delta^* \mathfrak{Y}$, $\delta^* \mathfrak{Z}$ gefundenen Formeln; so dass man also sagen kann:

Erster Satz. — *Die* $\delta^* \mathfrak{L}$, $\delta^* \mathfrak{M}$, $\delta^* \mathfrak{N}$ *drücken sich analytisch durch die* $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *in genau derselben Weise aus, wie die* $\delta^* \mathfrak{X}$, $\delta^* \mathfrak{Y}$, $\delta^* \mathfrak{Z}$ *durch die* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. *Oder mit andern Worten: Die Charakteristik* δ^* *hat für die* $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *genau dieselbe Bedeutung wie für die* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$.

Zufolge unserer allgemeinen Untersuchungen über eine beliebige Function $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(x, y, z, t)$, werden nun z. B. für $\mathfrak{L}$ folgende Formeln gelten [vgl. Seite 359 (10.), (11.)]:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= \frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} + \frac{\delta \mathfrak{L}}{dt}, \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} + \frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt}, \end{aligned}\right. \tag{19.}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}\gamma\right), \\ \frac{\delta \mathfrak{L}}{dt} &= \frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt} + \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z}\gamma\right); \end{aligned}\right. \tag{20.}$$

und entsprechende Formeln sind für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zu notiren. Diese Formeln (19.), (20.) sind völlig analog mit den für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ geltenden Formeln (3.), (4.) Seite 368. D. h. *die Relationen zwischen den drei Charakteristiken* Δ, δ, δ^* *sind bei den Functionen* $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *genau dieselben wie bei den Functionen* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Zufolge des vorigen Satzes hat aber die

Charakteristik δ^* für beiderlei Functionen *dieselbe Bedeutung*. Folglich gilt Gleiches auch für die Charakteristiken Δ und δ. Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz.

Zweiter Satz. — *Die Charakteristiken Δ, δ, δ^* sind für die Functionen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$* (14.) *von genau derselben Bedeutung wie für die Functionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$; so dass man z. B., mit Hinblick auf* (5.) *Seite 369, sagen kann:*

Die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind von solcher Beschaffenheit, dass für jedwedes substantielle Flächenelement Do die Formel stattfindet:

$$\delta(\mathfrak{L}\,a\,Do + \mathfrak{M}\,b\,Do + \mathfrak{N}\,c\,Do) = 0, \tag{21.}$$

wo a, b, c die Richtungscosinus der auf Do errichteten Normale vorstellen.

Bemerkung. — Die Betrachtungen zu Anfang dieses Abschnitts [Seite 334—346] sind nur als *provisorisch*, nämlich als eine historische Einleitung anzusehen. Dabei sei bemerkt, dass bei jenen provisorischen Betrachtungen der Uebergang Seite 344 von (25.) zu (27.) offenbar nur dann als ein wirklich strenger zu bezeichnen ist, wenn man voraussetzt, die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, mithin auch die p_{11}, p_{12}, . . . seien unabhängig von den Grössen α, β, γ.

Zweite Bemerkung. — Zu den ersten fünf Zeilen auf Seite 369 ist mit Bezug auf δ hinzuzufügen: Selbst wenn die physikalische Bedeutung irgend eines Vectors in bestimmter Weise gegeben ist, so bleiben trotzdem die convectiven Aenderungen seiner Componenten im Allgemeinen noch mehr oder weniger *willkürlich;* wie sich solches z. B. bei unseren früheren Untersuchungen über den Vector (u, v, w) deutlich herausgestellt hat. [Vgl. die Bemerkung auf Seite 245]. Um so mehr wird Solches gelten von einem Vector, dessen physikalische Bedeutung noch völlig unbekannt ist, also z. B. vom Vector ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$), oder z. B. vom Vector ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$).

Sechzehnter Abschnitt.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip (1892—1894).
Erster Theil: Nähere Angabe dieses Princips und der aus ihm entspringenden Theorie.

Mehrfach ist von mir auf gewisse eigenthümliche Schwierigkeiten aufmerksam gemacht worden, denen man begegnet, wenn man das allgemeine Princip der Energie für ein aus elektrischen Strömen und *invariablen* Magneten bestehendes System aufzustellen versucht. Ich verweise in dieser Beziehung auf zwei Aufsätze in den Mathematischen Annalen von 1873 [Band 6, Seite 330 und 342], ferner auf einen Aufsatz in den Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. von 1874 [daselbst Seite 195]. Aus diesen Aufsätzen geht unter Anderm hervor, dass in der berühmten Schrift von Helmholtz: „Ueber die Erhaltung der Kraft" (Berlin, 1847) gewisse Formeln und Betrachtungen enthalten sind, die nicht mit einander zusammenpassen, respective fehlerhaft sind. Gleiches ist später von *Seydler* (in Prag) bemerkt worden. Seydler spricht geradezu von einem „Fehler", der bei Helmholtz sich vorfinde. [Man vgl. das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik für 1885, Bd. 17, Seite 1028].

Auch *Hertz* weiss in seiner ersten Abhandlung vom Jahre 1890 von eigenthümlichen Schwierigkeiten zu erzählen, welche durch die *invariablen* Magnete verursacht werden. Er sagt daselbst geradezu, dass solche invariable Magnete aus dem eigentlichen Rahmen seiner Theorie heraustreten, und zwar aus doppeltem Grunde, u. s. w. [Man vgl. Hertz' Ges. Werke, Bd. 2, Seite 240].

Dies vorangeschickt, habe ich nun zu bemerken, dass die *invariablen* Magnete auch in der Helmholtz'schen Theorie von 1892 besondere Schwierigkeiten verursachen, und das Verständniss dieser Theorie ausserordentlich erschweren.

Demgemäss werde ich im Folgenden die *invariablen* Magnete ganz excludiren, und durchweg auf solche Substanzen mich beschränken, die in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur sind. Ist ja



doch die Helmholtz'sche Theorie schon ohnedies verwickelt genug; und dürfte es doch immerhin der Mühe werth sein, von dieser Theorie, auch nur in der soeben genannten Beschränkung, ein deutliches Bild sich zu verschaffen!

§ 1.

Erinnerung an gewisse einfache Betrachtungen der analytischen Mechanik.

Im folgenden Paragraph soll vom Helmholtz'schen Minimalprincip die Rede sein. Um eine Art Brücke dahin zu finden, wollen wir hier mit gewissen ganz elementaren Betrachtungen beginnen.

Bewegt sich ein System materieller Punkte $m(x, y, z)$ unter dem Einfluss irgend welcher *äusserer* Kräfte A, B, C, so wird das Princip der lebendigen Kraft lauten:

$$(\mathfrak{A}.)\qquad d(T+F)-\sum(A\,dx+B\,dy+C\,dz)=0,$$

die Summation ausgedehnt gedacht über all' jene Punkte $m(x, y, z)$. Dabei bezeichnet F das *innere Potential* des Systems, und T seine *lebendige Kraft*.

Gleichzeitig wird alsdann das Hamilton'sche Princip dargestellt sein durch die Formel:

$$(\mathfrak{B}.)\qquad \int dt\left\{\mathfrak{d}(T-F)+\sum(A\,\mathfrak{d}x+B\,\mathfrak{d}y+C\,\mathfrak{d}z)\right\}=0.$$

Denkt man sich die hier auftretende Variation $\mathfrak{d}F$ wirklich ausgeführt, also drei neue Functionen X, Y, Z berechnet, welche zu F in der Beziehung stehen:

$$(\beta.)\qquad \mathfrak{d}F+\sum(X\,\mathfrak{d}x+Y\,\mathfrak{d}y+Z\,\mathfrak{d}z)=0,$$

so gewinnt das Hamilton'sche Princip ($\mathfrak{B}$.) die Gestalt:

$$(\mathfrak{B}^*.)\ \int dt\left\{\mathfrak{d}T+\sum(X\,\mathfrak{d}x+Y\,\mathfrak{d}y+Z\,\mathfrak{d}z)+\sum(A\,\mathfrak{d}x+B\,\mathfrak{d}y+C\,\mathfrak{d}z)\right\}=0.$$

Diese Formel zeigt, dass die neuen Grössen X, Y, Z mit den A, B, C völlig parallel stehen. Ebenso wie also A, B, C die durch die gegebenen *äussern Ursachen* hervorgebrachten Kräfte sind, ebenso werden X, Y, Z diejenigen Kräfte sein, welche das *System selber*, vermöge seines innern Potentials F, anf seine einzelnen Punkte ausübt. Kurz es werden die durch jene Relation (β.) definirten neuen Grössen X, Y, Z zu bezeichnen sein als die durch das gegebene Potential F indicirten *innern Kräfte*. Das Potential F figurirt bei solcher Anschauungsweise als das eigentlich *Primäre*, aus welchem die innern Kräfte X, Y, Z, mittelst der Relation (β.), als etwas *Secundäres*, sich ableiten lassen.



Verallgemeinerung. — Bis jetzt ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass F nur allein von den Coordinaten abhängt. Sollte F nicht nur von den Coordinaten, sondern überdies auch noch von den Geschwindigkeiten abhängen, so pflegt man die in Rede stehende Relation (β.) durch folgende zu ersetzen:

$$(1.)\qquad \int dt \left\{ \mathfrak{d}F + \sum (X\mathfrak{d}x + Y\mathfrak{d}y + Z\mathfrak{d}z) \right\} = 0,$$

die Integration [ebenso wie in ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{B}^*$)] hinerstreckt gedacht über ein beliebig zu wählendes Zeitintervall; auch sind [ebenso wie in ($\mathfrak{B}$.), ($\mathfrak{B}^*$.)] die Variationen zu Anfang und zu Ende dieses Zeitintervalls $= 0$ zu denken.

Ist also F eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten, so sind unter den durch dieses Potential F hervorgebrachten innern Kräften diejenigen Grössen X, Y, Z zu verstehen, welche mit F durch die Relation (1.) *zusammenhängen.* Diese Relation (1.) ist eine Verallgemeinerung der Relation (β.). In der That erkennt man leicht, dass die Formel (1.) in (β.) übergeht, sobald F von den Geschwindigkeiten unabhängig ist.

Das betrachtete materielle System mag nun, wie wir fortan voraussetzen wollen, *den ganzen unendlichen Raum in continuirlicher Weise erfüllen.* An Stelle der einzelnen *Punkte* werden alsdann die einzelnen *Elemente* dieser Materie in Betracht zu ziehen sein. Wir construiren nun an der Stelle (x, y, z) ein *festes* Raumelement $D\tau$, d. i. ein Raumelement, welches, seiner Lage und Gestalt nach, in Bezug auf das zu Grunde gelegte Axensystem völlig unveränderlich sein soll, und setzen fest, dass X, Y, Z diejenigen Kräfte sein sollen, welche das materielle System selber auf die augenblicklich innerhalb $D\tau$ befindliche Masse ausübt. Dann werden X, Y, Z mit $D\tau$ proportional sein; so dass man also setzen kann:

$$(2a.)\qquad X = \Xi D\tau, \qquad Y = \mathrm{H} D\tau, \qquad Z = \mathrm{Z} D\tau;$$

wodurch die in (1.) enthaltene Summe die Gestalt erhält:

$$(2b.)\qquad \sum (X\mathfrak{d}x + Y\mathfrak{d}y + Z\mathfrak{d}z) = \int (\Xi\,\mathfrak{d}x + \mathrm{H}\,\mathfrak{d}y + \mathrm{Z}\,\mathfrak{d}z) D\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes. Gleichzeitig wird man das Potential F, den einzelnen Volumelementen $D\tau$ entsprechend, in einzelne Theile zerlegen können, also setzen können:

$$(2c.)\qquad F = \int \Psi D\tau;$$

woraus (weil $D\tau$ ein *festes* Raumelement ist) sofort sich ergiebt:

$$(2d.)\qquad \mathfrak{d}F = \int (\mathfrak{d}\Psi) D\tau.$$

Durch (2b, d.) gewinnt nun jene zwischen dem Potential F und den Kräften X, Y, Z stattfindende Relation (1.) die Gestalt:

$$(3.)\qquad \int dt \int \left\{ \delta \Psi + (\Xi\, \delta x + \mathsf{H}\, \delta y + \mathsf{Z}\, \delta z) \right\} D\tau = 0.$$

Selbstverständlich sind die hier betrachteten Kräfte X, Y, Z oder $\Xi D\tau$, $\mathsf{H} D\tau$, $\mathsf{Z} D\tau$ als *ponderomotorische* Kräfte zu bezeichnen. Demgemäss kann man sagen:

Bei gewissen Problemen der Mechanik — ob diese Probleme der Wirklichkeit entsprechen, oder nur idealer Natur sind, mag dahingestellt bleiben — sind die innern ponderomotorischen Kräfte Ξ, H, Z *des betrachteten materiellen Systems abhängig von einer einzigen Function* Ψ, *nämlich aus dieser Function* Ψ *ableitbar mittelst der Formel* (3.):

$$(4.)\qquad \int dt \int \left\{ \delta \Psi + (\Xi\, \delta x + \mathsf{H}\, \delta y + \mathsf{Z}\, \delta z) \right\} D\tau = 0.$$

Hier repräsentirt $D\tau$ *ein festes Raumelement, d. i. ein Raumelement, welches seiner Lage und Gestalt nach in Bezug auf das zu Grunde gelegte Axensystem völlig unveränderlich ist. Ferner bezeichnen* $\Xi D\tau$, $\mathsf{H} D\tau$, $\mathsf{Z} D\tau$ *diejenigen ponderomotorischen Kräfte, mit denen das gegebene materielle System auf eines seiner eignen Elemente, nämlich auf die augenblicklich innerhalb* $D\tau$ *befindliche Masse einwirkt.*

Bemerkung. — Im Folgenden werden wir die Buchstaben x, y, z [genau ebenso wie in (f.) Seite 353] in doppelter Bedeutung anwenden. Einerseits werden wir nämlich unter x, y, z die *localen* Coordinaten, d. i. die unveränderlichen Coordinaten des *festen* Raumelementes $D\tau$ verstehen. Andrerseits aber werden wir unter x, y, z auch die *materiellen oder substantiellen* Coordinaten, nämlich die veränderlichen Coordinaten der augenblicklich in $D\tau$ enthaltenen Masse verstehen. So z. B. sind in (4.) unter δx, δy, δz die Variationen dieser materiellen oder substantiellen Coordinaten zu verstehen.

§ 2.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip.

Die den unendlichen Weltraum erfüllende, aus ponderabler Materie und Aethermaterie bestehende Substanz [vgl. Seite 366] wird nicht nur gewisse ponderomotorische Kräfte Ξ, H, Z auf ihre einzelnen Elemente ausüben, sondern gleichzeitig auch irgend welche elektrische und magnetische Vorgänge in ihren einzelnen Elementen hervorbringen. Es fragt sich nun, ob man nicht vielleicht die Gesammtheit all' dieser Kräfte und Vorgänge *ebenfalls aus einer einzigen Function* Ψ *abzuleiten*

im Stande ist. Eine solche Function Ψ müsste alsdann offenbar nicht nur die Coordinaten x, y, z der einzelnen Substanzelemente, sondern zugleich auch die augenblicklichen elektrischen und magnetischen Zustände dieser Elemente, d. i. die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ enthalten. Sie könnte überdies vielleicht auch die augenblicklichen Geschwindigkeiten α, β, γ der genannten Elemente, vielleicht auch die elektrischen Strömungen u, v, w, sowie auch die Grössen λ, ε, μ in sich enthalten. Dabei soll λ die elektrische Leitungsfähigkeit, ε der Dielektricitätscoefficient, und μ der Magnetisirungscoefficient sein.

Eine derartige Function Ψ soll nun nach Helmholtz in der That existiren. Und zwar soll dieselbe folgendermassen lauten:

(5.)
$$\Psi D\tau = \left\{\begin{aligned} &+\frac{1}{8\pi\varepsilon}\left[\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2\right] \\ &+\frac{1}{8\pi\mu}\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2\right] \\ &+\frac{A}{4\pi}\left[\mathfrak{U}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}+\mathfrak{V}\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt}+\mathfrak{W}\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}\right]\end{aligned}\right\} D\tau,$$

wo A eine Constante bezeichnet, während $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{Y}$, $\Delta\mathfrak{Z}$ die in (13.) *Seite 370 angegebenen Bedeutungen haben, also mitabhängig sind von den α, β, γ. Dabei soll $D\tau$ irgend ein festes Raumelement sein, mit Bezug auf welches der Ausdruck $\Psi D\tau$ gebildet ist. Noch ist zu bemerken, dass sämmtliche Grössen:*

(5a.)
$$\mathfrak{U},\ \mathfrak{V},\ \mathfrak{W},\ \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z},\ \mu,\ \varepsilon,$$

sowie auch λ, α, β, γ, u, v, w, Ξ, H, Z, im Euler'schen Sinne als Functionen von x, y, z, t anzusehen sind.

Wären die einzelnen substantiellen Punkte der betrachteten Substanz völlig unbeweglich, so würde im Ausdruck (5.) nur allein die Natur der $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ veränderlich sein. Und es würde also in diesem Falle die dem *festen Raumelement $D\tau$* entsprechende Variation $(\mathfrak{d}\Psi)D\tau$ einfach dadurch erhalten werden, dass man jene Functionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ irgend welchen Variationen

(6.)
$$\mathfrak{d}\mathfrak{U},\ \mathfrak{d}\mathfrak{V},\ \mathfrak{d}\mathfrak{W},\ \mathfrak{d}\mathfrak{X},\ \mathfrak{d}\mathfrak{Y},\ \mathfrak{d}\mathfrak{Z}$$

unterwirft.

In Wirklichkeit aber sind die einzelnen substantiellen Punkte *beweglich*, ihre Coordinaten x, y, z also veränderlich. Und demgemäss sind also diese substantiellen Coordinaten*) x, y, z, falls man jene Variation $(\mathfrak{d}\Psi)D\tau$ bilden will, ebenfalls irgend welchen Variationen

(7.)
$$\mathfrak{d}x,\ \mathfrak{d}y,\ \mathfrak{d}z$$

---

*) Vgl. die Bemerkung Seite 382.



zu unterwerfen. Diese Variationen δx, δy, δz werden zur Folge haben, dass der substantielle Inhalt des festen Raumelementes $D\tau$ sich ändert, dass nämlich in dieses Raumelement, an Stelle der früheren substantiellen Punkte mit den Functionswerthen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, μ, ε, *andere* substantielle Punkte mit *anderen* Functionswerthen $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, μ', ε' einrücken.

Sicherlich wird die dem festen Raumelement $D\tau$ entsprechende Variation $(\delta\Psi)D\tau$ völlig bestimmt sein durch Angabe aller neun Variationen (6.), (7.). Dies vorangeschickt, wird man nun das Helmholtz'sche Minimalprincip, seinem eigentlichen Wesen nach, etwa folgendermassen aussprechen können:

Das Minimalprincip. — *Aus der Function Ψ ergeben sich die vorhin genannten ponderomotorischen Kräfte Ξ, H, Z, sowie auch die im Innern der Substanz erfolgenden elektrischen und magnetischen Vorgänge mittelst der Formel:*

$$(8.)\quad \int dt \int \left\{\delta\Psi + (\Xi\,\delta x + H\,\delta y + Z\,\delta z) + A(u\,\delta\mathfrak{U} + v\,\delta\mathfrak{V} + w\,\delta\mathfrak{W})\right\} D\tau = 0,$$

wo unter den $D\tau$ lauter feste Raumelemente zu verstehen sind. Dabei ist die eine Integration über alle Elemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes, die andere aber über alle Elemente dt eines beliebig zu wählenden Zeitintervalls hinerstreckt. Auch sind die Variationen

$$(9.)\qquad \delta\mathfrak{U},\ \delta\mathfrak{V},\ \delta\mathfrak{W},\ \delta\mathfrak{X},\ \delta\mathfrak{Y},\ \delta\mathfrak{Z},\ \delta x,\ \delta y,\ \delta z,$$

ebenso wie im Hamilton'schen Princip, zu Anfang und zu Ende dieses Zeitintervalls $= 0$ zu denken. Ueberdies sind diese Variationen aber auch $= 0$ zu denken in den unendlich fernen Punkten der betrachteten Substanz.

Man kann dieses Princip füglich auffassen als eine gewisse Verallgemeinerung des Principes (4.).

Denkt man sich den Werth (5.) in der Formel (8.) wirklich substituirt, so werden sich aus dieser Formel im Ganzen 9 Gleichungen ergeben von folgender Gestalt:

$$(10.)\quad \begin{cases} \delta_{\mathfrak{U}}\Psi + Au\,\delta\mathfrak{U} = 0, \\ \delta_{\mathfrak{V}}\Psi + Av\,\delta\mathfrak{V} = 0, \\ \delta_{\mathfrak{W}}\Psi + Aw\,\delta\mathfrak{W} = 0, \end{cases} \qquad (11.)\quad \begin{cases} \delta_{\mathfrak{X}}\Psi = 0, \\ \delta_{\mathfrak{Y}}\Psi = 0, \\ \delta_{\mathfrak{Z}}\Psi = 0, \end{cases}$$

$$(12.)\quad \begin{cases} \delta_x\Psi + \Xi\,\delta x = 0, \\ \delta_y\Psi + H\,\delta y = 0, \\ \delta_z\Psi + Z\,\delta z = 0. \end{cases}$$

Hier ist in den Gleichungen (10.) z. B. unter $\delta_{\mathfrak{U}}\Psi$ diejenige Variation zu verstehen, welche Ψ annimmt, falls man von sämmtlichen

Grössen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, x, y, z nur allein $\mathfrak{U}$ sich ändern lässt. Analoges gilt von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{V}}\Psi$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{W}}\Psi$ und von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{X}}\Psi$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{Y}}\Psi$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{Z}}\Psi$. Andrerseits ist in den Gleichungen (12.) z. B. unter $\mathfrak{d}_x\Psi$ diejenige Variation zu verstehen, welche Ψ annimmt, falls man von den substantiellen Coordinaten x, y, z nur allein x sich ändern lässt; wobei aber die hiedurch in $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, μ, ε hervorgebrachten Abänderungen mitzuberücksichtigen sind. Analoges gilt von $\mathfrak{d}_y\Psi$ und $\mathfrak{d}_z\Psi$.

Es wird sich nun weiterhin darum handeln, die 9 Gleichungen (10.), (11.), (12.) wirklich zu bilden, und zu untersuchen, in wie weit dieselben mit den in der Elektrostatik, in der Elektrodynamik und in der Theorie des Magnetismus für richtig geltenden Sätzen in Einklang sind. Zuvor aber sei folgende Regel notirt:

Regel. — *In den Formeln* (10.), (11.), (12.) *sind in den Variationen*

$$(13.)\qquad \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}\Psi,\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{V}}\Psi,\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{W}}\Psi,\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{X}}\Psi,\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{Y}}\Psi,\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{Z}}\Psi,\ \mathfrak{d}_x\Psi,\ \mathfrak{d}_y\Psi,\ \mathfrak{d}_z\Psi$$

solche Glieder fortzulassen, welche in der Form von Ableitungen nach x, y, z, t sich darstellen.

Der Beweis dieser Regel ergiebt sich leicht auf Grund der bei (9.) gemachten Festsetzungen. Sollte sich z. B. [was in der That der Fall sein wird] für $\mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}\Psi$ ein Werth ergeben von der Gestalt:

$$(\alpha.)\qquad \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}}\Psi = f\,\mathfrak{d}\mathfrak{U} + \frac{\partial(F\,\mathfrak{d}\mathfrak{U})}{\partial x} + \frac{\partial(G\,\mathfrak{d}\mathfrak{U})}{\partial y} + \frac{\partial(H\,\mathfrak{d}\mathfrak{U})}{\partial z},$$

so würde das Helmholtz'sche Princip (8.), falls man von allen 9 Grössen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, x, y, z nur allein $\mathfrak{U}$ variiren lässt, die Gleichung liefern:

$$(\beta.)\qquad \int dt \int \left\{ f\,\mathfrak{d}\mathfrak{U} + \frac{\partial(F\,\mathfrak{d}\mathfrak{U})}{\partial x} + \frac{\partial(G\,\mathfrak{d}\mathfrak{U})}{\partial y} + \frac{\partial(H\,\mathfrak{d}\mathfrak{U})}{\partial z} + Au\,\mathfrak{d}\mathfrak{U} \right\} D\tau = 0,$$

eine Gleichung, die man offenbar auch so schreiben kann:

$$(\gamma.)\qquad \int dt \int [F\cos(N,x) + G\cos(N,y) + H\cos(N,z)]\,\mathfrak{d}\mathfrak{U}\cdot Do$$
$$+ \int dt \int (f + Au)\,\mathfrak{d}\mathfrak{U}\cdot D\tau = 0,$$

das Integral erster Zeile ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do derjenigen *unendlich fernen* Fläche, von welcher der ganze unendliche Raum umgrenzt gedacht werden kann; dabei ist N die auf Do errichtete äussere Normale.

Nach (9.) soll aber $\mathfrak{d}\mathfrak{U}$ im Unendlichen überall $= 0$ sein. Folglich verschwindet jenes Integral erster Zeile. Die Gleichung (γ.) reducirt sich somit auf:

$$(\delta.)\qquad \int dt \int (f + Au)\,\mathfrak{d}\mathfrak{U}\cdot D\tau = 0;$$

woraus sofort folgt:

$$(\varepsilon.) \qquad f + Au = 0.$$

Man sieht also, dass im Endresultat (ε.) die mit F, G, H behafteten Glieder der Variation $\mathfrak{d}_{\mathfrak{u}}\Psi$ (α.) völlig verschwunden sind; so dass man also, ohne das Endresultat zu ändern, jene in der Form von Ableitungen nach x, y, z auftretenden Glieder gleich von vornherein hätte fortlassen können.

Dass Analoges auch von solchen Gliedern gelten wird, die als Ableitungen nach t sich präsentiren, erkennt man leicht, falls man nur beachtet, dass die Variationen [vgl. (9.)] zu Anfang und zu Ende des betrachteten Zeitintervalls $= 0$ zu denken sind. — *Q. e. d.*

Bemerkung. — Das in (8.), (9.) angegebene Princip ist, wie schon gesagt, *im Wesentlichen* identisch mit dem Helmholtz'schen Minimalprincip. [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 485, 486]. Dabei sind indessen folgende Abweichungen zu notiren:

Erstens: Statt des Helmholtz'schen Ausdrucks Φ ist von mir ein etwas anderer Ausdruck Ψ eingeführt; was übrigens nur eine *rein äusserliche* Abweichung ist, darauf berechnet, das Princip bequemer handhaben zu können.

Zweitens: Absichtlich habe ich *invariable* Magnete von meiner Betrachtung ganz ausgeschlossen, also angenommen, dass die den Weltraum erfüllende Substanz in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur sei. Demgemäss war es mir erlaubt, die von Helmholtz eingeführten Momente l, m, n gleich *Null* zu setzen. [Vgl. Seite 379].

Drittens: Hätte ich Helmholtz [vgl. Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 486, Formel (3d.); jene Formel enthält übrigens einen störenden Druckfehler; statt $R +$ muss dort gesetzt werden $R =$] strenge Folge leisten wollen, so hätte ich in meiner Formel (8.) innerhalb der geschweiften Klammern noch ein Trinom hinzufügen müssen von der Gestalt:

$$X\mathfrak{d}\mathfrak{X} + Y\mathfrak{d}\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{d}\mathfrak{Z}.$$

Das aber habe ich unterlassen, einmal deswegen, weil ich mir von der eigentlichen Bedeutung dieses Trinoms keine deutliche Vorstellung zu machen im Stande war, dann aber auch deswegen, weil der Einfluss dieses Trinoms bei den weitern Untersuchungen in all' solchen Fällen, auf die Helmholtz näher eingeht, völlig verschwindet.

Helmholtz bezeichnet die in diesem Trinom auftretenden X, Y, Z als *äussere* elektromotorische Kräfte oder auch als *äussere* elektrisirende Kräfte [a. a. O. Seite 488 und 500]. Aber gerade der Umstand, dass es *äussere* Kräfte sein sollen, erscheint mir mit dem Princip (8.) nicht recht in Einklang zu sein. Denn dieses Princip soll doch dazu dienen, die *innern* Kräfte und *innern* Vorgänge aus einer nur von den *innern* Zuständen abhängenden Function Ψ (5.) abzuleiten.

§ 3.

Die aus dem Helmholtz'schen Minimalprincip sich ergebenden Gleichungen.

Es handelt sich hier um die wirkliche Bildung der in (10.), (11.), (12.) bereits angedeuteten 9 Gleichungen, also um die Berechnung der Variationen des Ausdruckes (5.):

$$(14.)\qquad \Psi = \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} + \frac{(\mathfrak{V}_3 - \mathfrak{W}_2)^2 + (\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{U}_3)^2 + (\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)^2}{8\pi\mu}$$
$$+ \frac{A}{4\pi}\left(\mathfrak{U}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{V}\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt} + \mathfrak{W}\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}\right).$$

In Betreff der hier gebrauchten Indices 1, 2, 3 sei bemerkt, dass alle Grössen im Euler'schen Sinne als Functionen von x, y, z, t zu denken sind [vgl. (5a.)], und dass die partiellen Ableitungen solcher Functionen nach x, y, z hin und wieder zur augenblicklichen Abkürzung durch die Indices 1, 2, 3 angedeutet werden sollen.

Die Variationen von Ψ nach $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$. — Aus (14.) folgt sofort:

$$\delta_{\mathfrak{U}}\Psi = \frac{(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)\,\delta\mathfrak{U}_2 + (\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)\,\delta\mathfrak{U}_3}{4\pi\mu} + \frac{A}{4\pi}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}\delta\mathfrak{U},$$

oder was dasselbe ist:

$$\delta_{\mathfrak{U}}\Psi = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1)\,\delta\mathfrak{U}}{4\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1)\,\delta\mathfrak{U}}{4\pi\mu}\right)$$
$$- \left(\frac{\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1}{4\pi\mu}\right)_2\delta\mathfrak{U} - \left(\frac{\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1}{4\pi\mu}\right)_3\delta\mathfrak{U} + \frac{A}{4\pi}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}\delta\mathfrak{U},$$

wo die Indices 1, 2, 3 durchweg partielle Ableitungen nach x, y, z andeuten. Im letzten Ausdruck sind nun aber nach der Regel (13.) die Glieder erster Zeile fortzulassen. Somit folgt:

$$\delta_{\mathfrak{U}}\Psi = \left[-\left(\frac{\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1}{4\pi\mu}\right)_2 - \left(\frac{\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1}{4\pi\mu}\right)_3 + \frac{A}{4\pi}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}\right]\delta\mathfrak{U},$$

also mit Hinblick auf Seite 376 (14.)]:

$$\delta_{\mathfrak{U}}\Psi = \left[-\left(\frac{\mathfrak{N}}{4\pi\mu}\right)_2 + \left(\frac{\mathfrak{M}}{4\pi\mu}\right)_3 + \frac{A}{4\pi}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}\right]\delta\mathfrak{U}.$$

Die erste der Gleichungen (10.):

$$\delta_{\mathfrak{U}}\Psi + Au\,\delta\mathfrak{U} = 0$$

gewinnt somit folgende Gestalt:

$$(15.)\qquad \begin{cases} A\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} + 4\pi u\right) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}. \quad \text{Ebenso wird:} \\ A\left(\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt} + 4\pi v\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}, \\ A\left(\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt} + 4\pi w\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}. \end{cases}$$

Bemerkung. — Differenzirt man die Gleichungen (15.) partiell nach x, y, z und addirt, so erhält man sofort:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}\right)+4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

also mittelst des Satzes (24.) Seite 365:

$$\frac{\Delta}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)+4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

also nach Seite 371 (14.):

$$\frac{\Delta\sigma}{dt}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

oder endlich mit Hinblick auf Seite 372 (17.):

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha\sigma)}{\partial x}+\frac{\partial(\beta\sigma)}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma\sigma)}{\partial z}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$$

Liegt nun insbesondre der Punkt (x, y, z) in einem Theile der Substanz, der *vollkommen isolirend* ist, so wird $\lambda=0$, mithin [vgl. Seite 373 (5.)] auch $u=v=w=0$; so dass also alsdann die Formel $(\alpha.)$ sich reducirt auf

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha\sigma)}{\partial x}+\frac{\partial(\beta\sigma)}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma\sigma)}{\partial z}=0.$$

Diese Gleichung $(\beta.)$ ist aber völlig gleichlautend mit der für die Dichtigkeit ϱ geltenden Formel (J.) Seite 361. So entsteht die Vermuthung, dass σ eine *Dichtigkeit* sein könnte.

Die Variationen von Ψ nach $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. — Will man nun ferner, auf Grund der Formel (14.), die Variation $\mathfrak{d}_\mathfrak{X}\Psi$ bilden, so hat man zu beachten, dass in jener Formel (14.) die Grössen $\Delta\mathfrak{X}, \Delta\mathfrak{Y}, \Delta\mathfrak{Z}$ folgende Werthe haben [vgl. Seite 370 (13.)]:

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta\mathfrak{X}}{dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})_2+(\gamma\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Z})_3+\alpha(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{Y}_2+\mathfrak{Z}_3),\\ \dfrac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})_3+(\alpha\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{X})_1+\beta(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{Y}_2+\mathfrak{Z}_3),\\ \dfrac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}=\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}+(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})_1+(\beta\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{Y})_2+\gamma(\mathfrak{X}_1+\mathfrak{Y}_2+\mathfrak{Z}_3). \end{cases}$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus (14.) sofort:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{X}\Psi=\frac{\mathfrak{X}\,\mathfrak{d}\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}+\frac{A\mathfrak{U}}{4\pi}\left[\frac{\partial\,\mathfrak{d}\mathfrak{X}}{\partial t}+(\beta\,\mathfrak{d}\mathfrak{X})_2+(\gamma\,\mathfrak{d}\mathfrak{X})_3+\alpha(\mathfrak{d}\mathfrak{X})_1\right]$$
$$+\frac{A\mathfrak{B}}{4\pi}\left[-(\beta\,\mathfrak{d}\mathfrak{X})_1+\beta(\mathfrak{d}\mathfrak{X})_1\right]+\frac{A\mathfrak{W}}{4\pi}\left[-(\gamma\,\mathfrak{d}\mathfrak{X})_1+\gamma(\mathfrak{d}\mathfrak{X})_1\right],$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{X}\Psi=\frac{\mathfrak{X}\,\mathfrak{d}\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}+\frac{A}{4\pi}\left[\frac{\partial(\mathfrak{U}\,\mathfrak{d}\mathfrak{X})}{\partial t}+(\mathfrak{U}\beta\mathfrak{d}\mathfrak{X})_2+(\mathfrak{U}\gamma\mathfrak{d}\mathfrak{X})_3+(\mathfrak{U}\alpha\mathfrak{d}\mathfrak{X})_1\right]$$
$$-\frac{A}{4\pi}\left[\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}\mathfrak{d}\mathfrak{X}+\mathfrak{U}_2\beta\,\mathfrak{d}\mathfrak{X}+\mathfrak{U}_3\gamma\,\mathfrak{d}\mathfrak{X}+(\mathfrak{U}\alpha)_1\mathfrak{d}\mathfrak{X}\right]$$
$$-\frac{A}{4\pi}\left[\mathfrak{B}\beta_1\mathfrak{d}\mathfrak{X}+\mathfrak{W}\gamma_1\mathfrak{d}\mathfrak{X}\right].$$

Hier aber sind in der ersten Zeile die in den eckigen Klammern enthaltenen Glieder sämmtlich fortzulassen, zufolge der Regel (13.). Somit ergiebt sich:

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{X}}\Psi = \frac{\mathfrak{X}\,\mathfrak{d}\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon} - \frac{A}{4\pi}\left[\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + (\mathfrak{U}_1\alpha + \mathfrak{U}_2\beta + \mathfrak{U}_3\gamma) + (\mathfrak{U}\alpha_1 + \mathfrak{V}\beta_1 + \mathfrak{W}\gamma_1)\right]\mathfrak{d}\mathfrak{X}.$$

Der hier in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck ist aber offenbar auch so darstellbar:

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + (\mathfrak{U}_1\alpha + \mathfrak{U}_2\beta + \mathfrak{U}_3\gamma) + (\mathfrak{U}\alpha + \mathfrak{V}\beta + \mathfrak{W}\gamma)_1 - (\mathfrak{U}_1\alpha + \mathfrak{V}_1\beta + \mathfrak{W}_1\gamma),$$

oder auch so:

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + \beta(\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1) + \gamma(\mathfrak{U}_3 - \mathfrak{W}_1) + (\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})_1.$$

Nach Seite 376 (13.) ist daher dieser Ausdruck $= \frac{\Delta\mathfrak{U}}{dt}$; so dass man also schliesslich erhält:

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{X}}\Psi = \left(\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon} - \frac{A}{4\pi}\frac{\Delta\mathfrak{U}}{dt}\right)\mathfrak{d}\mathfrak{X}.$$

Die erste der drei Gleichungen (11.):

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{X}}\Psi = 0$$

gewinnt somit folgende Gestalt:

$$(17.)\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{U}}{dt} = \dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}. \quad \text{Ebenso wird:} \\ A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{V}}{dt} = \dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \\ A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{W}}{dt} = \dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Differenzirt man die beiden letzten Gleichungen partiell nach z und y, und subtrahirt, so erhält man:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta\mathfrak{V}}{dt} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta\mathfrak{W}}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon},$$

also mittelst des Satzes (24.) Seite 365:

$$A\frac{\Delta}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon},$$

oder mit Hinblick auf Seite 376 (14.):

$$(18.)\qquad \begin{cases} A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}. \quad \text{Ebenso ergiebt sich:} \\ A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{M}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \\ A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{N}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}; \end{cases}$$

was in Einklang steht mit der Formel (15.) Seite 376.

Uebrigens sind die Gleichungen (15.) und (18.) identisch mit den eigentlichen *Hertz'schen Gleichungen* [Seite 341], vorausgesetzt, dass keine der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte einwirken. Denn alsdann ist nach Seite 373 (5.): $u = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon}$. U. s. w.

Die Variationen von Ψ nach den substantiellen Coordinaten x, y, z. — Die wirklichen Zuwüchse der *substantiellen Coordinaten*†) x, y, z während der Zeit dt haben offenbar die Werthe:

$$(19.) \qquad dx = \alpha\, dt, \quad dy = \beta\, dt, \quad dz = \gamma\, dt,$$

wo α, β, γ die substantiellen Geschwindigkeitscomponenten sind.

Neben diesen *wirklichen* Zuwüchsen der substantiellen Coordinaten haben wir nun aber noch irgend welche nur *fingirte* Zuwüchse derselben uns vorzustellen. Diese letztern bezeichnen wir mit

$$(20.) \qquad \mathfrak{d}x = f, \quad \mathfrak{d}y = g, \quad \mathfrak{d}z = h,$$

wo alsdann f, g, h als willkürliche Functionen der localen Coordinaten x, y, z anzusehen sind. Es handelt sich darum, diejenigen Aenderungen zu finden, welche diese nur fingirten substantiellen Verschiebungen (20.) im Werthe des Ausdrucks Ψ (14.) hervorbringen würden.

Zu diesem Zwecke sei zuvörderst an einige bereits bekannte Formeln erinnert. Nach Seite 370 (11.) ist:

$$(\alpha.) \quad \frac{\delta^* \mathfrak{X}}{dt} dt = [(\alpha_1 \mathfrak{X} + \alpha_2 \mathfrak{Y} + \alpha_3 \mathfrak{Z}) - (\mathfrak{X}_1 \alpha + \mathfrak{X}_2 \beta + \mathfrak{X}_3 \gamma) - \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)]\, dt.$$

Desgleichen ist nach dem Satz Seite 378:

$$(\beta.) \quad \frac{\delta^* \mathfrak{L}}{dt} dt = [(\alpha_1 \mathfrak{L} + \alpha_2 \mathfrak{M} + \alpha_3 \mathfrak{N}) - (\mathfrak{L}_1 \alpha + \mathfrak{L}_2 \beta + \mathfrak{L}_3 \gamma) - \mathfrak{L}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)]\, dt.$$

Ferner ist nach Seite 376 (11.):

$$(\gamma.) \quad \frac{\delta^* \mathfrak{U}}{dt} dt = -\, [(\mathfrak{U}_1 \alpha + \mathfrak{U}_2 \beta + \mathfrak{U}_3 \gamma) + (\alpha_1 \mathfrak{U} + \beta_1 \mathfrak{V} + \gamma_1 \mathfrak{W})]\, dt.$$

Endlich sind nach Seite 371 (15.) und nach Seite 362 (P.), (Q.) noch folgende Formeln zu notiren:

$$(\delta.) \qquad \frac{\delta^* \sigma}{dt} dt = -\, [(\sigma\alpha)_1 + (\sigma\beta)_2 + (\sigma\gamma)_3]\, dt,$$

$$(\varepsilon.) \qquad \frac{\delta^* \varepsilon}{dt} dt = -\, [\varepsilon_1 \alpha + \varepsilon_2 \beta + \varepsilon_3 \gamma]\, dt,$$

$$(\zeta.) \qquad \frac{\delta^* \mu}{dt} dt = -\, [\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta + \mu_3 \gamma]\, dt.$$

Da alle Grössen im Euler'schen Sinne als Functionen der localen Coordinaten x, y, z und der Zeit t anzusehen sind, so wird z. B. der dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs von $\mathfrak{X}$ zu bezeichnen sein

†) Vgl. die Bemerkung Seite 382.

mit $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}dt$. Auch wird dieser Zuwachs nach Seite 368 (3.) in zwei Theile zerlegbar sein:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}dt = \frac{\delta^* \mathfrak{X}}{dt}dt + \frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt}dt.$$

Der erste Theil entsteht durch die *räumliche Verschiebung* der Substanz und heisst der convective Theil. Der zweite Theil ist von der räumlichen Verschiebung unabhängig, und entsteht nur allein in Folge der *Zustandsänderung* des betrachteten Substanzelementes. Er heisst der endogene Theil.

Der convective Theil besitzt den soeben in (α.) angegebenen Werth. Und man kann daher diesen Ausdruck (α.):

$$[(\alpha_1\mathfrak{X} + \alpha_2\mathfrak{Y} + \alpha_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{X}_2\beta + \mathfrak{X}_3\gamma) - \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)]\,dt$$

als denjenigen Zuwachs bezeichnen, *den die Grösse $\mathfrak{X}$ blos allein in Folge der substantiellen Verschiebungen $\alpha\,dt$, $\beta\,dt$, $\gamma\,dt$ annehmen würde.* Nach dem Muster dieses Ausdrucks wird daher auch derjenige Zuwachs angebbar sein, den die Grösse $\mathfrak{X}$ durch irgend welche *andere* substantiellen Verschiebungen erfahren würde. Und es wird daher z. B. derjenige Zuwachs, den $\mathfrak{X}$ durch die Verschiebungen (20.) erhalten würde, den Werth haben:

$$(f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{X}_1 f + \mathfrak{X}_2 g + \mathfrak{X}_3 h) - \mathfrak{X}(f_1 + g_2 + h_3).$$

Mit andern Worten: Dieser letzte Ausdruck repräsentirt die Variation von $\mathfrak{X}$ nach den substantiellen Coordinaten x, y, z; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$\text{(A.)}\quad \mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{X} = (f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{X}_1 f + \mathfrak{X}_2 g + \mathfrak{X}_3 h) - \mathfrak{X}(f_1 + g_2 + h_3).$$

Ebenso wie aus (α.) die Formel (A.) entstanden ist, genau ebenso werden sich offenbar aus (β.), (γ.), (δ.), (ε.), (ζ.) folgende Formeln ergeben:

$$\text{(B.)}\quad \mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{L} = (f_1\mathfrak{L} + f_2\mathfrak{M} + f_3\mathfrak{N}) - (\mathfrak{L}_1 f + \mathfrak{L}_2 g + \mathfrak{L}_3 h) - \mathfrak{L}(f_1 + g_2 + h_3),$$

$$\text{(C.)}\quad \mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{U} = -\,[(\mathfrak{U}_1 f + \mathfrak{U}_2 g + \mathfrak{U}_3 h) + (f_1\mathfrak{U} + g_1\mathfrak{V} + h_1\mathfrak{W})],$$

$$\text{(D.)}\quad \mathfrak{d}_{xyz}\sigma = -\,[(\sigma f)_1 + (\sigma g)_2 + (\sigma h)_3],$$

$$\text{(E.)}\quad \mathfrak{d}_{xyz}\varepsilon = -\,[\varepsilon_1 f + \varepsilon_2 g + \varepsilon_3 h],$$

$$\text{(F.)}\quad \mathfrak{d}_{xyz}\mu = -\,[\mu_1 f + \mu_2 g + \mu_3 h],$$

wo überall f, g, h als Abbreviaturen für $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$ (20.) anzusehen sind. Endlich ist, unter Anwendung ebenderselben Abbreviaturen, noch die Formel Seite 353 (21.) zu notiren:

$$\text{(G.)}\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\alpha = \frac{\partial f}{\partial t} + (f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma) - (\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h).$$

Uebrigens wird man diese Formel (G.) nach dem Vorgange von Helmholtz auch so schreiben können:

$$(\text{H.})\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\alpha = \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha(f_1 + g_2 + h_3) + \mathfrak{d}_{xyz}\alpha_0,$$

wo alsdann das letzte Glied die Bedeutung hat:

$$(\text{J.})\quad \mathfrak{d}_{xyz}\alpha_0 = (f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma) - (\alpha_1 f + \alpha_2 g + \alpha_3 h) - \alpha(f_1 + g_2 + h_3).$$

Dabei wird es zweckmässig sein, die Grössen α_0, β_0, γ_0 als drei *auxiliare Functionen* sich vorzustellen, deren Werthe mit α, β, γ identisch sind, deren Variationen aber zu den Variationen von α, β, γ in der in (H.) angegebenen Beziehung stehen. Zugleich sei bemerkt, dass der Ausdruck (J.) völlig conform ist mit den Ausdrücken (A.) und (B.).

Wenn wir aus den vorstehenden Formeln (A.), (B.), ... (J.) irgend eine, z. B. die Formel (A.) herausgreifen:

$$(\text{A}'.)\quad \mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{X} = (f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{X}_1 f + \mathfrak{X}_2 g + \mathfrak{X}_3 h) - \mathfrak{X}(f_1 + g_2 + h_3),$$

so werden wir dieselbe z. B. auf den Fall anwenden können, dass von den drei substantiellen Coordinaten x, y, z nur *eine* variirt wird. Die so sich ergebenden specielleren Formeln mögen bezeichnet werden mit

$$(\text{A}''.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{d}_x\mathfrak{X} = f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z} - \mathfrak{X}_1 f, \\ \mathfrak{d}_y\mathfrak{X} = -\mathfrak{X}_2 g - \mathfrak{X} g_2, \\ \mathfrak{d}_z\mathfrak{X} = -\mathfrak{X}_3 h - \mathfrak{X} h_3. \end{cases}$$

Bemerkung. — Für ein bestimmtes substantielles Element hat ε stets ein und denselben Werth [vgl. Seite 361]. Die Variation $\mathfrak{d}\varepsilon$ wird also nur durch die substantiellen Verschiebungen, nämlich nur dadurch hervorgebracht, dass das betrachtete *feste* Raumelement in Folge jener Verschiebungen seinen substantiellen Inhalt wechselt. Hingegen ist ε völlig unabhängig von den innern Zustandsänderungen, d. i. von den Aenderungen der Grössen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Die allgemeine Gleichung:

$$\mathfrak{d}\varepsilon = \mathfrak{d}_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathfrak{W}}\,\varepsilon + \mathfrak{d}_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}}\,\varepsilon + \mathfrak{d}_{xyz}\,\varepsilon$$

reducirt sich also auf:

$$\mathfrak{d}\varepsilon = \mathfrak{d}_{xyz}\varepsilon;$$

so dass man also die Formel (E.) auch so schreiben kann:

$$\mathfrak{d}\varepsilon = -(\varepsilon_1 f + \varepsilon_2 g + \varepsilon_3 h) = -(\varepsilon_1\,\mathfrak{d}x + \varepsilon_2\,\mathfrak{d}y + \varepsilon_3\,\mathfrak{d}z),$$

ein Resultat, zu welchem man allerdings auch auf kürzerem Wege hätte gelangen können.

Dies vorangeschickt, wollen wir nun endlich die Variationen von Ψ nach den substantiellen Coordinaten x, y, z wirklich zu bilden suchen. Der Ausdruck Ψ (14.) Seite 387 besteht aus drei Theilen:

$$(21.)\qquad \Psi = \Psi_e + \Psi_m + \Psi_q;$$

und diese einzelnen Theile besitzen folgende Werthe:

$$(22.)\qquad \Psi_e = \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon},$$

$$(23.)\qquad \Psi_m = \frac{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu},\quad \text{[vgl. Seite 376 (14.)]:}$$

$$(24.)\qquad \Psi_q = \frac{A}{4\pi}\left(\mathfrak{U}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{V}\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt} + \mathfrak{W}\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}\right).$$

wo in (22.) zur augenblicklichen Abkürzung $\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}^2$ gesetzt ist. Auch folgt aus (22.) sofort:

$$(25.)\qquad \mathfrak{d}_x\Psi_e = \frac{\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_x\mathfrak{R}}{4\pi\varepsilon} - \frac{\mathfrak{R}^2\mathfrak{d}_x\varepsilon}{8\pi\varepsilon^2}.$$

Nun ist nach (A.) Seite 391:

$$\mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{X} = (f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{X}_1 f + \mathfrak{X}_2 g + \mathfrak{X}_3 h) - \mathfrak{X}(f_1 + g_2 + h_3),$$
$$\mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{Y} = (g_1\mathfrak{X} + g_2\mathfrak{Y} + g_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{Y}_1 f + \mathfrak{Y}_2 g + \mathfrak{Y}_3 h) - \mathfrak{Y}(f_1 + g_2 + h_3),$$
$$\mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{Z} = (h_1\mathfrak{X} + h_2\mathfrak{Y} + h_3\mathfrak{Z}) - (\mathfrak{Z}_1 f + \mathfrak{Z}_2 g + \mathfrak{Z}_3 h) - \mathfrak{Z}(f_1 + g_2 + h_3).$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und addirt, so folgt [weil $\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}^2$ gesetzt ist] sofort:

$$(26.)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_{xyz}\mathfrak{R} = {} & \mathfrak{X}(f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z}) - \mathfrak{R}\mathfrak{R}_1 f - \mathfrak{R}^2 f_1 \\ & + \mathfrak{Y}(g_1\mathfrak{X} + g_2\mathfrak{Y} + g_3\mathfrak{Z}) - \mathfrak{R}\mathfrak{R}_2 g - \mathfrak{R}^2 g_2 \\ & + \mathfrak{Z}(h_1\mathfrak{X} + h_2\mathfrak{Y} + h_3\mathfrak{Z}) - \mathfrak{R}\mathfrak{R}_3 h - \mathfrak{R}^2 h_3.\end{aligned}$$

Ferner ist nach (E.) Seite 391:

$$(27.)\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\varepsilon = -(\varepsilon_1 f + \varepsilon_2 g + \varepsilon_3 h).$$

Bringt man jetzt die Formeln (26.), (27.) auf den besondern Fall in Anwendung, dass von den drei substantiellen Coordinaten x, y, z nur allein x variirt wird, mithin g und h Null sind, so erhält man:

$$(28.)\qquad \mathfrak{R}\,\mathfrak{d}_x\mathfrak{R} = \mathfrak{X}(f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z}) - \mathfrak{R}^2 f_1 - \mathfrak{R}\mathfrak{R}_1 f,$$

$$(29.)\qquad \mathfrak{d}_x\varepsilon = -\varepsilon_1 f.$$

Substituirt man diese Werthe (28.), (29.) in der Formel (25.), so ergiebt sich leicht:

$$\mathfrak{d}_x\Psi_e = \frac{\mathfrak{X}(f_1\mathfrak{X} + f_2\mathfrak{Y} + f_3\mathfrak{Z})}{4\pi\varepsilon} - \frac{\mathfrak{R}^2 f_1}{4\pi\varepsilon} - \left(\frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right)_1 f,$$

oder was dasselbe ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_x\Psi_e = {} & \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{X}f}{4\pi\varepsilon}\right)_1 + \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}f}{4\pi\varepsilon}\right)_2 + \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Z}f}{4\pi\varepsilon}\right)_3 - \left(\frac{\mathfrak{R}^2 f}{4\pi\varepsilon}\right)_1 \\ & - \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right)_1 f - \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}\right)_2 f - \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)_3 f + \left(\frac{\mathfrak{R}^2}{4\pi\varepsilon}\right)_1 f - \left(\frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right)_1 f.\end{aligned}$$

Hier aber sind nach bekannter Regel [Seite 385 (13.)] die Glieder erster Zeile fortzulassen. Somit folgt:

$$\mathfrak{d}_x\Psi_e = -\left[\left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right)_1 + \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon}\right)_2 + \left(\frac{\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)_3 - \left(\frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right)_1\right] f,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\mathfrak{d}_x\Psi_e = -\left[\left(\frac{2\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{R}^2}{8\pi\varepsilon}\right)_1 + \left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right)_2 + \left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)_3\right] f,$$

oder, weil $\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2$ und $f = \mathfrak{d}x$ ist:

$$\mathfrak{d}_x\Psi_e = -\left[\left(\frac{\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}\right)_1 + \left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right)_2 + \left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)_3\right] \mathfrak{d}x. \tag{30.}$$

Und in analoger Art wird man offenbar aus (23.) erhalten:

$$\mathfrak{d}_x\Psi_m = -\left[\left(\frac{\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu}\right)_1 + \left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right)_2 + \left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right)_3\right] \mathfrak{d}x. \tag{31.}$$

Endlich ergiebt sich, wie sogleich erläutert werden soll, aus (24.):

$$\mathfrak{d}_x\Psi_q = 0. \tag{32.}$$

Erläuterung. — Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass man die Formel (32.) *in einfacher Weise* abzuleiten im Stande sein muss. Einen solchen einfachen Weg aber habe ich bisher nicht gefunden. Vielmehr bin ich vorläufig diese Formel nur mittelst sehr umfangreicher und mühsamer Rechnungen abzuleiten im Stande. Es würde keinen Sinn haben, diese umfangreichen Rechnungen hier *in extenso* drucken zu lassen. Dagegen mag es mir gestattet sein, dieselben, ihrem Gange nach, einigermassen anzudeuten.

Vor Allem sind die allgemeinen Formeln:

$$\mathfrak{V}_3 - \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{U}_3 = \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{N}, \quad \text{[Seite 376 (14.)]},$$
$$\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3 = 0, \quad \text{[Seite 376 (15.)]},$$
$$\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3 = 4\pi\sigma, \quad \text{[Seite 371 (14.)]},$$

im Auge zu behalten. *Auch ist von der Regel Seite 385* (13.) *fortwährend Gebrauch zu machen.*

Substituirt man nun in dem Ausdruck (24.):

$$\Psi_q = \frac{A}{4\pi}\left(\mathfrak{U}\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} + \mathfrak{V}\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt} + \mathfrak{W}\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}\right) \tag{\alpha.}$$

für die Grössen $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{Y}$, $\Delta\mathfrak{Z}$ ihre bekannten Werthe Seite 370 (13):

$$\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{X}_2\beta + \mathfrak{X}_3\gamma) - (\alpha_1\mathfrak{X} + \alpha_2\mathfrak{Y} + \alpha_3\mathfrak{Z}) + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$
$$\frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} + (\mathfrak{Y}_1\alpha + \mathfrak{Y}_2\beta + \mathfrak{Y}_3\gamma) - (\beta_1\mathfrak{X} + \beta_2\mathfrak{Y} + \beta_3\mathfrak{Z}) + \mathfrak{Y}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$
$$\frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + (\mathfrak{Z}_1\alpha + \mathfrak{Z}_2\beta + \mathfrak{Z}_3\gamma) - (\gamma_1\mathfrak{X} + \gamma_2\mathfrak{Y} + \gamma_3\mathfrak{Z}) + \mathfrak{Z}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$

so erhält man nach einiger Rechnung:

$$\Psi_q = \Psi_j + \Psi_k + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial z}, \tag{\beta.}$$

wo Ψ_j, Ψ_k und $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Bedeutungen haben:

$$(\gamma.)\qquad \Psi_j = \frac{A}{4\pi}\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \mathfrak{V}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t} + \mathfrak{W}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right),$$

$$(\delta.)\qquad \Psi_k = \frac{A}{4\pi}\left\{4\pi\sigma(\mathfrak{U}\alpha + \mathfrak{V}\beta + \mathfrak{W}\gamma) + \left|\begin{array}{ccc}\alpha & \mathfrak{X} & \mathfrak{L}\\ \beta & \mathfrak{Y} & \mathfrak{M}\\ \gamma & \mathfrak{Z} & \mathfrak{N}\end{array}\right|\right\},$$

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{cases}\mathfrak{F} = \dfrac{A}{4\pi}\Big[\alpha(\mathfrak{U}\mathfrak{X} + \mathfrak{V}\mathfrak{Y} + \mathfrak{W}\mathfrak{Z}) - \mathfrak{X}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})\Big],\\ \mathfrak{G} = \dfrac{A}{4\pi}\Big[\beta(\mathfrak{U}\mathfrak{X} + \mathfrak{V}\mathfrak{Y} + \mathfrak{W}\mathfrak{Z}) - \mathfrak{Y}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})\Big],\\ \mathfrak{H} = \dfrac{A}{4\pi}\Big[\gamma(\mathfrak{U}\mathfrak{X} + \mathfrak{V}\mathfrak{Y} + \mathfrak{W}\mathfrak{Z}) - \mathfrak{Z}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})\Big],\end{cases}$$

Aus (β.) folgt nun (unter Anwendung jener Regel Seite 385) sofort:

$$(\zeta.)\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_q = \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_j + \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_k.$$

Und es handelt sich nun darum, die hier in (ζ.) auf der rechten Seite stehenden Variationen wirklich zu berechnen.

Auf Grund des Ausdruckes (γ.) gelangt man nach einiger Rechnung, unter Anwendung der Gleichungen Seite 391 (A.), (C.), zu folgender Formel:

$$(\eta.)\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_j = +\frac{A}{4\pi}\left\{4\pi\left(\frac{\partial(\sigma\mathfrak{U})}{\partial t}f + \cdots\right) + \left(\frac{\partial(\mathfrak{Y}\mathfrak{N} - \mathfrak{Z}\mathfrak{M})}{\partial t}f + \cdots\right)\right\},$$

Beachtet man ferner die aus (H.) Seite 392 entspringenden Gleichungen:

$$\mathfrak{d}_{xyz}\alpha = \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha(f_1 + g_2 + h_3) + \mathfrak{d}_{xyz}\alpha_0,$$

$$\mathfrak{d}_{xyz}\beta = \frac{\partial g}{\partial t} + \beta(f_1 + g_2 + h_3) + \mathfrak{d}_{xyz}\beta_0,$$

$$\mathfrak{d}_{xyz}\gamma = \frac{\partial h}{\partial t} + \gamma(f_1 + g_2 + h_3) + \mathfrak{d}_{xyz}\gamma_0,$$

so gelangt man, auf Grund des Ausdruckes (δ.), zu folgender Formel:

$$\begin{aligned}(\vartheta.)\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_k = &-\frac{A}{4\pi}\left\{4\pi\left(\frac{\partial(\sigma\mathfrak{U})}{\partial t}f + \cdots\right) + \left(\frac{\partial(\mathfrak{Y}\mathfrak{N} - \mathfrak{Z}\mathfrak{M})}{\partial t}f + \cdots\right)\right\}\\ &+\frac{A}{4\pi}\Big\{4\pi\sigma(\mathfrak{U}\alpha + \cdots)(f_1 + g_2 + h_3) + 4\pi\,\mathfrak{d}_{xyz}(\mathfrak{U}\sigma\alpha_0 + \cdots)\Big\}\\ &+\frac{A}{4\pi}\left\{\left|\begin{array}{ccc}\alpha & \mathfrak{X} & \mathfrak{L}\\ \beta & \mathfrak{Y} & \mathfrak{M}\\ \gamma & \mathfrak{Z} & \mathfrak{N}\end{array}\right|(f_1 + g_2 + h_3) + \mathfrak{d}_{xyz}\left|\begin{array}{ccc}\alpha_0 & \mathfrak{X} & \mathfrak{L}\\ \beta_0 & \mathfrak{Y} & \mathfrak{M}\\ \gamma_0 & \mathfrak{Z} & \mathfrak{N}\end{array}\right|\right\},\end{aligned}$$

wo unter α_0, β_0, γ_0 jene auxiliaren Functionen zu verstehen sind, von denen auf Seite 392 die Rede war. In dieser letzten Formel (ϑ.) verschwindet die *zweite Zeile;* wie sich solches ergiebt unter Anwendung der Gleichungen (C.), (D.), (J.) Seite 391, 392. Ebenso verschwindet daselbst auch die *dritte Zeile;* wie sich solches ergiebt mittelst der drei unter einander conformen Gleichungen (A.), (B.), (J.) Seite 391, 392.

Da nun in (ϑ.) die beiden letzten Zeilen verschwinden, so sind offenbar die beiden Ausdrücke (ϑ.) und (η.) von entgegengesetzten Werthen. Somit folgt also:

$$(\iota.)\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_j + \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_k = 0.$$

Demgemäss ergiebt sich aus (ζ.):

$$(\varkappa.)\qquad \mathfrak{d}_{xyz}\Psi_q = 0. \quad \text{— } Q.\ e.\ d.$$

Nun lautet die erste der Gleichungen (12.) Seite 384 folgendermassen:

$$(33.)\qquad \Xi\,\mathfrak{d}x = -\,\mathfrak{d}_x\Psi,$$

wofür man mit Rücksicht auf (21.) und (32.) auch schreiben kann:

$$(34.)\qquad \Xi\,\mathfrak{d}x = -\,\mathfrak{d}_x\Psi_e - \mathfrak{d}_x\Psi_m.$$

Substituirt man endlich hier auf der rechten Seite die in (30.), (31.) erhaltenen Werthe, so sieht man, dass die gesuchte Kraft Ξ aus zwei Theilen bestehen wird:

$$(35.)\qquad \Xi = \Xi_e + \Xi_m,$$

von denen der eine nur von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ abhängt, also *elektrischen Ursprungs* ist, während der andre nur von $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ abhängt, mithin *magnetischen Ursprungs* ist. Demgemäss gelangt man schliesslich, auf Grund der Formeln (34.), (35.) und (30.), (31.) zu folgendem Resultat:

Satz. — *Die ponderomotorischen Kräfte, welche die den Weltraum erfüllende, im Allgemeinen in beliebiger Bewegung begriffene Substanz auf ihre einzelnen substantiellen Elemente ausübt, sind theils elektrischen, theils magnetischen Ursprungs. Denkt man sich nämlich irgend ein festes Raumelement $D\tau(x, y, z)$ construirt, so wird von der den ganzen Weltraum erfüllenden Substanz auf das augenblicklich innerhalb $D\tau$ befindliche Substanzelement eine ponderomotorische Kraft $\Xi D\tau$, $\mathrm{H} D\tau$, $\mathrm{Z} D\tau$ ausgeübt werden, welche in zwei Theile zerlegbar ist, die respective elektrischen und magnetischen Ursprungs sind:*

$$(36.)\qquad \begin{cases} \Xi D\tau = \Xi_e D\tau + \Xi_m D\tau, \\ \mathrm{H} D\tau = \mathrm{H}_e D\tau + \mathrm{H}_m D\tau, \\ \mathrm{Z} D\tau = \mathrm{Z}_e D\tau + \mathrm{Z}_m D\tau. \end{cases}$$

Und zwar gelten z. B. für Ξ_e und Ξ_m die Formeln:

$$(37.)\qquad \Xi_e D\tau = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)\right] D\tau,$$

$$(38.)\qquad \Xi_m D\tau = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right)\right] D\tau.$$

Analoge Formeln gelten für H_e, Z_e und H_m, Z_m.

Bei der hier entwickelten Helmholtz'schen Theorie sind Fernwirkungen von Hause aus völlig ausgeschlossen. Und dem entspricht auch der Charakter der Formeln (37.), (38.). *Denn diese Formeln zeigen, dass die auf ein Substanzelement ausgeübten ponderomotorischen Kräfte nur vom augenblicklichen Zustande* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *dieses Elementes abhängen.* Uebrigens sind diese Formeln (37.), (38.) identisch mit den schon früher aus den Hertz'schen Vorstellungen abgeleiteten Formeln Seite 345 (27.), (29.).

Um die Hauptsache zu betonen: Wir haben im gegenwärtigen Paragraph aus dem Helmholtz'schen Minimalprincip gewisse Formeln (36.), (37.), (38.) für die *inneren ponderomotorischen Kräfte,* und zugleich auch gewisse Differentialgleichungen (15.), (17.), (18.) Seite 387—389 für die *innern elektrischen und magnetischen Vorgänge* abgeleitet.

§ 4.

Zusammenstellung und Transfiguration der aus dem Helmholtz'schen Minimalprincip abgeleiteten Gleichungen*).

Hülfssatz. — *Für alle Punkte* (x, y, z) *des ganzen unendlichen Raumes seien drei Functionen gegeben:*

$$\text{(I.)} \qquad f = f(x, y, z), \qquad g = g(x, y, z), \qquad h = h(x, y, z).$$

Ferner seien für irgend einen Punkt (x_1, y_1, z_1) *die vier Integrale gebildet:*

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} S_1 = \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{D\tau}{r}, \\ F_1 = \int \left(\frac{dh}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \frac{D\tau}{r}, \\ G_1 = \int \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{D\tau}{r}, \\ H_1 = \int \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{D\tau}{r}, \end{cases}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ *des ganzen unendlichen Raumes; dabei soll* r *den Abstand eines solchen Elementes* $D\tau$ *vom Punkte* (x_1, y_1, z_1) *vorstellen.*

Alsdann werden im Allgemeinen die Werthe f_1, g_1, h_1, *welche jene Functionen im Punkte* (x_1, y_1, z_1) *besitzen, folgendermassen darstellbar sein:*

---

*) Absichtlich spreche ich hier von einer „Transfiguration" der Gleichungen; weil ich das Wort „Transformation" mir reserviren will für die Uebertragung der Gleichungen auf ein anderes Coordinatensystem.

$$(\text{III.})\quad\begin{cases} 4\pi f_1 = -\dfrac{\partial S_1}{\partial x_1} + \left(\dfrac{\partial H_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1}\right), \\ 4\pi g_1 = -\dfrac{\partial S_1}{\partial y_1} + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} - \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\right), \\ 4\pi h_1 = -\dfrac{\partial S_1}{\partial z_1} + \left(\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\right). \end{cases}$$

Beweis. — Dieser Satz ist nur ein specieller Fall eines von mir vor einigen Jahren aufgestellten viel allgemeineren Satzes. Den Beweis dieses allgemeinen Satzes findet man in meinen „Beiträgen zu einzelnen Capiteln der Math. Physik“, Leipzig bei Teubner, 1893, Seite 234. Statt f, g, h sind dort die Buchstaben u, v, w gebraucht.

Transfiguration der in (15.) **Seite 387 erhaltenen drei Differentialgleichungen:**

$$(\mathsf{A}.)\quad\begin{cases} A\left(4\pi u + \dfrac{\Delta \mathfrak{X}}{dt}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}, \\ A\left(4\pi v + \dfrac{\Delta \mathfrak{Y}}{dt}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}, \\ A\left(4\pi w + \dfrac{\Delta \mathfrak{Z}}{dt}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}. \end{cases}$$

Bringt man den Hülfssatz (I.), (II.), (III.) in Anwendung auf die drei Functionen:

$$f = \frac{\mathfrak{L}}{4\pi\mu}, \qquad g = \frac{\mathfrak{M}}{4\pi\mu}, \qquad h = \frac{\mathfrak{N}}{4\pi\mu},$$

so erhält man sofort:

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = &-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{4\pi\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{4\pi\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{4\pi\mu}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{4\pi\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{4\pi\mu}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &- \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{4\pi\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{4\pi\mu}\right)\frac{D\tau}{r}. \end{aligned}$$

Die eingeklammerten Binome der beiden letzten Zeilen sind, bis auf den Divisor 4π, identisch mit denjenigen Binomen, die in den beiden letzten der Gleichungen (A.) auftreten. Substituirt man nun für diese Binome die aus jenen Gleichungen (A.) entspringenden Werthe, so erhält man sofort:

$$(\alpha.)\quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = &-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &+ \frac{A}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(4\pi w + \frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}\right)\frac{D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(4\pi v + \frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt}\right)\frac{D\tau}{r}\right\}. \end{aligned}$$

Neben dieser Formel (α.) werden sich offenbar noch zwei analoge Formeln für $\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mu_1}$ und $\dfrac{\mathfrak{N}_1}{\mu_1}$ ergeben. Und diese drei Formeln, welche

aus den drei Differentialgleichungen (A.), mittelst des Hülfssatzes (I.), (II.), (III.) entstehen, werden als eine *Art Umkehrung* oder (besser) als eine *Transfiguration jener Differentialgleichungen* (A.) zu bezeichnen sein.

Specialisirung. Befindet sich die den Weltraum erfüllende Substanz (mit Bezug auf das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem) in *völliger Ruhe*, so ist [nach (β.) Seite 359]: $\frac{\Delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$; so dass also in diesem Fall die Formel (α.) übergeht in:

$$(\alpha_1.)\quad \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r}$$
$$+ \frac{A}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(4\pi w + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right)\frac{D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(4\pi v + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right)\frac{D\tau}{r}\right\}.$$

Weitere Specialisirung. Befindet sich die Substanz in *völliger Ruhe*, und ist überdies ihr elektrischer Zustand ein *stationärer*, so werden $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der Zeit nach unveränderlich sein; so dass also alsdann die Formel (α_1.) übergeht in:

$$(\alpha_2.)\quad \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r}$$
$$+ A\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{w\,D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{v\,D\tau}{r}\right\}.$$

Noch weitere Specialisirung. — Befindet sich die Substanz in *völliger Ruhe*, und ist überdies ihr elektrischer Zustand nicht nur stationär, sondern auch ein *Gleichgewichtszustand*, so werden die elektrischen Strömungen u, v, w allenthalben $= 0$ sein; so dass also alsdann die Formel (α_2.) übergeht in:

$$(\alpha_3.)\quad \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r}.$$

NB. In sämmtlichen Formeln (α.), (α_1.), α_2.), (α_3.) sind [ebenso wie im Hülfssatze, nämlich in (II.)] die Integrationen hinerstreckt zu denken über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes.

Von besonderer Wichtigkeit sind nun ferner die Differentialgleichungen (17.) Seite 389:

$$(\mathrm{B.})\quad \begin{cases} A\,\frac{\Delta \mathfrak{U}}{dt} = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \\ A\,\frac{\Delta \mathfrak{B}}{dt} = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \\ A\,\frac{\Delta \mathfrak{W}}{dt} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Doch wollen wir diese Gleichungen einstweilen überspringen, und sofort uns hinwenden zur

Transfiguration der in (18.) Seite 389 erhaltenen drei Differentialgleichungen:

$$(\Gamma.)\quad\begin{cases} A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{L}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}, \\ A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{M}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \\ A\,\dfrac{\Delta\mathfrak{N}}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}. \text{—} \end{cases}$$

Bringt man den Hülfssatz (I.), (II.), (III.) Seite 397 auf die Functionen

$$f = \frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon},\qquad g = \frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon},\qquad h = \frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}$$

in Anwendung, so erhält man sofort:

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = &- \frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Y}}{4\pi\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &- \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{X}}{4\pi\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{Z}}{4\pi\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r}.\end{aligned}$$

Substituirt man hier in den beiden letzten Zeilen für die eingeklammerten Binome ihre aus (Γ.) sich ergebenden Werthe, so erhält man:

$$(\gamma.)\quad\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = &- \frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &- \frac{A}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{D\tau}{r}\right\}.\end{aligned}$$

Analoge Formeln ergeben sich in analoger Weise für $\frac{\mathfrak{Y}_1}{\varepsilon_1}$ und $\frac{\mathfrak{Z}_1}{\varepsilon_1}$. Und diese drei Formeln werden als eine *Transfiguration der drei Differentialgleichungen* (Γ.) zu bezeichnen sein.

Specialisirung. Befindet sich die betrachtete Substanz (in Bezug auf das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem) in *völliger Ruhe*, so ist [nach Seite 359 (β.)]: $\frac{\Delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$; so dass also in diesem Fall die vorstehende Formel (γ.) übergeht in:

$$(\gamma_1.)\quad\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = &- \frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r} \\ &- \frac{A}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}\frac{D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}\frac{D\tau}{r}\right\}.\end{aligned}$$

Weitere Specialisirung. Befindet sich die Substanz in *völliger Ruhe*, und ist überdies ihr magnetischer Zustand ein *stationärer*, so

werden $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bei fortschreitender Zeit ungeändert bleiben; so dass also alsdann die Formel (γ_1.) übergeht in:

$$(\gamma_2.) \qquad \frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r}.$$

NB. In den Formeln (γ.), (γ_1.), (γ_2.) sind die Integrationen [ebenso wie im Hülfssatz Seite 397] ausgedehnt zu denken über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes.

§ 5.

Ist das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem als ein ganz beliebiges, oder aber als ein absolut ruhendes zu denken?

Die für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gefundenen *sechs Differentialgleichungen* (A.) Seite 398 und (Γ.) Seite 400 werden hinreichend angedeutet sein durch die beiden Formeln:

$$(\mathrm{A}_0.) \qquad 4\pi u + \frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt} - \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) = 0,$$

$$(\Gamma_0.) \qquad \frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) = 0.$$

Substituirt man hier für $\Delta\mathfrak{X}$ seinen eigentlichen Werth [Seite 370 (13.)], und für $\Delta\mathfrak{L}$ den analogen Werth [vgl. den Satz Seite 378], so erhält man:

$$(\mathrm{A}.) \qquad \left\{\begin{aligned} &4\pi u + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z})}{\partial z} \\ &\quad + \alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right) - \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$(\Gamma.) \qquad \left\{\begin{aligned} &+ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M})}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{N})}{\partial z} \\ &+ \alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right) + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)\end{aligned}\right\} = 0.$$

Diese beiden Formeln (A.), (Γ.) mögen nun kurzweg angedeutet sein durch:

$$(\mathrm{A}.) \qquad \mathfrak{F}_{xyz} = 0,$$

$$(\Gamma.) \qquad \mathfrak{f}_{xyz} = 0;$$

so dass also $\mathfrak{F}_{xyz}$ und $\mathfrak{f}_{xyz}$ als augenblickliche Abbreviaturen dienen sollen für die linken Seiten der beiden Formeln.

Ausser dem positiven rechtwinkligen Axensystem [x, y, z], auf welches die Formeln (A.), (Γ.) sich beziehen, mag nun jetzt noch ein zweites solches Axensystem [1, 2, 3] gedacht werden. Und zwar sei angenommen, dass beide Systeme gegen einander in beliebiger Bewegung

begriffen sind. Transformirt man nun die Gleichungen (A.), (Γ.) auf dieses neue Axensystem [1, 2, 3], indem man dabei die demselben entsprechenden Coordinaten, Geschwindigkeiten und Zustandscomponenten mit x_1, x_2, x_3, α_1, α_2, α_3 und $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ bezeichnet, so erhält man nach längerer Rechnung:

$$(\mathrm{A}'.) \qquad \mathfrak{F}_{123} + \mathfrak{X}_2 \frac{d\mathfrak{a}_3}{dt} - \mathfrak{X}_3 \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt} = 0,$$

$$(\Gamma'.) \qquad \mathfrak{f}_{123} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\mathfrak{a}_3}{dt} - \mathfrak{L}_3 \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt} = 0,$$

wo $\mathfrak{F}_{123}$, $\mathfrak{f}_{123}$ mit Bezug auf die neuen Axen 1, 2, 3 von *genau derselben Form* sind, wie $\mathfrak{F}_{xyz}$, $\mathfrak{f}_{xyz}$ für die alten Axen x, y, z; während $d\mathfrak{a}_2$ und $d\mathfrak{a}_3$ gewisse der Zeit dt entsprechende kleine Drehungswinkel vorstellen.

Um auf diese Winkel näher einzugehen, und überhaupt die Dinge besser zu übersehen, wollen wir jetzt sämmtliche *sechs Differentialgleichungen* ins Auge fassen. Bezeichnet man diese sechs Differentialgleichungen, bezogen auf das Axensystem [x, y, z], den Angaben (A.), (Γ.) entsprechend, mit:

$$(\mathrm{A},\ \Gamma.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_{xyz} = 0, \\ \mathfrak{G}_{xyz} = 0, \\ \mathfrak{H}_{xyz} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_{xyz} = 0, \\ \mathfrak{g}_{xyz} = 0, \\ \mathfrak{h}_{xyz} = 0, \end{cases}$$

so werden dieselben, bezogen auf das neue Axensystem [1, 2, 3], den Angaben (A'.), (Γ'.) entsprechend, folgendermassen lauten:

$$(\mathrm{A}',\ \Gamma'.) \quad \begin{cases} \mathfrak{F}_{123} + \mathfrak{X}_2 \frac{d\mathfrak{a}_3}{dt} - \mathfrak{X}_3 \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt} = 0, \\ \mathfrak{G}_{123} + \mathfrak{X}_3 \frac{d\mathfrak{a}_1}{dt} - \mathfrak{X}_1 \frac{d\mathfrak{a}_3}{dt} = 0, \\ \mathfrak{H}_{123} + \mathfrak{X}_1 \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt} - \mathfrak{X}_2 \frac{d\mathfrak{a}_1}{dt} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_{123} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\mathfrak{a}_3}{dt} - \mathfrak{L}_3 \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt} = 0, \\ \mathfrak{g}_{123} + \mathfrak{L}_3 \frac{d\mathfrak{a}_1}{dt} - \mathfrak{L}_1 \frac{d\mathfrak{a}_3}{dt} = 0, \\ \mathfrak{h}_{123} + \mathfrak{L}_1 \frac{d\mathfrak{a}_2}{dt} - \mathfrak{L}_2 \frac{d\mathfrak{a}_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Und zwar bezeichnet hier $d\mathfrak{a}_1$ denjenigen Winkel, um welchen das starre System [x, y, z] während der Zeit dt um die Axe 1 im Sinne 23 sich dreht. Analoge Bedeutungen haben $d\mathfrak{a}_2$ und $d\mathfrak{a}_3$ in Bezug auf die Axen 2 und 3.

Man sieht, dass die Gleichungen (A', Γ'.) von wesentlich andrer Form sind als die ursprünglichen Gleichungen (A, Γ.). *Wenn also die in Rede stehenden Hertz-Helmholtz'schen sechs Differentialgleichungen, wie wir weiterhin voraussetzen wollen, in der Form* (A, Γ.) *für ein absolut ruhendes Axensystem* [x, y, z] *wirklich richtig sind, so werden sie eo ipso in dieser selben Form für ein in Bewegung begriffenes Axen-*

system [1, 2, 3] *nicht mehr gültig sein. Vielmehr werden sie alsdann für dieses letztere System eine wesentlich andre Form besitzen, die in* (A′, Γ′.) *näher angegeben ist.*

Wollen wir also, was in der That im Folgenden geschehen soll, an der Hertz-Helmholtz'schen Form (A, Γ.) der in Rede stehenden sechs Differentialgleichungen festhalten, so sind wir gezwungen, das der Betrachtung zu Grunde gelegte Axensystem $[x, y, z]$ als ein *absolut ruhendes* uns zu denken.

Uebrigens haben wir im letzten Paragraph, ausser den Formeln (A.), (Γ.), und zwar *zwischen* diesen beiden Formelsystemen, noch ein drittes Formelsystem notirt, welches mit (B.) bezeichnet worden ist. Dasselbe lautet [vgl. Seite 399] folgendermassen:

$$(\mathsf{B}_0.)\qquad \frac{\Delta\mathfrak{U}}{dt} = \frac{1}{A}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\Delta\mathfrak{V}}{dt} = \frac{1}{A}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\Delta\mathfrak{W}}{dt} = \frac{1}{A}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right).$$

Die erste dieser Formeln nimmt, falls man für $\Delta\mathfrak{U}$ seinen eigentlichen Werth [Seite 376 (13.)] substituirt, die Gestalt an:

$$(\mathsf{B}.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + \beta\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right) + \gamma\left(\dfrac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right) \\ + \dfrac{\partial(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W})}{\partial x} - \dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Bezeichnet man diese Gleichung zur augenblicklichen Abkürzung mit

$$(\mathsf{B}.)\qquad \Phi_{xyz} = 0,$$

so wird dieselbe, wie man leicht aus dem Vorigen erkennt, bei ihrer Transformation auf jenes neue Axensystem [1, 2, 3] folgende Gestalt annehmen:

$$(\mathsf{B}'.)\qquad \Phi_{123} + \mathfrak{U}_2\frac{da_3}{dt} - \mathfrak{U}_3\frac{da_2}{dt} = 0.$$

U. s. w.

§ 6.

Uebergang zu den Gleichungen von Hertz und Boltzmann.

Die den Weltraum erfüllende Substanz, und ebenso auch das Axensystem $[x, y, z]$ mögen in absoluter Ruhe gedacht werden; so dass also die Geschwindigkeiten α, β, γ allenthalben $= 0$ sind. Alsdann reduciren sich die Formeln (A.), (Γ.) Seite 401 auf

$$(\mathsf{A}.)\qquad 4\pi u + \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right),$$

$$(\Gamma.)\qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right).$$

Nun finden aber [nach (5.) Seite 373] in jedwedem Punkt (x, y, z) die Gleichungen statt:

$$u = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon} + \lambda X', \quad v = \frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \lambda Y' \quad w = \frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon} + \lambda Z';$$

so dass man also die Formeln (A.), (Γ.) auch so schreiben kann:

$$(\text{A.}) \qquad \frac{4\pi\lambda\mathfrak{X}}{\varepsilon} + 4\pi\lambda X' + \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right),$$

$$(\Gamma.) \qquad \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right).$$

Führt man nun hier, an Stelle von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ etwas andre Bezeichnungen ein, indem man setzt:

$$\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} = X, \quad \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = Y, \quad \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = Z \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{L}}{\mu} = L, \quad \frac{\mathfrak{M}}{\mu} = M, \quad \frac{\mathfrak{N}}{\mu} = N,$$

und beachtet man zugleich, dass die den Weltraum erfüllende Substanz und das Axensystem $[x, y, z]$ in absoluter Ruhe gedacht werden, dass mithin ε und μ von der Zeit t unabhängig sind, so erhält man sofort:

$$(\text{A}^*.) \qquad 4\pi\lambda(X + X') + \varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right),$$

$$(\Gamma^*.) \qquad \mu\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right).$$

Setzt man jetzt schliesslich $X' = -X'$, $Y' = -Y'$, $Z' = -Z'$ [vgl. d. Note Seite 372], so sind diese Formeln (A*.), (Γ*.) mit den betreffenden Hertz'schen Formeln [Hertz' Ges. W., Bd. 2, Seite 219] in voller Uebereinstimmung, bis auf die Vorzeichen.

Es verwandeln sich nämlich die Formeln (A*.), (Γ*.) in jene *Hertz-schen Formeln*, sobald man A durch $-A$ ersetzt. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, dass Hertz seinen Untersuchungen ein *negatives* Axensystem zu Grunde gelegt hat, während wir uns stets des *positiven* Axensystems bedienen [vgl. Seite 2].

Vergleicht man andrerseits die Formeln (A*.), (Γ*.) mit den betreffenden *Boltzmann'schen Formeln* [Boltzmann's Vorl. üb. d. Maxwell'sche Theorie, Leipzig, 1893, Theil 2, Seite 17 (C.) und Seite 18 (D.)], so bemerkt man genau dasselbe. In der That verwandeln sich die Formeln (A*.), (Γ*.) in jene Boltzmann'schen Formeln wiederum dadurch, dass man A durch $-A$ ersetzt. Dieser Umstand scheint dafür zu sprechen, dass Boltzmann, ebenso wie Hertz, seinen Betrachtungen ein *negatives* Axensystem zu Grunde gelegt hat, — was allerdings in Widerspruch stehen würde mit dem Resultat der früher [auf Seite 3] von uns angestellten Erörterungen.

§ 7.

Ueber die wahre elektrische Dichtigkeit.

Die den Weltraum erfüllende Substanz, und ebenso auch das Axensystem $[x, y, z]$ mögen in *absoluter Ruhe* gedacht werden; so dass also die substantiellen Geschwindigkeiten α, β, γ allenthalben $= 0$ sind. Alsdann reduciren sich die Formeln (A.) Seite 401 auf:

$$(1.)\qquad \begin{aligned} 4\pi u + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) &= 0,\\ 4\pi v + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) &= 0,\\ 4\pi w + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Differenzirt man diese Formeln nach x, y, z, und addirt, so ergiebt sich sofort:

$$(2.)\qquad 4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = 0.$$

Das letzte Trinom ist aber nach unserer Bezeichnungsweise $= 4\pi\sigma$ [vgl. Seite 371 (14.)]. Somit folgt:

$$(3.)\qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Integrirt man jetzt diese Gleichung (3.) über alle Volumelemente $D\tau$ eines ganz beliebig construirten Raumes $\mathfrak{R}$, so erhält man:

$$(4.)\qquad \int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} D\tau = -\int_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D\tau,$$

eine Formel, deren linke Seite offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathfrak{R}} \sigma D\tau\right).$$

Demgemäss ergiebt sich aus (4.) mittelst einer bekannten Umformungsmethode:

$$(5.)\qquad d\left(\int_{\mathfrak{R}} \sigma D\tau\right) = (dt)\cdot\int_{\mathfrak{R}} [u\cos(n, x) + v\cos(n, y) + w\cos(n, z)]\,Do,$$

die Integration rechter Hand ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{R}$; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete innere Normale.

Liegen nun alle Do in *isolirender* Substanz, so sind die u, v, w in allen Do gleich *Null* *); so dass also alsdann die Formel (5.) übergeht in:

---

*) Denn für *isolirende* Substanz ist die Leitungsfähigkeit $\lambda = 0$; woraus nach den allgemeinen Formeln Seite 373 (5.) folgt, dass für eine solche Substanz auch $u = v = w = 0$ ist.

(6a.) $$d\Big(\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\tau\Big) = 0;$$

und es wird also in diesem Falle der Werth des in den Klammern befindlichen Integrals bei fortschreitender Zeit fortdauernd *ein und derselbe* bleiben.

Liegen ferner, um zu einem etwas andern Falle überzugehen, alle Elemente Do, *mit Ausnahme eines einzigen*, in isolirender Substanz, so geht die Formel (5.) über in:

(6b.) $$d\Big(\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\tau\Big) = (dt)\cdot[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\, Do,$$

wo unter Do jenes *eine*, nicht in isolirender Substanz gelegene Element zu verstehen ist. Demgemäss wird also in diesem Fall der Werth des in Rede stehenden Integrals während der Zeit dt um genau ebensoviel anwachsen, als die während der Zeit dt durch jenes Element Do hindurchgehende Elektricitätsmenge beträgt.

Auf Grund der beiden Eigenschaften (6a, b.) *wird man offenbar berechtigt sein, die Grösse* σ *als die Dichtigkeit der elektrischen Materie anzusehen. Und es wird also z. B. das in jenen Eigenschaften* (6a, b.) *auftretende Integral*

(7.) $$\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\tau$$

zu bezeichnen sein als die augenblicklich im Raume $\mathfrak{R}$ *enthaltene Elektricitätsmenge. Dabei sei sogleich bemerkt, dass diese Grösse* σ, *deren ursprüngliche Definition durch die Formel* (14.) *Seite 371 gegeben ist, von Hertz und Helmholtz die Dichtigkeit der „wahren" Elektricität genannt wird.*

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass keine der Theorie *fremden* elektromotorischen Kräfte einwirken, dass also die X', Y', Z' allenthalben $= 0$ seien. Alsdann reduciren sich die allgemeinen Formeln Seite 373 (5.) auf:

(8.) $$u = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon}, \quad v = \frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \quad w = \frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Substituirt man diese Werthe (8.) in (3.), so erhält man:

(9.) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon}\Big).$$

Liegt nun die betrachtete Stelle in *homogener* Substanz, haben also λ und ε innerhalb einer um diese Stelle beschriebenen kleinen Kugel allenthalben ein und dieselben Werthe, so folgt aus (9.) sofort:

(10.) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\lambda}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\Big),$$

also mit Rücksicht auf Seite 371 (14.):

(11.) $$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\sigma,$$

und hieraus durch Integration:

(12.) $$\sigma = \sigma^0 e^{-\frac{4\pi\lambda t}{\varepsilon}},$$

wo σ^0 den Werth von σ zur Zeit $t = 0$ vorstellt. Nun sind λ und ε ihrer Natur nach *positiv*. Zufolge der Formel (12.) wird daher die elektrische Dichtigkeit σ mit der Zeit *zu Null herabsinken*, und um so schneller zu Null herabsinken, je grösser die Leitungsfähigkeit λ ist.

Eine Ausnahme macht der Fall: $\lambda = 0$, d. i. der Fall einer *isolirenden* homogenen Substanz. Denn alsdann ergiebt sich aus (12.):

(12j.) $$\sigma = \sigma^0;$$

so dass also in diesem Falle die elektrische Dichtigkeit σ an der betrachteten Stelle fortdauernd ein und denselben Werth behalten wird. — Somit ergiebt sich folgender Satz:

Satz. — *In homogener leitender Substanz wird die elektrische Dichtigkeit σ mit wachsender Zeit stets gegen 0 convergiren, also nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes stets = 0 sein, falls man nur voraussetzt, dass an der betrachteten Stelle keine der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte vorhanden sind.*

Hingegen wird, falls man an dieser Voraussetzung festhält, die elektrische Dichtigkeit σ in homogener isolirender Substanz einen völlig unveränderlichen Werth haben. Dieser unveränderliche Werth soll im Folgenden stets = 0 gedacht werden.

Ueber das Verhalten der elektrischen Dichtigkeit σ in anhomogener Substanz ist einstweilen Nichts zu sagen. Denn liegt die betrachtete Stelle in anhomogener Substanz, so wird der Uebergang von (9.) zu (10.) im Allgemeinen nicht mehr erlaubt sein, wodurch alsdann die weiteren Schlussfolgerungen fortfallen.

§ 8.

Ueber die elektrischen Zustandscurven (Kraftlinien).

Ebenso wie die elektrischen Strömungs- oder Stromcurven durch die Differentialgleichungen

$$Dx : Dy : Dz = u : v : w$$

dargestellt sind [vgl. Seite 235 (12.)], in genau derselben Weise kann man auch von den *elektrischen Zustandscurven* sprechen, indem man darunter diejenigen Curven versteht, welche den Differentialgleichungen

$$Dx : Dy : Dz = \mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{Z} \tag{13.}$$

entsprechen. Auch sind jene früher über die Strömungscurven angestellten Betrachtungen [Seite 235—237] auf diese Zustandscurven leicht übertragbar.

Denkt man sich z. B. einen sehr dünnen *Zustandsfaden*, d. i. einen Faden, der aus lauter Zustandscurven besteht, und construirt man irgend zwei senkrechte Querschnitte $D\pi'$ und $D\pi''$ dieses Fadens, so wird folgende Formel gelten [vgl. Seite 237 (18.)]:

$$\int \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) D\tau = -\,\mathfrak{R}' D\pi' + \mathfrak{R}'' D\pi'', \tag{14.}$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des zwischen $D\pi'$ und $D\pi''$ liegenden *Fadensegmentes*. Hier bezeichnen alsdann $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ die Werthe der *Zustandsstärke:*

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} \tag{15.}$$

in $D\pi'$ und in $D\pi''$. Die Formel (14.) ist mit Rücksicht auf Seite 371 (14.) auch so darstellbar:

$$4\pi \int \sigma\, D\tau = -\,\mathfrak{R}' D\pi' + \mathfrak{R}'' D\pi''. \tag{16.}$$

Ist mithin die elektrische Dichtigkeit σ innerhalb jenes Fadensegmentes allenthalben $= 0$, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{R}' D\pi' = \mathfrak{R}'' D\pi''. \tag{17.}$$

Das Product $\mathfrak{R}\, D\pi$ wird daher, falls man längs des Fadens fortgeht, allenthalben ein und denselben Werth behalten, so lange man bei einem solchen Fortgange innerhalb eines Raumes bleibt, der von elektrischer Materie völlig *entblösst* ist. Folglich wird die Zustandsstärke $\mathfrak{R}$, so lange man innerhalb eines derartigen Raumes bleibt, niemals $= 0$ werden können.

Mit andern Worten: Der betrachtete Faden wird, so lange man innerhalb eines von elektrischer Materie *freien* Raumes bleibt, niemals endigen können. Besitzt also der Faden überhaupt ein Ende, so wird dieses Ende immer nur in einem Raume liegen können, der von elektrischer Materie *erfüllt* ist. Denkt man sich schliesslich den Faden *unendlich dünn*, so wird derselbe nichts Andres sein, als eine Zustandscurve; so dass man also sagen kann:

Satz. — *Eine elektrische Zustandscurve kann, falls sie überhaupt ein Ende besitzt, immer nur in elektrischer Materie endigen.*

Dies ist ein schon von Hertz [Ges. W., Bd. 2, Seite 228] ausgesprochner Satz, nur mit dem Unterschiede, dass Hertz nicht von Zustandscurven, sondern von Kraftcurven (oder Kraftlinien) spricht.



Indessen dürfte die von mir gewählte Ausdrucksweise der eigentlichen Sachlage wohl etwas besser angepasst sein.

Uebrigens hat Hertz (was wohl nicht immer hinreichend beachtet ist) solchen Zustandslinien respective Kraftlinien keine sonderliche Bedeutung beigelegt. Vielmehr betrachtet er die Kraftlinien nur als ein *Symbol* für gewisse Zustände; auch fügt er hinzu, es habe keinen Sinn, von einer selbstständigen Bewegung solcher Zustandslinien zu sprechen. [Vgl. Hertz' Ges. W., Bd. 2, Seite 271, sowie auch Seite 258].

§ 9.

Ueber gewisse Unklarheiten bei Helmholtz.

σ wird, wie schon erwähnt wurde [Seite 406 (7.)], von Hertz und Helmholtz die Dichtigkeit der *wahren* Elektricität genannt. Dass solche wahre Elektricität innerhalb eines Conductors wirklich auftreten könne, unterliegt, angesichts der Formel (12.), keinem Zweifel. Auch werden die Betrachtungen des folgenden Abschnitts zeigen, dass an der Oberfläche eines Conductors eine *dauernde Anhäufung* wahrer Elektricität eintreten kann. Es erscheint somit unverständlich, wenn Helmholtz in seinen Vorlesungen die Möglichkeit einer Anhäufung „*wahrer*" Elektricität schlechtweg in Abrede stellt. [Helmholtz' Vorlesungen, Bd. 5, Verlag von Voss, 1897, Seite 97, sechste Zeile].

Wie bei vielen Differenzen, dürfte es sich wohl auch hier nur um Wortdifferenzen handeln. Die Sachlage ist nämlich folgende:

Helmholtz spricht [a. a. O., Seite 96] von der *elektrischen Gesammtströmung*, indem er die Componenten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ derselben durch folgende Formeln definirt [vgl. auch Helmholtz' Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 501]:

$$(19.)\qquad \mathfrak{u} = u + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \quad \mathfrak{v} = v + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \quad \mathfrak{w} = w + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}.$$

Unter Anwendung dieser $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ erhalten alsdann die Gleichungen (1.) die Gestalt:

$$(20.)\qquad \begin{aligned} 4\pi\mathfrak{u} &= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right), \\ 4\pi\mathfrak{v} &= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right), \\ 4\pi\mathfrak{w} &= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right); \end{aligned}$$

woraus sofort sich ergiebt:

$$(21.)\qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0.$$

Man könnte sich ja nun, neben der wahren Elektricität, noch eine *neue* elektrische Materie denken, welche die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ zu Strömungscomponenten hat. Die Dichtigkeit $\mathfrak{s}$ dieser neuen Materie würde alsdann, wie aus (21.) folgt, völlig unveränderlich, etwa allenthalben und fortdauernd $= 0$ sein; so dass also in dieser neuen Materie in der That niemals irgend welche Anhäufungen entstehen könnten. Diese neue $\mathfrak{s}$-Materie würde alsdann aber doch von der σ-Materie, d. i. von der sogenannten wahren Elektricität *wesentlich verschieden* sein.

Es mag mir gestattet sein, noch Folgendes zu bemerken: Dass σ als die Dichtigkeit einer gewissen Materie, und u, v, w als die Strömungscomponenten derselben angesehen werden können, hat sich im Vorhergehenden ergeben auf Grund der Formel (5.):

$$(22.)\qquad d\left(\int_{\mathfrak{R}}\sigma\,D\tau\right) = (dt)\cdot\int_{\mathfrak{R}}[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,Do.$$

Diese Formel aber wird, falls man in ihr für u, v, w die aus (19.) entspringenden Werthe einsetzt, die Gestalt erhalten:

$$(23.)\qquad d\left(\int_{\mathfrak{R}}\sigma\,D\tau\right) = dt\cdot\int_{\mathfrak{R}}\left[\left(\mathfrak{u} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right)\cos(n,x) + \cdots\right]Do.$$

Wenn wir also, auf Grund der Formel (22.), zu der Einsicht gelangt sind, dass u, v, w als die Strömungscomponenten der σ-Materie, d. i. der wahren Elektricität anzusehen sind, so wird sich auf Grund der Formel (23.) ergeben, dass die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *nimmermehr* als die Strömungscomponenten dieser σ-Materie aufgefasst werden dürfen.

Mit diesen Betrachtungen hängt die Frage zusammen, *ob ungeschlossene elektrische Ströme existiren können.* Von dem soeben gewonnenen Standpunkte aus, würde das, was Helmholtz in seinen Vorlesungen [a. a. O. Seite 97] über diese Frage geäussert hat, folgende Gestalt gewinnen:

Aus (21.) *folgt, dass die $\mathfrak{s}$-Materie nach Art einer incompressiblen Flüssigkeit sich bewegt, dass also in dieser $\mathfrak{s}$-Materie ungeschlossene Ströme undenkbar sind. Das gilt jedoch nur von der $\mathfrak{s}$-Materie, nicht von der σ-Materie. Diese letztere aber ist es, welche als wahre Elektricität bezeichnet wird.*

Jedenfalls haben wir es hier mit Dingen zu thun, die einer weiteren Aufklärung bedürfen. Eine solche Aufklärung etwa geben zu wollen auf Grund jener molecularen Vorgänge, die man als *elektrische Polarisationen* bezeichnet, dürfte keinen rechten Sinn haben, weil unsere Vorstellungen über jene elektrischen Polarisationen [vgl. Seite 327—332] einstweilen wohl noch sehr im Argen liegen.



Siebzehnter Abschnitt.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip (1892—1894).
Zweiter Theil: Anwendung der betreffenden Theorie auf ruhende Körper.

Die im vorigen Abschnitt auseinandergesetzte Helmholtz'sche Theorie soll gegenwärtig in Anwendung gebracht werden auf *ruhende Körper*, und zwar insbesondere auf Probleme der Optik, der Elektrostatik und der magnetischen Vertheilung. Dabei wird sich eine befriedigende Uebereinstimmung mit den Formeln der Poisson'schen Theorie in der Elektrostatik herausstellen, *nicht* aber bei den Problemen der magnetischen Vertheilung.

§ 1.

Zur Theorie des Lichtes.

Der ganze Weltraum sei von *homogener isolirender* Substanz erfüllt; so dass also ε und μ *Constanten*, und λ, u, v, w überall $= 0$ sind*). Auch befinde sich diese homogene isolirende Substanz, ebenso wie das Axensystem $[x, y, z]$, in absoluter Ruhe; so dass also die substantiellen Geschwindigkeiten α, β, γ ebenfalls überall $= 0$ sind. Alsdann reduciren sich die Gleichungen (A.), (Γ.) Seite 401 auf:

$$(\mathrm{A.})\quad \begin{cases} A\mu \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \\[2mm] A\mu \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}, \\[2mm] A\mu \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}, \end{cases} \qquad (\Gamma.)\quad \begin{cases} A\varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}, \\[2mm] A\varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}, \\[2mm] A\varepsilon \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}. \end{cases}$$

Auch ist nach Seite 376 (15.):

$$(1.)\qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0.$$

---

*) Die Leitungsfähigkeit λ eines isolirenden Mediums ist überall $= 0$. Und hieraus folgt, mittelst der allgemeinen Gleichungen (5.) Seite 373, dass in einem solchen Medium auch die u, v, w überall $= 0$ sind.

Ferner ist nach Seite 371 (14.) und nach dem Satz Seite 407:

$$(2.)\qquad 4\pi\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0.$$

Nun folgt aus (A.) sofort:

$$A\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right),$$

also mit Rücksicht auf (Γ.) und (1.):

$$(3.)\qquad A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial z^2};$$

und gleichlautende Formeln ergeben sich offenbar für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$.

Ferner folgt aus (Γ.):

$$A\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right),$$

also mit Rücksicht auf (A.) und (2.):

$$(4.)\qquad A^2\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2};$$

und gleichlautende Formeln ergeben sich für $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$.

Diese Formeln (1.), (3.) oder (2.), (4.) sind im Wesentlichen identisch mit denen, zu welchen die gewöhnliche *elastische* Theorie der Lichtbewegungen führt. Aus ihnen folgt, dass die Constante

$$A\sqrt{\mu\varepsilon}$$

den reciproken Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in der betrachteten Substanz vorstellt. [Vgl. Hertz, Ges. Werke, Bd. 2, Seite 251, ferner die Helmholtz'schen Vorlesungen, Bd. 5, 1897, Seite 102 und 356].

§ 2.

Ueber die wahre und freie Elektricität, und über den wahren und freien Magnetismus.

Wenn Hertz und Helmholtz zweierlei elektrische Dichtigkeiten, die *wahre* und die *freie* unterscheiden, so unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass hier ein Pleonasmus vorliegt, und dass man mit *einem* dieser beiden Begriffe ausreichen könnte. Vielleicht dürfte es zweckmässig sein, die wahre Dichtigkeit ganz fallen zu lassen, und nur allein die freie beizubehalten. Da ich indessen in dieser Beziehung meiner Sache nicht ganz sicher bin, so scheint es mir gut, einstweilen *beide* Begriffe nebeneinander bestehen zu lassen.

Nach Hertz sind die *wahre* elektrische Dichtigkeit σ und die *freie* elektrische Dichtigkeit (σ) zu definiren durch folgende Formeln:

(I.) $$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right),$$ [vgl. Seite 406 (7.)],

(II.) $$(\sigma) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right).$$

Aus diesen Formeln folgt sofort:

(IIa.) $$(\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon} - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\left(\mathfrak{X}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right).$$

Ist also z. B. die betrachtete Substanz *homogen*, mithin ihr Dielektricitätscoefficient ε eine Constante, so wird

(IIb.) $$(\sigma) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

sein. Eine solche einfache Beziehung zwischen den beiderlei Dichtigkeiten wird aber für *anhomogene* Substanzen (z. B. für die sogenannten Uebergangsschichten) im Allgemeinen nicht mehr stattfinden. Vielmehr wird alsdann, statt der einfachen Relation (IIb.), die viel complicirtere Formel (IIa.) zu nehmen sein.

Desgleichen sind nun ferner nach Hertz und Helmholtz auch zweierlei *magnetische* Dichtigkeiten, die wahre und die freie, zu unterscheiden. Und zwar sind diese Dichtigkeiten — sie mögen τ und (τ) heissen — zu definiren durch folgende Formeln:

(III.) $$\tau = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right) = 0,$$

(IV.) $$(\tau) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right).$$

Dass die wahre magnetische Dichtigkeit τ der in (III.) gemachten Angabe entspricht, nämlich stets und überall $= 0$ ist, ergiebt sich ohne Weiteres aus der allgemeinen Formel (15.) Seite 376, und hängt wesentlich mit dem Umstande zusammen, dass wir bei unsern Untersuchungen die *invariablen* Magnete völlig excludirt haben. [Vgl. Seite 379].

Aus den Formeln (III.), (IV.) ergiebt sich übrigens sofort:

(IVa.) $$(\tau) = -\frac{1}{4\pi\mu^2}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mathfrak{M}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mathfrak{N}\frac{\partial \mu}{\partial z}\right).$$

Ist mithin die betrachtete Substanz *homogen*, also ihr Magnetisirungscoefficient μ eine Constante, so erhält man:

(IVb.) $$(\tau) = 0.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass σ und τ die von Helmholtz gebrauchten Buchstaben sind. Hertz hat, an Stelle von σ, (σ), τ, (τ) respective die Bezeichnungen e_w, e_f, m_w, m_f angewendet. [Vgl. Hertz' Ges. W., Bd. 2, Seite 227 und Seite 237].



§ 3.

Zur Theorie der Elektrostatik. (Ein einziger Conductor).

Die den Weltraum erfüllende Substanz befinde sich, ebenso wie das Axensystem $[x, y, z]$, in *absoluter Ruhe*. Und zwar bestehe sie aus einem elektrisch geladenen homogenen Conductor, ferner aus einem den Conductor umgebendem homogenen isolirenden Medium, und endlich aus einer dünnen Uebergangsschicht zwischen Conductor und Medium. Dementsprechend zerfällt alsdann der ganze unendliche Raum in den Innenraum $\mathfrak{J}$ des Conductors, ferner in einen von der Uebergangsschicht occupirten schaalenförmigen Raum $\mathfrak{S}$, und endlich in den von dem homogenen Medium erfüllten Raum $\mathfrak{A}$.

Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes wird die *wahre* elektrische Dichtigkeit σ, zufolge des Satzes Seite 407, in $\mathfrak{J}$ und in $\mathfrak{A}$ (nicht aber in $\mathfrak{S}$) überall $= 0$ sein. Und Gleiches wird daher, nach (IIb.) Seite 413, auch zu sagen sein von der *freien* elektrischen Dichtigkeit (σ). Also:

(1.) $$\sigma = 0, \text{ in } \mathfrak{J} \text{ und in } \mathfrak{A},$$

(2.) $$(\sigma) = 0, \text{ ebenfalls in } \mathfrak{J} \text{ und in } \mathfrak{A}.$$

Der Raum $\mathfrak{J} + \mathfrak{S}$ ist umgeben von einem isolirenden Medium. Die diesem Raume $\mathfrak{J} + \mathfrak{S}$ von Hause aus zuertheilte Menge E wahrer Elektricität ist daher, nach dem Satze (6a.) Seite 406, im Laufe der Zeit *völlig unveränderlich*. Folglich wird die soeben genannte Menge E zu allen Zeiten dargestellt sein durch das Integral:

$$E = \int_{\mathfrak{J}+\mathfrak{S}} \sigma D\tau,$$

und diese Formel nimmt [vgl. (1.)] *nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichtszustandes* die einfachere Gestalt an:

(3.) $$E = \int_{\mathfrak{S}} \sigma D\tau,$$

die Integration ausgedehnt über alle Volumelemente $D\tau$ des schaalenförmigen Raumes $\mathfrak{S}$. Somit ergiebt sich also, *dass alle dem Conductor, d. i. dem Raume $\mathfrak{J} + \mathfrak{S}$ von Hause aus zuertheilte wahre Elektricität nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes in der unendlich dünnen Uebergangsschicht $\mathfrak{S}$ anzutreffen sein wird.* Und es handelt sich nun also um die Frage, in welcher Weise diese Elektricität zur Zeit des Gleichgewichts in dieser Uebergangsschicht $\mathfrak{S}$ vertheilt sein wird.

Um näher hierauf einzugehen, zerlegen wir den von einer äussern Oberfläche o_a und einer innern Oberfläche o_i begrenzten unendlich dünnen

schaalenförmigen Raum $\mathfrak{S}$ in einzelne Elemente, der Art, dass jedes solches Element die Gestalt einer *unendlich dünnen Scheibe* besitzt, nämlich begrenzt ist von zwei einander parallelen Flächenelementen Do_a, Do_i und überdies von einer verschwindend schmalen Gürtelfläche (Randfläche). Die in einem solchen scheibenförmigen Raum zur Zeit des Gleichgewichts vorhandene *wahre* Elektricität mag mit SDo bezeichnet sein, wo $Do = Do_a = Do_i$ ist. Auch mag die in diesem Element zur Zeit des Gleichgewichts vorhandene *freie* Elektricität mit $(S)Do$ bezeichnet werden. In diesen Ausdrücken

$$(4.)\qquad S\dot{D}o \quad \text{und} \quad (S)Do$$

werden alsdann die Factoren S und (S) zu bezeichnen sein als die *Flächendichtigkeiten* der auf der Conductoroberfläche vorhandenen wahren und freien Elektricität. Solches festgesetzt, handelt es sich nun also um die nähere Bestimmung dieser Flächendichtigkeiten S und (S).

Zu diesem Zwecke aber wird es nothwendig sein, die *elektrischen Zustände* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der betrachteten Substanz näher ins Auge zu fassen. *Dabei wollen wir vor allen Dingen annehmen, dass keine der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte vorhanden seien.* Alsdann reduciren sich die allgemeinen Formeln (5.) Seite 373 auf:

$$u = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon}, \qquad v = \frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \qquad w = \frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichts sind aber selbstverständlich die elektrischen Strömungen u, v, w allenthalben $= 0$; wodurch die vorstehenden Formeln sich reduciren auf:

$$(5.)\qquad 0 = \frac{\lambda \mathfrak{X}}{\varepsilon}, \qquad 0 = \frac{\lambda \mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \qquad 0 = \frac{\lambda \mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Für Punkte des Raumes $\mathfrak{A}$ (in welchem $\lambda = 0$ ist) verwandeln sich diese Gleichungen (5.) in $0 = 0$. Andrerseits aber führen sie, in ihrer Anwendung auf den Raum $\mathfrak{J}$ (in welchem $\lambda \neq 0$ ist), zu der Einsicht, dass die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{J}$ allenthalben $= 0$ sind. Also:

$$(7.)\qquad \mathfrak{X} = 0, \qquad \mathfrak{Y} = 0, \qquad \mathfrak{Z} = 0, \quad \text{im Raume } \mathfrak{J}.$$

Markirt man jetzt einen ganz beliebigen, in $\mathfrak{J}$, in $\mathfrak{S}$ oder in $\mathfrak{A}$ gelegenen Punkt (x_1, y_1, z_1), so wird für den daselbst vorhandenen Werth von $\mathfrak{X}$ die allgemeine Formel $(\gamma_2.)$ Seite 401 gelten:

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{\mathfrak{J}+\mathfrak{S}+\mathfrak{A}} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} \right) \frac{D\tau}{r},$$

eine Formel, die nach (II.) Seite 413 auch so darstellbar ist:

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{\mathfrak{J}+\mathfrak{S}+\mathfrak{A}} \frac{(\sigma) D\tau}{r},$$

und die also, mittelst der in (2.) notirten Resultate, sich reducirt auf:

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) D\tau}{r}.$$

Somit ergiebt sich:

$$(8.) \qquad \mathfrak{X}_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \qquad \mathfrak{Y}_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \qquad \mathfrak{Z}_1 = -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1},$$

wo alsdann φ_1 die Bedeutung hat:

$$(9.) \qquad \varphi_1 = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\sigma) D\tau}{r}.$$

Dieses φ_1 repräsentirt offenbar das Newton'sche Potential aller auf der Conductoroberfläche oder vielmehr im Raume $\mathfrak{S}$ vorhandenen freien Elektricität, dasselbe gebildet gedacht für jenen ganz beliebig gewählten Punkt (x_1, y_1, z_1).

Nimmt man für $D\tau$ eines jener vorhin construirten scheibenförmigen Elemente, so ist offenbar das zugehörige $(\sigma)D\tau$ identisch mit dem in (4.) angegebenem Ausdruck $(S)\,Do$; so dass also die Formel (9.) folgende Gestalt erhält:

$$(10.) \qquad \varphi_1 = \int \frac{(S)\,Do}{r},$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des gegebenen Conductors.

Im Raume $\mathfrak{J}$ sind nach (7.) die $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ überall $= 0$; so dass also die Formeln (8.) für einen innerhalb $\mathfrak{J}$ liegenden Punkt (x_1, y_1, z_1) übergehen in:

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \qquad 0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}, \qquad 0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}.$$

Folglich ist φ_1 im Raume $\mathfrak{J}$ constant. Also:

$$(11.) \qquad \varphi = \text{Const.}, \quad \text{im Raume } \mathfrak{J}.$$

Auf Grund der Gleichungen (2.) und (10.), (11.) gelangt man nun, was die *freie* Elektricität betrifft, zu folgendem Resultat:

Erster Satz. — *Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes wird freie Elektricität nur allein an der Conductoroberfläche anzutreffen sein. Und zwar wird diese freie Elektricität auf der genannten Oberfläche in solcher Weise vertheilt sein, dass ihr Newton'sches Potential φ für alle Punkte im Innenraum des Conductors ein und denselben* constanten *Werth hat.*

Sodann ergiebt sich aus (8.) folgender

Zweiter Satz. — *Markirt man irgendwo, innerhalb oder ausserhalb des Conductors, einen Punkt (x, y, z), so wird der elektrische Zustand*

($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) eines bei diesem Punkt gelegenen Substanzelementes den Formeln entsprechen:

$$\mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{12.}$$

Hier bezeichnet φ das im ersten Satz genannte Newton'sche Potential, dasselbe gebildet gedacht für den Punkt (x, y, z). Ferner bezeichnet ε den diesem Punkt entsprechenden Werth des Dielektricitätscoefficienten.

Diese Sätze beziehen sich auf die *freie* Elektricität. Wir gehen nun über zur Untersuchung der *wahren* Elektricität. Integrirt man zuvörderst die beiden allgemeinen Formeln (I.), (II.) Seite 413:

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}, \\ 4\pi(\sigma) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{13.}$$

über alle Volumelemente $D\tau$ eines ganz beliebig construirten Raumes $\mathfrak{R}$, so erhält man nach einem bekannten Green'schen Satz:

$$4\pi\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\tau = \int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{X}\cos(N,x) + \mathfrak{Y}\cos(N,y) + \mathfrak{Z}\cos(N,z)]\, Do,$$

$$4\pi\int_{\mathfrak{R}} (\sigma)\, D\tau = \int_{\mathfrak{R}} \frac{1}{\varepsilon}[\mathfrak{X}\cos(N,x) + \mathfrak{Y}\cos(N,y) + \mathfrak{Z}\cos(N,z)]\, Do,$$

die Integrale rechts ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{R}$; dabei bezeichnet N die auf Do errichtete *äussere* Normale. Substituirt man nun in diesen Integralen rechts für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Werthe (12.), so erhält man:

$$\begin{aligned} 4\pi\int_{\mathfrak{R}} \sigma\, D\tau &= -\int_{\mathfrak{R}} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial N}\, Do, \\ 4\pi\int_{\mathfrak{R}} (\sigma)\, D\tau &= -\int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial N}\, Do. \end{aligned} \tag{14.}$$

Nimmt man jetzt zum Raume $\mathfrak{R}$ den Innenraum jenes vorhin construirten, zwischen Do_a und Do_i liegenden scheibenförmigen Elementes, so werden offenbar die linken Seiten der Formeln (14.) identisch sein mit $4\pi S Do$ und $4\pi(S)Do$, wo $S Do$ und $(S)Do$ die in (4.) genannten Bedeutungen haben. Somit folgt:

$$\begin{aligned} 4\pi S\, Do &= -\left(\varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} Do_a + \varepsilon_i \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} Do_i\right), \\ 4\pi(S) Do &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_a} Do_a + \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} Do_i\right), \end{aligned} \tag{15.}$$

wo N_a und N_i die Normalen der Elemente Do_a und Do_i vorstellen, erstere in $\mathfrak{A}$, letztere in $\mathfrak{J}$ hineinlaufend gedacht. Zufolge unseres



ersten Satzes [Seite 416] ist aber φ im Raume $\mathfrak{J}$ constant. Ueberdies ist $Do = Do_a = Do_i$. Demgemäss reduciren sich die Formeln (15.) auf:

$$(16.)\qquad \begin{aligned} 4\pi S &= -\varepsilon_a \frac{\partial\varphi}{\partial N_a}, \\ 4\pi(S) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial N_a}. \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$(17.)\qquad S = \varepsilon_a(S).$$

Auf Grund dieser Formel (17.) und auf Grund der früheren Formel (1.), ergiebt sich folgender

Dritter Satz. — *Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichts wird wahre Elektricität nur allein auf der Conductoroberfläche anzutreffen sein. Und zwar wird die Flächendichtigkeit S dieser auf der Conductoroberfläche ausgebreiteten wahren Elektricität zur Flächendichtigkeit (S) der daselbst ausgebreiteten freien Elektricität in der Beziehung stehen:*

$$(18.)\qquad S = \varepsilon_a(S),$$

wo ε_a den constanten Dielektricitätscoefficienten des den Conductor umgebenden isolirenden Mediums vorstellt.

Bemerkung. — Will man Auskunft haben über die zur Zeit des elektrischen Gleichgewichts in irgend einem Punkt (x, y, z) vorhandenen elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, so hat man die allgemeinen Formeln (4.) Seite 373 anzuwenden. Diese Formeln aber nehmen, weil wir der Theorie *fremde* elektromotorische Kräfte als *nicht* vorhanden angenommen haben [vgl. Seite 415], die Gestalt an:

$$(\alpha.)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}, \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Und hieraus folgt, falls man für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die in (12.) erhaltenen Werthe substituirt, sofort:

$$(\beta.)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{B} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{C} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Nun ist nach unserm ersten Satze [Seite 416] das Potential φ innerhalb des Conductors constant. Folglich sind die elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ daselbst $= 0$. Und mit Rücksicht hierauf erkennt man jetzt, dass die den allgemeinen Formeln (1.) Seite 372:

$$(\gamma.)\qquad u = \lambda\mathfrak{A}, \qquad v = \lambda\mathfrak{B}, \qquad w = \lambda\mathfrak{C}$$

entsprechenden elektrischen Strömungen u, v, w innerhalb und ausserhalb des Conductors aus ganz verschiedenen Gründen $= 0$ sind, nämlich innerhalb deswegen, weil die elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ dort $= 0$ sind, ausserhalb hingegen deswegen, weil die Leitungsfähigkeit λ daselbst $= 0$ ist.

Es bleibt noch übrig, die *ponderomotorischen Kräfte* Ξ_e, H_e, Z_e zu untersuchen, was mittelst des allgemeinen Satzes Seite 396 zu bewerk-

stelligen ist. Doch mag hierauf, zur Vermeidung von Wiederholungen, erst eingegangen werden bei den allgemeineren Betrachtungen des folgenden Paragraphs.

§ 4.

Allgemeinere Betrachtungen. (Zwei Conductoren.)

Die den Weltraum erfüllende Substanz befinde sich, ebenso wie das Axensystem $[x, y, z]$, in absoluter Ruhe. Sie bestehe aus zwei homogenen, elektrisch geladenen Conductoren, ferner aus einem die beiden Conductoren umgebenden homogenen isolirenden Medium, und endlich aus den betreffenden Uebergangsschichten; so dass also der ganze unendliche Raum aus fünf Theilen bestehen wird: $\mathfrak{J}, \mathfrak{S}, \mathfrak{A}, \mathfrak{S}', \mathfrak{J}'$ [vgl. Seite 414]. Auch sei angenommen, *dass keine der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte vorhanden sind.*

Unsere Vorstellungen sind also genau dieselben wie im vorigen Paragraph, nur mit dem Unterschiede, dass, statt *eines* Conductors, gegenwärtig *zwei* Conductoren vorhanden sind. Schritt für Schritt auf demselben Wege, wie im vorigen Paragraph, werden wir nun zu folgenden Sätzen gelangen:

Erster Satz. — *Nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes wird freie Elektricität nur allein an den beiden Conductoroberflächen anzutreffen sein. Und zwar wird diese freie Elektricität auf den genannten beiden Flächen der Art vertheilt sein, dass ihr Newton'sches Potential* φ *im Innenraum des einen Conductors constant, und im Innenraum des andern ebenfalls constant ist. Diese beiden constanten Werthe sind im Allgemeinen verschieden.*

Zweiter Satz. — *Markirt man im ganzen unendlichen Raum irgendwo einen Punkt* (x, y, z), *so wird der elektrische Zustand* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ *eines bei diesem Punkte gelegenen Substanzelementes den Formeln entsprechen:*

$$(1.)\qquad \mathfrak{X} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{Y} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \mathfrak{Z} = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Hier bezeichnet φ *das im ersten Satz genannte Newton'sche Potential, dasselbe gebildet gedacht für den Punkt* (x, y, z). *Ferner bezeichnet* ε *den diesem Punkt zugehörigen Werth des Dielektricitätscoefficienten.*

Dritter Satz. — *Nach Eintritt des elektrischen Gleichgewichts wird wahre Elektricität nur allein auf den beiden Conductoroberflächen vorhanden sein. Und zwar wird die Flächendichtigkeit* S *der an einer solchen Oberflächenstelle vorhandenen wahren Elektricität zur Flächen-*



dichtigkeit (S) der daselbst befindlichen freien Elektricität in der Beziehung stehen:

$$S = \varepsilon_a (S), \tag{2.}$$

wo ε_a den constanten Dielektricitätscoefficienten des die Conductoren umgebenden isolirenden Mediums vorstellt.

Zwischen dem Potential φ der *freien* Elektricität und der Flächendichtigkeit (S) dieser freien Elektricität findet offenbar, wie ohne Weiteres aus der allgemeinen Theorie des Newton'schen Potentials sich ergiebt, die Formel statt:

$$-4\pi(S) = \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial N_a}. \tag{3.}$$

Und zwar gilt diese Formel für jedwedes Oberflächenelement Do der beiden Conductoren; dabei bezeichnen N_a und N_i die auf Do errichtete äussere und innere Normale. Ferner ergeben sich aus der Theorie des Newton'schen Potentials auch folgende Formeln:

$$\begin{aligned} -4\pi(S)A &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a, \\ -4\pi(S)B &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_a, \\ -4\pi(S)C &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_i = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_a, \end{aligned} \tag{4.}$$

wo A, B, C die Richtungscosinus der Normale N_a vorstellen. Dabei sind die Ableitungen rechter Hand gebildet zu denken für zwei Punkte (x, y, z), die auf den Normalen N_a und N_i liegen, und die beide der Conductoroberfläche unendlich nahe sind.

Dass in (3.) und (4.) die mit dem Index i behafteten Glieder $= 0$ sind, ist sofort klar, falls man nur beachtet, dass φ, zufolge des ersten Satzes, im Innenraum des einen Conductors, und ebenso auch im Innenraum des andern constant ist.

Berechnung der ponderomotorischen Wirkungen. — Die von uns betrachtete, den ganzen unendlichen Raum erfüllende Substanz wird, *vermöge ihres elektrischen Zustandes*, auf das in irgend einem Volumelement $D\tau$ enthaltene Substanzelement eine gewisse ponderomotorische Kraft $(\Xi_e D\tau,\ \mathsf{H}_e D\tau,\ \mathsf{Z}_e D\tau)$ ausüben. Und zwar wird die x-Componente dieser Kraft, zufolge des Satzes Seite 396, den Werth haben:

$$\Xi_e D\tau = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right)\right] D\tau. \tag{5.}$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Werthe (1.), so erhält man sofort:

$$(6.)\quad \Xi_e D\tau = \left[\left(\frac{\varepsilon(\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)}{8\pi}\right)_1 + \left(\frac{\varepsilon(2\varphi_1\varphi_2)}{8\pi}\right)_2 + \left(\frac{\varepsilon(2\varphi_1\varphi_3)}{8\pi}\right)_3\right] D\tau,$$

wo die Ableitungen nach x, y, z durch die Indices 1, 2, 3 angedeutet sind.

Die betrachtete Substanz erfüllt den ganzen unendlichen Weltraum. Denkt man sich nun innerhalb dieser Substanz einen Raum $\mathfrak{R}$ von ganz beliebiger Lage und Gestalt construirt, und integrirt man die Formel (6.) über alle Volumelemente $D\tau$ dieses Raumes $\mathfrak{R}$, so wird das so entstehende Integral

$$(7.)\quad \int_{\mathfrak{R}} \Xi_e D\tau = \int_{\mathfrak{R}} \left[\left(\frac{\varepsilon(\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)}{8\pi}\right)_1 + \left(\frac{\varepsilon(2\varphi_1\varphi_2)}{8\pi}\right)_2 + \left(\frac{\varepsilon(2\varphi_1\varphi_3)}{8\pi}\right)_3\right] D\tau$$

die x-Componente derjenigen ponderomotorischen Kraft vorstellen, mit welcher die den Weltraum erfüllende Substanz, vermöge ihres elektrischen Zustandes, auf den innerhalb $\mathfrak{R}$ enthaltenen *Theil* der Substanz einwirkt. Dieses Integral (7.) kann aber sofort in ein Oberflächenintegral verwandelt werden. Man erhält in solcher Weise:

$$\int_{\mathfrak{R}} \Xi_e D\tau = \int_{\mathfrak{R}} \frac{\varepsilon(\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)A + \varepsilon(2\varphi_1\varphi_2)B + \varepsilon(2\varphi_1\varphi_3)C}{8\pi} Do,$$

oder etwas anders geordnet:

$$(8.)\quad \int_{\mathfrak{R}} \Xi_e D\tau = \int_{\mathfrak{R}} \frac{\varepsilon[2\varphi_1(\varphi_1 A + \varphi_2 B + \varphi_3 C) - (\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)A]}{8\pi} Do,$$

die Integration rechter Hand ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{R}$; dabei bezeichnen A, B, C die Richtungscosinus der auf Do errichteten *äusseren* Normale.

Nunmehr wird offenbar die auf ein gegebenes Element $D\tau$ ausgeübte Kraft $\Xi_e D\tau$ in ***doppelter*** *Weise angebbar sein, nämlich erstens durch den Ausdruck* (6.), *zweitens aber auch durch das Oberflächenintegral* (8.), *letzteres ausgedehnt gedacht über die Oberfläche des gegebenen Elementes $D\tau$.* Indem wir nun sämmtliche Elemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes durchmustern, unterscheiden wir zwei Fälle:

Erster Fall: *Das Element $D\tau$ liegt in $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{J}$ oder in $\mathfrak{J}'$* (*nicht aber in $\mathfrak{S}$ oder* $\mathfrak{S}'$). Alsdann ist $D\tau$ von homogener Substanz erfüllt, mithin ε im Innenraum des Elementes $D\tau$ *constant*; so dass also die Formel (6.) übergeht in:

$$(9.)\quad \Xi_e D\tau = \varepsilon\left[\left(\frac{\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}{8\pi}\right)_1 + \left(\frac{2\varphi_1\varphi_2}{8\pi}\right)_2 + \left(\frac{2\varphi_1\varphi_3}{8\pi}\right)_3\right] D\tau.$$

Das hier in den eckigen Klammern befindliche Trinom ist offenbar

$$= \frac{(\varphi_1\varphi_{11} - \varphi_2\varphi_{21} - \varphi_3\varphi_{31}) + (\varphi_{12}\varphi_2 + \varphi_1\varphi_{22}) + (\varphi_{13}\varphi_3 + \varphi_1\varphi_{33})}{4\pi},$$

d. i. $$= \frac{\varphi_1(\varphi_{11}+\varphi_{22}+\varphi_{33})}{4\pi} = \frac{\varphi_1\Delta\varphi}{4\pi},$$

wo $\Delta\varphi$ den Laplace'schen Differentialausdruck vorstellt. Dieser Ausdruck ist aber $= 0$, weil $D\tau$ in $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{J}'$ liegt, andrerseits aber φ [vgl. den ersten Satz Seite 419] das Newton'sche Potential von Massen vorstellt, die in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ sich befinden. Somit ergiebt sich schliesslich:

$$\Xi_e D\tau = 0. \tag{10.}$$

Zweiter Fall: *Das Element $D\tau$ liegt in $\mathfrak{S}$ oder in $\mathfrak{S}'$.* Man kann für $D\tau$ eine jener kleinen Scheiben nehmen, in welcher der unendlich dünne schaalenförmige Raum $\mathfrak{S}$ bereits früher [Seite 415] zerlegt gedacht wurde. Eine solche *kleine Scheibe* $D\tau$ wird alsdann, abgesehen von einer verschwindend dünnen Gürtelfläche, von zwei einander parallelen Flächenelementen Do_a und Do_i begrenzt sein, wo $Do_a = Do_i = Do$ ist. Die auf Do_a und Do_i errichteten Normalen mögen N_a und N_i heissen, der Art, dass N_a in den Raum $\mathfrak{A}$, und N_i in den Raum $\mathfrak{J}$ hineingeht. Was nun die auf die *kleine Scheibe* $D\tau$ ausgeübte Kraft $\Xi_e D\tau$ betrifft, so wollen wir diese Scheibe in unendlich kleine Elemente zweiter Ordnung $D\tau'$ zerlegen, und demgemäss setzen:

$$\Xi_e D\tau = \int \Xi_e' D\tau', \tag{11.}$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\tau'$ der Scheibe $D\tau$; dabei wird alsdann $\Xi_e' D\tau'$ die auf $D\tau'$ ausgeübte Kraft vorstellen. Dieses Integral (11.) können wir nun aber identificiren mit dem Integral (8.), indem wir unter $\mathfrak{R}$ den Innenraum der kleinen Scheibe $D\tau$ verstehen. Die Oberfläche dieses Innenraumes $\mathfrak{R}$ besteht alsdann, weil man von der verschwindend dünnen Gürtelfläche absehen kann, nur aus den beiden Elementen Do_a und Do_i. Demgemäss erhält man aus (8.):

$$\Xi_e D\tau = \Omega_a Do_a + \Omega_i Do_i, \tag{12.}$$

wo Ω_a und Ω_i die Bedeutungen haben:

$$(\alpha.) \qquad \Omega_a = \frac{\varepsilon_a[2\varphi_1(\varphi_1 A + \varphi_2 B + \varphi_3 C) - (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2)A]}{8\pi},$$

$$(\beta.) \qquad \Omega_i = \frac{\varepsilon_i[2\varphi_1'(\varphi_1' A' + \varphi_2' B' + \varphi_3' C') - (\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2)A']}{8\pi}.$$

Hier sind A, B, C und A', B', C' die Richtungscosinus jener Normalen N_a und N_i. Ferner sind φ_1, φ_2, φ_3 und φ_1', φ_2', φ_3' die Werthe der Ableitungen φ_1, φ_2, φ_3 in den Fusspunkten jener beiden Normalen.

Was nun zuvörderst den Fusspunkt der Normale N_a betrifft, so werden daselbst nach (4.) die Formeln stattfinden:

$$\varphi_1 = -4\pi(S)A, \qquad \varphi_2 = -4\pi(S)B, \qquad \varphi_3 = -4\pi(S)C.$$

Dies in $(\alpha.)$ substituirt, ergiebt sich sofort:

$$\Omega_a = (4\pi(S))^2 \frac{\varepsilon_a[2A(A^2+B^2+C^2)-(A^2+B^2+C^2)A]}{8\pi},$$

oder weil $A^2+B^2+C^2=1$ ist:

$$(\gamma.) \qquad \Omega_a = 2\pi(S)(S)\,\varepsilon_a A.$$

Was andrerseits den Fusspunkt der Normale N_i betrifft, so ist zu beachten, dass φ im Raume $\mathfrak{J}$ constant ist. Folglich sind die diesem Punkt entsprechenden Ableitungen φ_1', φ_2', φ_3' alle $=0$; so dass also die Formel (β.) sich reducirt auf:

$$(\delta.) \qquad \Omega_i = 0.$$

Substituirt man die Werthe (γ.), (δ.) in (12.), und beachtet man dabei, dass $Do_a = Do_i = Do$ ist, so erhält man:

$$(13.) \qquad \Xi_e D\tau = 2\pi(S)(S)\,\varepsilon_a A\, Do.$$

Und substituirt man endlich hier für das Product $(S)A$ seinen aus (4.) entspringenden Werth, so ergiebt sich:

$$(14.) \qquad \Xi_e D\tau = -\,\varepsilon_a \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_a \cdot (S)\, Do.$$

Die in beiden Fällen erhaltenen Resultate (10.) und (14.) sind offenbar mit der Poisson'schen Theorie in vollem Einklang, bis auf den constanten Factor ε_a; so dass man also sagen kann:

Vierter Satz. — *Die Werthe der ponderomotorischen Kräfte elektrischen Ursprungs unterscheiden sich von den betreffenden Ausdrücken der Poisson'schen Theorie nur durch den Factor ε_a. D. h. Sie sind identisch mit jenen Ausdrücken, dieselben noch multiplicirt mit ε_a. Dabei bezeichnet ε_a den constanten Dielektricitätscoefficienten des die beiden Conductoren umgebenden homogenen isolirenden Mediums.*

§ 5.

Zur Theorie des Magnetismus.

Substanzen von temporär-magnetischer Natur gerathen bekanntlich, sobald invariable Magnete oder elektrische Ströme auf sie einwirken, in einen magnetischen Zustand. Sind aber solche Objecte wie invariable Magnete oder elektrische Ströme *nicht* vorhanden, so werden jene Substanzen in *völlig unmagnetischem* Zustande sich befinden. Es soll nun untersucht werden, in wie weit dieser allgemeine Erfahrungssatz mit der Helmholtz-Hertz'schen Theorie in Einklang ist.

Dabei wollen wir, um möglichst anschauliche Verhältnisse vor uns zu haben, zurückgreifen zu den einfachen Vorstellungen des vor-

letzten Paragraphs. Die den Weltraum erfüllende Substanz soll also bestehen aus einem homogenen Conductor, ferner aus einem denselben umgebenden homogenen isolirenden Medium, und endlich aus der betreffenden Uebergangsschicht. Auch soll diese Substanz, entsprechend unserer allgemeinen Voraussetzung [Seite 379], in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur sein.

Wird der Conductor elektrisch geladen, so werden zunächst elektrische Strömungen und Störungen im Conductor und im umgebenden Medium entstehen; und durch diese Vorgänge können magnetische Zustände im Conductor wie auch im umgebenden Medium entstehen.

Sehr bald aber wird elektrisches Gleichgewicht eintreten. *Und wir stellen uns nun die Aufgabe, die magnetischen Zustände* ($\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) *der betrachteten Substanz nach Eintritt dieses Gleichgewichtszustandes, auf Grund der Helmholtz-Hertz'schen Theorie, näher zu untersuchen, — namentlich zu untersuchen, ob dieselben, in Einklang mit jenem allgemeinen Erfahrungssatz, allenthalben* $= 0$ *sein werden.*

Da wir invariable Magnete von unserer Betrachtung völlig excludirt haben, so wird die *wahre* magnetische Dichtigkeit τ allenthalben $= 0$ sein, zufolge der Formeln Seite 413. Auch wird die *freie* magnetische Dichtigkeit (τ), zufolge jener Formeln, $= 0$ sein in den *homogenen* Theilen der betrachteten Substanz. Bedienen wir uns also der Bezeichnungen $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{A}$ in demselben Sinne wie im vorletzten Paragraph, so ist:

$$(1.) \qquad \tau = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{J},\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{A},$$

und andrerseits:

$$(2.) \qquad (\tau) = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{J},\ \mathfrak{A}.$$

Fraglich bleiben also nur noch die Werthe von (τ) *im Raume* $\mathfrak{S}$. Um näher hierauf einzugehen, zerlegen wir diesen unendlich dünnen schaalenförmigen Raum [genau ebenso wie auf Seite 415] in einzelne *Scheiben*, und bezeichnen den in einem solchen scheibenförmigen Element $D\tau$ enthaltenen freien Magnetismus mit

$$(3.) \qquad (T)\,Do,$$

wo alsdann (T) die Flächendichtigkeit dieses freien Magnetismus vorstellt.

Markirt man nun irgendwo im ganzen unendlichen Raume einen Punkt (x_1, y_1, z_1), und bezeichnet man den daselbst nach Eintritt der Gleichgewichtsepoche vorhandenen magnetischen Zustand mit $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1)$, so gilt für $\mathfrak{L}_1$ die Formel $(\alpha_3.)$ Seite 399:

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathfrak{J}+\mathfrak{S}+\mathfrak{A}} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r};$$

wofür man mit Rücksicht auf (IV.) Seite 413 auch schreiben kann:

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathfrak{J}+\mathfrak{S}+\mathfrak{A}} \frac{(\tau)D\tau}{r}.$$

Nach (2.) ist aber (τ) in $\mathfrak{J}$ und in $\mathfrak{A}$ allenthalben $= 0$; so dass also die Formel sich reducirt auf

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau)D\tau}{r}.$$

Somit ergiebt sich:

$$(4.)\qquad \mathfrak{L}_1 = -\mu_1\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \mathfrak{M}_1 = -\mu_1\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \quad \mathfrak{N}_1 = -\mu_1\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1},$$

wo alsdann ψ_1 die Bedeutung hat*):

$$(5.)\qquad \psi_1 = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau)D\tau}{r}.$$

Dieses ψ_1 repräsentirt offenbar das Newton'sche Potential des auf der Conductoroberfläche oder vielmehr im Raume $\mathfrak{S}$ vorhandenen freien Magnetismus, dasselbe gebildet gedacht für jenen ganz beliebig gewählten Punkt (x_1, y_1, z_1). Auch bemerkt man, dass dieses ψ_1 durch Anwendung der in (3.) eingeführten Bezeichnung die einfachere Gestalt erhält:

$$(6.)\qquad \psi_1 = \int \frac{(T)Do}{r},$$

wo (T) die Flächendichtigkeit des auf Do befindlichen freien Magnetismus vorstellt.

Um diese Flächendichtigkeit (T) näher zu bestimmen, integriren wir die allgemeine Formel (15.) Seite 376:

$$(7.)\qquad 0 = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}$$

über alle Volumelemente $D\tau$ eines ganz *ad libitum* construirten Raumes $\mathfrak{R}$; wodurch sich ergiebt:

$$(8.)\qquad 0 = \int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{L}\cos(N, x) + \mathfrak{M}\cos(N, y) + \mathfrak{N}\cos(N, z)]\, Do,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Raumes $\mathfrak{R}$; dabei mag N die auf Do errichtete *äussere* Normale sein. Substituirt man hier in (8.) für $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ die aus (4.) entspringenden Werthe:

---

*) Wenn der Buchstabe τ hier in (5.) im Volumelement $D\tau$ auftritt, andrerseits aber auch zur Bezeichnung der beiderlei magnetischen Dichtigkeiten τ und (τ) dient, so wird doch nicht zu befürchten sein, dass hieraus ein Missverständniss entstehen könnte.

$$\mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

so erhält man sofort:

(9.) $$0 = \int_{\mathfrak{R}} \mu \frac{\partial \psi}{\partial N} Do.$$

Nimmt man jetzt zum Raume $\mathfrak{R}$ den Innenraum eines jener scheibenförmigen Elemente, in welche $\mathfrak{S}$ zerlegt wurde, so erhält man, ähnlich wie früher [vgl. auf Seite 417 den Uebergang von (14.) zu (15.)] und unter Anwendung der damaligen Bezeichnungsweise, folgende Formel:

(10.) $$0 = \mu_a \frac{\partial \psi}{\partial N_a} + \mu_i \frac{\partial \psi}{\partial N_i}.$$

Mittelst dieser für alle Oberflächenpunkte des Conductors geltenden Formel (10.) kann nun das Potential ψ leicht berechnet werden. Multiplicirt man nämlich die Formel (10.) mit $\psi\, Do$, und integrirt sodann über alle Oberflächenelemente Do des gegebenen Conductors, so erhält man sofort:

(11.) $$0 = \mu_a \int \psi \frac{\partial \psi}{\partial N_a} Do + \mu_i \int \psi \frac{\partial \psi}{\partial N_i} Do;$$

und hieraus folgt mittelst einer bekannten Green'schen Transformation:

(12.) $$0 = \mu_a \int_{\mathfrak{A}} \Box \psi \cdot D\tau + \mu_i \int_{\mathfrak{J}} \Box \psi \cdot D\tau,$$

die Integrale ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des Raumes $\mathfrak{A}$, respective über alle Volumelemente $D\tau$ des Raumes $\mathfrak{J}$; dabei hat das Zeichen $\Box$ dieselbe Bedeutung, wie in (γ.) Seite 186.

Die Constanten μ_a und μ_i sind bekanntlich stets *positiv* *). Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus der Gleichung (12.) sofort, dass ψ im ganzen unendlichen Raum allenthalben *constant* ist. Auch kann dieser constante Werth, weil das Potential ψ (6.) im Unendlichen verschwindet, kein anderer als die *Null* sein.

Es wird also ψ im ganzen unendlichen Raum überall $= 0$ sein. Gleiches wird daher nach (4.) auch zu sagen sein von den Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Ueberdies ergiebt sich aus jenem Nullsein des Potentiales ψ, dass das in der Formel (6.) enthaltene (T) auf der Conductoroberfläche überall $= 0$ ist. Demgemäss gelangt man, unter Hinzuziehung der schon in (1.), (2.) notirten Resultate, zu folgendem Satz:

---

*) Nach den Vorstellungen von Hertz und Helmholtz sind nämlich die Coefficienten μ und ε für *alle* Substanzen *positiv*. Speciell für den reinen Aether sind μ und ε beide $= 1$. Was die magnetischen Eigenschaften betrifft, so pflegt man zu unterscheiden zwischen paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen. Für die erstern ist $\mu > 1$, für die letztern $\mu < 1$, für alle aber $\mu \geqq 0$.

Erster Satz. — *Nach Eintritt der Gleichgewichtsepoche wird im ganzen unendlichen Raum nirgends eine Spur von Magnetismus anzutreffen sein, weder von wahrem noch auch von freiem Magnetismus. Auch werden nach Eintritt dieser Epoche die magnetischen Zustände* ($\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$) *der betrachteten Substanz allenthalben Null sein, d. h. allenthalben den Formeln*

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = 0 \tag{13.}$$

entsprechen. Hieraus aber ergiebt sich nun, durch Anwendung der allgemeinen Gleichungen (38.) Seite 396, sofort folgender

Zweiter Satz. — *Die ponderomotorischen Kräfte magnetischen Ursprungs, mit denen die den unendlichen Raum erfüllende Substanz auf ihre einzelnen Elemente einwirkt, werden nach Eintritt jener Gleichgewichtsepoche alle* $= 0$ *sein.*

Zu analogen Resultaten wird man offenbar gelangen, wenn man *beliebig viele* homogene Körper betrachtet, die von einem homogenen Medium umgeben sind, — immer vorausgesetzt, dass dieses Medium und all' jene Körper, so wie auch die betreffenden Uebergangsschichten, nur *temporär*-magnetischer Natur sind. Will man also magnetische Zustände erhalten, die von Null verschieden sind, so wird man gezwungen sein, entweder *invariable* Magnete hinzuzuziehen, oder aber anzunehmen, dass irgend welche *elektrische Ströme* vorhanden seien, durch welche dann vielleicht eine gewisse magnetisirende Wirkung hervorgebracht wird. Da wir nun invariable Magnete grundsätzlich [vgl. Seite 379] von unserer Untersuchung excludirt haben, so werden wir im folgenden Paragraph den letztern Weg einschlagen.

§ 6.

Fortsetzung. Die magnetisirende Einwirkung elektrischer Ströme.

Die den Weltraum erfüllende Substanz und das Axensystem $[x, y, z]$ mögen, ebenso wie bisher, in *absoluter Ruhe* sein. Auch sei jene Substanz in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur. Sie bestehe aus zwei homogenen Körpern, ferner aus einem dieselben umgebenden homogenen isolirenden Medium, und endlich aus den betreffenden Uebergangsschichten; so dass also der ganze unendliche Raum [ebenso wie im vorletzten Paragraph Seite 419] aus fünf Theilen bestehen wird: $\mathfrak{J}, \mathfrak{S}, \mathfrak{A}, \mathfrak{S}', \mathfrak{J}'$. Der Raum $\mathfrak{J}$ ist alsdann von homogener Substanz erfüllt, sein *constanter* Magnetisirungscoefficient mag μ_i heissen. Analoges gilt für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}'$. Auch wollen wir voraussetzen, dass die Räume $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}'$ beide *ein und denselben* constanten Magnetisirungs-



coefficienten besitzen, welcher μ_a heissen mag. Alsdann wird wohl anzunehmen sein, dass dieser selbe constante Magnetisirungscoefficient auch der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}'$ liegenden Uebergangsschicht $\mathfrak{S}'$ zukommt; so dass wir also folgendes Bild vor uns haben:

$$(f.)\qquad \frac{\mathfrak{J}}{\mu_i = \text{Const.}} \quad \frac{\mathfrak{S}}{} \quad \frac{\mathfrak{A}\ \mathfrak{S}'\ \mathfrak{J}'}{\mu_a = \text{Const.}}$$

Die Uebergangsschicht $\mathfrak{S}$ ist anhomogen, und ihr Magnetisirungscoefficient wird daher eine Function der Coordinaten sein, und zwar eine Function, deren Werthe sämmtlich zwischen den beiden Constanten μ_a und μ_i liegen.

Für die magnetischen Dichtigkeiten τ und (τ) ergeben sich alsdann, ähnlich wie früher auf Seite 424, die Formeln:

$$(1.)\qquad \tau = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{J},\ \mathfrak{S},\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{S}',\ \mathfrak{J}',$$

$$(2.)\qquad (\tau) = 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{J} \text{ und in } \mathfrak{A},\ \mathfrak{S}',\ \mathfrak{J}'.$$

Fraglich bleibt der Werth von (τ) im Raume $\mathfrak{S}$. Sind keine magnetisirenden Ursachen vorhanden, so wird dieser Werth, ebenso wie im vorigen Paragraph, sich $= 0$ ergeben; was hier weiter darzulegen überflüssig erscheint.

Wir wollen nun aber annehmen, dass solche magnetisirenden Ursachen wirklich existiren, und dass sie dargestellt sind durch ein im Raume $\mathfrak{J}'$ vorhandenes *System unveränderlicher elektrischer Ströme*. Allerdings werden wir uns dabei von der (eigentlich vorliegenden) Verpflichtung dispensiren, über die Ursachen der Entstehung und des Fortbestandes dieser Ströme nähere Rechenschaft abzulegen.

Unter so bewandten Umständen wollen wir nun jenen Werth von (τ) im Raume $\mathfrak{S}$, sowie auch den magnetischen Zustand $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1)$ der den Weltraum erfüllenden Substanz in irgend einem Punkte (x_1, y_1, z_1) näher zu untersuchen uns bemühen. Dabei soll dieser Punkt (x_1, y_1, z_1) *ganz beliebig* gedacht werden, in $\mathfrak{J}$, in $\mathfrak{S}$, in $\mathfrak{A}$, in $\mathfrak{S}'$ oder in $\mathfrak{J}'$. Selbstverständlich beschränken wir uns bei dieser Untersuchung auf die Zeit der *stationären Epoche*.

Alsdann wird z. B. für $\mathfrak{L}_1$ die allgemeine Formel $(\alpha_2.)$ Seite 399 gelten:

$$(3.)\qquad \frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r}$$
$$+ A\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{w\,D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{v\,D\tau}{r}\right\},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes. Doch wird man die Integrale der letzten

Zeile auf den Raum $\mathfrak{J}'$ einschränken können, weil elektrische Ströme, nach unserer Annahme, nur allein in $\mathfrak{J}'$ vorhanden sind. Wir können demgemäss die Formel (3.) auch so schreiben:

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + A\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_1} - \frac{\partial G_1}{\partial z_1}\right), \tag{4.}$$

wo Q_1 die Bedeutung hat:

$$Q_1 = \int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r}; \tag{5.}$$

während unter F_1, G_1, H_1 folgende nur allein über $\mathfrak{J}'$ ausgedehnte Integrale zu verstehen sind:

$$F_1 = \int_{\mathfrak{J}'} \frac{u\,D\tau}{r}, \qquad G_1 = \int_{\mathfrak{J}'} \frac{v\,D\tau}{r}, \qquad H_1 = \int_{\mathfrak{J}'} \frac{w\,D\tau}{r}. \tag{6.}$$

Wir wollen nun fortan *voraussetzen*, jene in $\mathfrak{J}'$ vorhandenen Ströme seien *annularer* Natur [vgl. Seite 235, Satz, Zusatz und Note], und ferner *voraussetzen*, der betrachtete Punkt (x_1, y_1, z_1) liege *ausserhalb* $\mathfrak{J}'$. Auch wollen wir *voraussetzen*, die Oberfläche jenes Raumes $\mathfrak{J}'$ sei eine *einfach zusammenhängende*.

Zufolge des (rein mathematischen) Satzes Seite 310 ist alsdann *innerhalb* des Raumes $\mathfrak{J}'$ stets eine Massenvertheilung denkbar von solcher Beschaffenheit, dass das Newton'sche Potential dieser Massenvertheilung für alle *ausserhalb* $\mathfrak{J}'$ gelegenen Punkte (x_1, y_1, z_1) zu den Functionen F_1, G_1, H_1 (6.) in der Beziehung steht:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P_1}{\partial x_1} = A\left(\dfrac{\partial H_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1}\right), \\ -\dfrac{\partial P_1}{\partial y_1} = A\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} - \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\right), \\ -\dfrac{\partial P_1}{\partial z_1} = A\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\right), \end{cases} \qquad [(x_1, y_1, z_1) \text{ ausserhalb } \mathfrak{J}']. \tag{7.}$$

Für einen solchen ausserhalb $\mathfrak{J}'$ liegenden Punkt (x_1, y_1, z_1) ergeben sich daher aus (4.) folgende Formeln:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_1 = -\mu_1 \dfrac{\partial(Q_1 + P_1)}{\partial x_1}, \\ \mathfrak{M}_1 = -\mu_1 \dfrac{\partial(Q_1 + P_1)}{\partial y_1}, \\ \mathfrak{N}_1 = -\mu_1 \dfrac{\partial(Q_1 + P_1)}{\partial z_1}, \end{cases} \qquad [(x_1, y_1, z_1) \text{ ausserhalb } \mathfrak{J}']. \tag{8.}$$

Die u, v, w sind als *gegebene* Functionen anzusehen. Gleiches gilt daher nach (6.), (7.) von F_1, G_1, H_1 und P_1. Andrerseits aber sind Q_1 (5.) und die $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$ (8.) als die *unbekannten* Functionen anzusehen, um deren nähere Bestimmung es sich handelt.



Das auf einen ganz beliebigen Punkt (x_1, y_1, z_1) sich beziehende Potential Q_1 (5.) ist nach (IV.) Seite 413 auch so darstellbar:

$$Q_1 = \int \frac{(\tau) D\tau}{r}, \quad [(x_1, y_1, z_1) \text{ beliebig}]. \tag{9.}$$

Dieses über den ganzen unendlichen Raum $\mathfrak{J} + \mathfrak{S} + \mathfrak{A} + \mathfrak{S}' + \mathfrak{J}'$ ausgedehnte Integral reducirt sich nun, wie aus (2.) ersichtlich ist, auf folgendes nur allein über $\mathfrak{S}$ ausgedehnte Integral:

$$Q_1 = \int_{\mathfrak{S}} \frac{(\tau) D\tau}{r}, \quad [(x_1, y_1, z_1) \text{ beliebig}]. \tag{10.}$$

Hiefür aber kann man schreiben [vgl. Seite 425 den Uebergang von (5.) zu (6.)]:

$$Q_1 = \int \frac{(T) Do}{r}, \quad [(x_1, y_1, z_1) \text{ beliebig}], \tag{11.}$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente Do des Körpers $\mathfrak{J}$; dabei bezeichnet alsdann (T) die unbekannte Flächendichtigkeit des auf dieser Oberfläche vorhandenen freien Magnetismus.

Um nun die unbekannten Functionen Q und (T) wirklich zu bestimmen, bedienen wir uns der schon im vorigen Paragraph abgeleiteten Formel Seite 425 (8.):

$$0 = \int_{\mathfrak{R}} [\mathfrak{L} \cos(N, x) + \mathfrak{M} \cos(N, y) + \mathfrak{N} \cos(N, z)] \, Do. \tag{12.}$$

Für die hier auftretenden $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ werden, falls der Raum $\mathfrak{R}$ *ausserhalb* des Raumes $\mathfrak{J}'$ liegt, die Werthe (8.) anwendbar sein; so dass man also erhält:

$$0 = \int_{\mathfrak{R}} \mu \frac{\partial(Q + P)}{\partial N} \, Do, \quad [\mathfrak{R} \text{ ausserhalb } \mathfrak{J}']. \tag{13.}$$

Nimmt man jetzt für $\mathfrak{R}$ den Innenraum eines jener scheibenförmigen Elemente, in welche der Raum $\mathfrak{S}$ zerlegt wurde, so gewinnt die Formel (13.) [vgl. Seite 426 den Uebergang von (9.) zu (10.)], folgende Gestalt:

$$0 = \mu_a \frac{\partial(Q + P)}{\partial N_a} + \mu_i \frac{\partial(Q + P)}{\partial N_i}. \tag{14.}$$

Da nun die Function P und ebenso auch die beiden positiven Constanten μ_a, μ_i als gegeben zu betrachten sind, so werden, wie man leicht übersieht, die beiden unbekannten Functionen Q und (T) durch die Formeln (11.) *und* (14.) *eindeutig bestimmt sein.*

Erläuterung. — Existirten nämlich für diese Formeln (11.), (14.) *zwei* Lösungen: Q, (T) und Q', $(T)'$, so würde sich durch Subtraction ergeben:

$$Q_1 - Q_1' = \int \frac{[(T) - (T)'] \, Do}{r}, \quad [(x_1, y_1, z_1) \text{ beliebig}], \tag{α.}$$

und ferner:

$$(\beta.)\qquad 0 = \mu_a \frac{\partial(Q-Q')}{\partial N_a} + \mu_i \frac{\partial(Q-Q')}{\partial N_i}.$$

Und ebenso, wie aus den früheren Gleichungen Seite 426 (9.), (10.) sich ergab, dass die dortige Function ψ identisch $= 0$ sei, in genau derselben Weise wird offenbar aus den hier vorliegenden Gleichungen (α.), (β.) sich ergeben, dass $Q - Q'$ identisch $= 0$ ist; woraus alsdann, mit Hinblick auf (α.), folgt, dass $(T) - (T)'$ ebenfalls identisch $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

Nach (1.), (2.) kann *freier* Magnetismus nur allein in der Uebergangsschicht $\mathfrak{S}$, also nur allein dort vorhanden sein, wo Substanzen von verschiedenen Magnetisirungscoefficienten μ_i und μ_a zusammenstossen [vgl. (f.) Seite 428]. Die Flächendichtigkeit (T) dieses in $\mathfrak{S}$ vorhandenen freien Magnetismus und sein Potential Q sind aber, wie soeben gezeigt wurde, durch die Formeln (11.), (14.) eindeutig bestimmt. Somit ergiebt sich folgender

Erster Satz. — *Nach Eintritt der stationären Epoche wird freier Magnetismus nur allein auf der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{J}$, also nur allein dort anzutreffen sein, wo Substanzen von verschiedenen Magnetisirungscoefficienten μ_a und μ_i aneinander grenzen. Bezeichnet man die Flächendichtigkeit dieses freien Magnetismus mit (T) und sein Potential mit Q:*

$$(15.)\qquad Q = \int \frac{(T)\,Do}{r},$$

so werden Q und (T) eindeutig bestimmt sein durch die für alle Punkte der genannten Oberfläche geltende Formel:

$$(16.)\qquad 0 = \mu_a \frac{\partial(Q+P)}{\partial N_a} + \mu_i \frac{\partial(Q+P)}{\partial N_i},$$

in welcher N_a und N_i die äussere und innere Normale jener Oberfläche vorstellen. Dabei bezeichnet P eine gegebene Function, oder vielmehr eine Function, welche auf Grund der gegebenen elektrischen Ströme mittelst der Formeln (7.) *zu berechnen ist.* Sodann ergiebt sich nun weiter aus (8.) folgender

Zweiter Satz. — *Markirt man irgend einen Punkt (x, y, z), der ausserhalb des von den elektrischen Strömen erfüllten Raumes $\mathfrak{J}'$ liegt, so wird der magnetische Zustand $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ eines bei diesem Punkte gelegenen Substanzelementes den Formeln entsprechen:*

$$(17.)\qquad \mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial(Q+P)}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial(Q+P)}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial(Q+P)}{\partial z}.$$

Endlich wird, der Vollständigkeit halber, noch hinzuzufügen sein folgender aus (1.) ersichtlicher



Dritter Satz. — *Wahrer Magnetismus wird, weil invariable Magnete von unseren Betrachtungen ein für allemal excludirt worden sind, nirgends anzutreffen sein.* [*Vgl.* (III.) *Seite 413*].

Die Aehnlichkeit der Resultate (15.), (16.) mit den Ergebnissen der Poisson'schen Theorie ist unverkennbar. Nur fragt sich, ob eine solche Aehnlichkeit auch noch für die betreffenden ponderomotorischen Kräfte stattfindet. Diese Frage ist mit *Nein!* zu beantworten. Bevor wir indessen hierauf näher eingehen, seien zuvörderst folgende Bemerkungen eingeschaltet:

Auf Grund der Formeln (7.) wird P das Potential der gegebenen elektrischen Ströme oder kurzweg das *inducirende Potential* zu nennen sein, andrerseits aber wird Q als das *inducirte Potential* zu bezeichnen sein. Setzt man nun:

$$\psi = Q + P, \tag{18.}$$

so gewinnen die Formeln (16.), (17.) die einfachere Gestalt:

$$0 = \mu_a \frac{\partial \psi}{\partial N_a} + \mu_i \frac{\partial \psi}{\partial N_i}, \tag{19.}$$

$$\mathfrak{L} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \mathfrak{M} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \mathfrak{N} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad [(x, y, z) \text{ ausserhalb } \mathfrak{J}']. \tag{20.}$$

Das *Gesammtpotential* ψ rührt her theils von jenem auf der Oberfläche von $\mathfrak{J}$ vorhandenen freien Magnetismus (T), theils von jenen [vgl. (7.)] an Stelle der elektrischen Ströme substituirten im Raume $\mathfrak{J}'$ liegenden Massen. Hieraus ergiebt sich, dass an der Oberfläche des Körpers $\mathfrak{J}$ folgende Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} -4\pi(T)A &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_i = \psi_1 - \psi_1', \\ -4\pi(T)B &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_a - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_i = \psi_2 - \psi_2', \\ -4\pi(T)C &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_a - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_i = \psi_3 - \psi_3'. \end{aligned} \tag{21.}$$

Die Bezeichnungsweise ist hier genau dieselbe wie früher in den Formeln (4.) Seite 420; so dass z. B. A, B, C die Richtungscosinus der *äusseren* Normale vorstellen. Ueberdies aber sind in (21.) in der letzten Colonne ψ_1, ψ_2, ψ_3 und ψ_1', ψ_2', ψ_3' als Abbreviaturen eingeführt für die mit den Indices a und i behafteten Glieder.

§ 7.

Fortsetzung. Die betreffenden ponderomotorischen Kräfte.

Die von uns betrachtete den ganzen unendlichen Raum erfüllende Substanz wird, *vermöge ihres magnetischen Zustandes* (17.), auf das in irgend einem Raumelement $D\tau$ enthaltene Substanzelement eine gewisse ponderomotorische Kraft $\Xi_m D\tau$, $\mathsf{H}_m D\tau$, $\mathsf{Z}_m D\tau$ ausüben. Und zwar gilt z. B. für die Componente $\Xi_m D\tau$, nach dem Satz Seite 396, die Formel:

$$(22.)\qquad \Xi_m D\tau = \left[\left(\frac{\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu}\right)_1 + \left(\frac{2\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right)_2 + \left(\frac{2\,\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right)_3\right] D\tau,$$

wo die Indices 1, 2, 3 partielle Ableitungen nach x, y, z andeuten. Liegt nun, wie wir voraussetzen wollen, das Element $D\tau(x, y, z)$ ausserhalb des von den elektrischen Strömen erfüllten Raumes $\mathfrak{J}'$, so ist nach (20.):

$$\mathfrak{L} = -\mu\psi_1, \qquad \mathfrak{M} = -\mu\psi_2, \qquad \mathfrak{N} = -\mu\psi_3.$$

Dies in (22.) substituirt, erhält man:

$$(23.)\ \Xi_m D\tau = \left[\left(\frac{\mu(\psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2)}{8\pi}\right)_1 + \left(\frac{\mu(2\psi_1\psi_2)}{8\pi}\right)_2 + \left(\frac{\mu(2\psi_1\psi_3)}{8\pi}\right)_3\right] D\tau,\ [D\tau \text{ ausserh. } \mathfrak{J}'].$$

Und hieraus ergiebt sich [vgl. Seite 421 (6.), (7.), (8.)] für irgend einen ausserhalb $\mathfrak{J}'$ construirten Raum $\mathfrak{R}$ folgende Formel:

$$(24.)\ \int_{\mathfrak{R}} \Xi_m D\tau = \int_{\mathfrak{R}} \frac{\mu[2\psi_1(\psi_1 A + \psi_2 B + \psi_3 C) - (\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2)A]}{8\pi} Do, \quad [\mathfrak{R} \text{ ausserh. } \mathfrak{J}'],$$

wo A, B, C die Richtungscosinus der *äusseren* Normale des Elementes Do sind. Dies vorangeschickt, unterscheiden wir jetzt zwei Fälle:

Erster Fall: *Das Element $D\tau$ liegt in $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{J}$ (nicht aber in $\mathfrak{S}$).* Alsdann ist $D\tau$ von homogener Substanz erfüllt, mithin μ im Innenraum des Elementes $D\tau$ *constant;* so dass also in diesem Fall die Formel (23.) übergeht in:

$$(25.)\quad \Xi_m D\tau = \mu\left[\left(\frac{\psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2}{8\pi}\right)_1 + \left(\frac{2\psi_1\psi_2}{8\pi}\right)_2 + \left(\frac{2\psi_1\psi_3}{8\pi}\right)_3\right] D\tau.$$

Der hier in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck ist aber, wie man leicht erkennt [vgl. auf Seite 421 den Uebergang von (9.) zu (10.)] identisch mit *Null.* Somit folgt:

$$(26.)\qquad \Xi_m D\tau = 0.$$

Zweiter Fall: *Das Element $D\tau$ liegt in $\mathfrak{S}$.* Nimmt man für $D\tau$ eines jener scheibenförmigen Elemente, in welche der Raum $\mathfrak{S}$ zerlegbar ist, so erhält man aus (24.) [vgl. auf Seite 421 den Uebergang von (8.) zu (12.)]:

(27.) $$\Xi_m D\tau = \Omega_a Do_a + \Omega_i Do_i,$$

wo Ω_a und Ω_i die Bedeutungen haben:

(α.) $$\Omega_a = \frac{\mu_a[2\psi_1(\psi_1 A + \psi_2 B + \psi_3 C) - (\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2)A]}{8\pi},$$

(β.) $$\Omega_i = (-1)\frac{\mu_i[2\psi_1'(\psi_1' A + \psi_2' B + \psi_3' C) - (\psi_1'^2 + \psi_2'^2 + \psi_3'^2)A]}{8\pi}.$$

Substituirt man diese Werthe (α.), (β.) in (27.), und beachtet man dabei, dass $Do_a = Do_i = Do$ ist, so ergiebt sich sofort:

(28.) $$\Xi_m D\tau = [(f - f')A + (g - g')B + (h - h')C]Do,$$

wo f, g, h, f', g', h' die Bedeutungen haben:

(29.) $$\begin{cases} f = \dfrac{\mu_a(\psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2)}{8\pi}, \\ g = \dfrac{\mu_a(2\psi_1\psi_2)}{8\pi}, \\ h = \dfrac{\mu_a(2\psi_1\psi_3)}{8\pi}, \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{\mu_i(\psi_1'^2 - \psi_2'^2 - \psi_3'^2)}{8\pi}, \\ g' = \dfrac{\mu_i(2\psi_1'\psi_2')}{8\pi}, \\ h' = \dfrac{\mu_i(2\psi_1'\psi_3')}{8\pi}. \end{cases}$$

Diese Resultate (26.) und (28.), (29.) *sind nun leider mit der Poisson'schen Theorie* ***nicht*** *in Einklang, ausser, wenn μ_a und μ_i einander gleich sind.*

Ueber die Specialität: $\mu_a = \mu_i$. — Denkt man sich $\mu_a = \mu_i$, so wird nach wie vor im ersten Fall die Formel (26.) gelten:

(I.) $$\Xi_m D\tau = 0.$$

Gleichzeitig wird man alsdann aber die dem zweiten Fall entsprechenden Formeln (28.), (29.) einer gewissen *Maxwell'schen Transformation* unterwerfen können. [Vgl. Maxwell's Werk, herausgegeben von Weinstein, Bd. 1, 1883, Seite 152—160]. In der That kann man, wenn $\mu_a = \mu_i$ ist, aus den Formeln (29.) die Gleichungen ableiten:

$$8\pi(f-f') = \mu_a[(\psi_1-\psi_1')(\psi_1+\psi_1') - (\psi_2-\psi_2')(\psi_2+\psi_2') - (\psi_3-\psi_3')(\psi_3+\psi_3')]$$
$$8\pi(g-g') = \mu_a[(\psi_2-\psi_2')(\psi_1+\psi_1') + (\psi_2+\psi_2')(\psi_1-\psi_1')],$$
$$8\pi(h-h') = \mu_a[(\psi_3-\psi_3')(\psi_1+\psi_1') + (\psi_3+\psi_3')(\psi_1-\psi_1')].$$

Hieraus folgt, wenn man für die Differenzen $\psi_1 - \psi_1'$, $\psi_2 - \psi_2'$, $\psi_3 - \psi_3'$ die Werthe (21.) substituirt, sofort:

$$2(f-f') = -\mu_a(T)[A(\psi_1+\psi_1') - B(\psi_2+\psi_2') - C(\psi_3+\psi_3')],$$
$$2(g-g') = -\mu_a(T)[B(\psi_1+\psi_1') + A(\psi_2+\psi_2')],$$
$$2(h-h') = -\mu_a(T)[C(\psi_1+\psi_1') + A(\psi_3+\psi_3')].$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen mit A, B, C, und addirt, so ergiebt sich sofort:

$$2[(f-f')A+(g-g')B+(h-h')C] = -\mu_a(T)(\psi_1+\psi_1'),$$

$$\text{d. i.} = -\mu_a(T)\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_a+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_i\right].$$

Dies endlich in (28.) substituirt, erhält man:

$$\text{(II.)} \qquad \Xi_m D\tau = -\mu_a\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_a+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_i\right](T)Do.$$

Diese für die augenblickliche *Specialität:* $\mu_a = \mu_i$ erhaltenen Formeln (I.), (II.) sind offenbar, bis auf den constanten Factor μ_a, mit der Poisson-schen Theorie in bestem Einklange. Mir scheint nun aber, dass Hertz und Helmholtz den Glauben an einen solchen Einklang *ganz allgemein* gehabt haben, und dass sie zu diesem Glauben auf dem hier eingeschlagenen Wege gelangt sind.

In Wirklichkeit passt jedoch der hier eingeschlagene Weg nur allein für die Specialität: $\mu_a = \mu_i$; *und diese Specialität ist noch dazu ziemlich bedeutungslos.*

Hat nämlich der Magnetisirungscoefficient μ für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ ein und denselben constanten Werth, so wird er diesen selben constanten Werth auch in der betreffenden Uebergangsschicht $\mathfrak{S}$ besitzen; so dass alsdann also unser Schema (f.) Seite 428 die Gestalt annehmen würde:

$$\frac{\mathfrak{J} \quad \mathfrak{S} \quad \mathfrak{A} \quad \mathfrak{S}' \quad \mathfrak{J}'}{\mu = \text{Const.}}$$

Demgemäss würde es alsdann keinen Unterschied machen, ob das betrachtete Raumelement $D\tau$ in $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{S}$ liegt. Und es würden alsdann also die diesen beiden Fällen entsprechenden Formeln (I.) und (II.), wie solches auch direct nachweisbar ist, *beide* in $\Xi_m D\tau = 0$ sich verwandeln. D. h. es würden alsdann auf die Elemente der Uebergangschicht $\mathfrak{S}$ ebensowenig ponderomotorische Kräfte ausgeübt werden, wie auf die Elemente von $\mathfrak{J}$ oder $\mathfrak{A}$.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Die Hertz-Helmholtz'sche Theorie ist, hinsichtlich der ponderomotorischen Kräfte, mit der Poisson'schen Theorie nur für die Specialität: $\mu_a = \mu_i$ *in Einklang, also nur dann in Einklang, wenn solche ponderomotorische Kräfte überhaupt nicht vorhanden sind.*

Die Specialität: $\mu_a = \mu_i$ ist also ziemlich bedeutungslos. Abstrahirt man nun aber von dieser Specialität, so findet zwischen den Resultaten (26.) und (28.), (29.) der Hertz-Helmholtz'schen Theorie und zwischen den betreffenden Formeln der Poisson'schen Theorie eine grosse Verschiedenheit statt. *Und diese Verschiedenheit würde als ein entscheidendes Argument gegen die Hertz-Helmholtz'sche Theorie anzusehen sein, wenn man mit voller Sicherheit wüsste, dass die Poisson'sche Theorie mit der Wirklichkeit in vollem Einklange sei.*

Achtzehnter Abschnitt.

Das Helmholtz'sche Minimalprincip (1892—1894).
Dritter Theil: Anwendung der betreffenden Theorie auf in Bewegung begriffene Körper.

Wir werden in diesem Abschnitt die Helmholtz'sche Theorie auf diejenigen ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte in Anwendung bringen, welche durch *elektrische Ströme* hervorgebracht werden.

Dabei werden wir uns beschränken auf den Fall *annularer* elektrischer Ströme. Aber selbst für diesen Fall werden wir zu Resultaten gelangen, die mit den betreffenden Formeln der Ampère'schen respective der F. Neumann'schen Theorie nur unter gewissen im Allgemeinen wohl recht bedenklichen *Vernachlässigungen* in Einklang sind.

§ 1.

Ueber gewisse Vernachlässigungen.

Nach wie vor wollen wir die substantiellen Geschwindigkeitscomponenten α, β, γ, die elektrischen Strömungen u, v, w, die elektrischen Zustandscomponenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, so wie auch die Coefficienten $\lambda, \mu, \varepsilon$ *im Euler'schen Sinne* als Functionen von x, y, z, t uns denken. Alsdann gelten z. B. für ε und λ nach Seite 362 (P.), (Q.) die Differentialgleichungen:

$$\text{(A.)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\beta + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\gamma = 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\gamma = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, dass eine analoge Differentialgleichung auch für den Quotienten $\zeta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ gilt:

$$\text{(B.)} \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\gamma = 0, \quad \text{wo } \zeta = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Auch ist nach Seite 362 (P.), (Q.): $\Delta\varepsilon = 0$, $\Delta\lambda = 0$, mithin:

$$\text{(C.)} \qquad \Delta\zeta \text{ ebenfalls } = 0.$$



Dies vorangeschickt, wenden wir uns jetzt zu den Ausdrücken: $\Delta\mathfrak{X}$, $\Delta\mathfrak{Y}$, $\Delta\mathfrak{Z}$. Nach Seite 370 (13.) ist:

$$\text{(D.)}\qquad \frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z})}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right);$$

analoge Formeln gelten für $\Delta\mathfrak{Y}$ und $\Delta\mathfrak{Z}$. Nimmt man nun an, dass keine der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte (X', Y', Z') vorhanden seien, so ist nach Seite 373 (5.):

$$\text{(E.)}\qquad \mathfrak{X} = \zeta u,\quad \mathfrak{Y} = \zeta v,\quad \mathfrak{Z} = \zeta w,\quad \text{wo } \zeta = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Substituirt man diese Werthe (E.) auf der rechten Seite der Formel (D.), so erhält man sofort:

$$\frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \zeta\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\beta u - \alpha v)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma u - \alpha w)}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$
$$+ u\frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\beta u - \alpha v)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + (\gamma u - \alpha w)\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \alpha\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y} + w\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).$$

Die letzte Zeile reducirt sich auf:

$$u\left[\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right],$$

und hat also, nach (B.), den Werth *Null*. Somit ergiebt sich [indem man für ζ seine in (B.) angegebene Bedeutung substituirt] folgende Formel:

$$\text{(F.)}\qquad \frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\varepsilon}{\lambda}\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\beta u - \alpha v)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma u - \alpha w)}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].$$

Analoge Formeln gelten offenbar für $\Delta\mathfrak{Y}$ und $\Delta\mathfrak{Z}$.

Wollen wir nun in den folgenden Paragraphen, auf Grund der hier betrachteten Helmholtz'schen Theorie, zu Resultaten gelangen, die mit den allgemein als richtig anerkannten Formeln der älteren Theorie einigermassen in Einklang sind, so werden wir gezwungen sein, die Grössen

$$\text{(G.)}\qquad \frac{\Delta\mathfrak{X}}{dt},\quad \frac{\Delta\mathfrak{Y}}{dt},\quad \frac{\Delta\mathfrak{Z}}{dt}$$

als sehr klein anzusehen, und zu vernachlässigen.

Wie weit und in welchen Fällen eine solche Vernachlässigung wirklich statthaft sei, soll im Folgenden nicht näher discutirt werden. Damit man indessen von diesen vernachlässigten Grössen (G.) eine deutliche Anschauung habe, sind die Werthe derselben in (D.) und (F.) *in extenso* angegeben. Die Werthe (D.) gelten ganz allgemein. Die Werthe (F.) hingegen beziehen sich auf den speciellen Fall, dass keine der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte vorhanden sind.



§ 2.

Ueber die ponderomotorischen Wirkungen, welche elektrische Ströme auf einander ausüben.

Die den Weltraum erfüllende Substanz sei in *beliebiger Bewegung* begriffen, während das der Betrachtung zu Grunde zu legende Axensystem $[x, y, z]$ in *absoluter Ruhe* gedacht werden soll. Nach wie vor nehmen wir an, dass die Substanz in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur sei. Ueberdies aber wollen wir voraussetzen, dass ihr Magnetisirungscoefficient μ allenthalben *ein und denselben* Werth habe:

$$\mu = \text{Const.} \tag{1.}$$

Im Allgemeinen werden in der den Weltraum erfüllenden Substanz irgend welche von Augenblick zu Augenblick sich ändernde elektrische und magnetische Zustände, mithin z. B. auch irgend welche elektrische Strömungen (u, v, w) vorhanden sein. Auch mögen irgend welche der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte (X', Y', Z') vorhanden gedacht werden.

Jene elektrischen Strömungen (u, v, w) seien *annularer Natur*. Es mag nämlich vorausgesetzt werden, dass die u, v, w stets und allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.}$$

Genüge leisten, und dass sie überdies im Unendlichen überall $= 0$ sind. Dabei sei bemerkt, dass wir diese Voraussetzung (2.) nur machen, um die in der Theorie üblichen Wege überhaupt verfolgen zu können, *und dass diese Voraussetzung doch eigentlich nur dann acceptabel erscheint, wenn man die elektrische Materie als* incompressibel *betrachtet*, *was dann aber als eine besondere Hypothese auszusprechen sein würde.*

Bezeichnet man den im Augenblick t in irgend einem Punkte (x_1, y_1, z_1) vorhandenen magnetischen Zustand mit $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{N}_1)$, so wird z. B. für $\mathfrak{L}_1$ die allgemeine Formel Seite 398 $(\alpha.)$ gelten. Diese Formel aber gewinnt mit Rücksicht auf (1.), und falls man überdies *die im vorigen Paragraph besprochenen Vernachlässigungen* eintreten lässt, folgende Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right)\frac{D\tau}{r} + A\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\int \frac{w\,D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{v\,D\tau}{r}\right). \tag{3.}$$

Dieser Ausdruck (3.) reducirt sich mittelst der bekannten allgemeinen Gleichung (15.) Seite 376 sofort auf:

$$(4.)\qquad \mathfrak{L}_1 = A\mu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{w\,D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{v\,D\tau}{r}\right);$$

so dass man also zu folgenden Formeln gelangt:

$$(5.)\quad \mathfrak{L}_1 = A\mu\left(\frac{\partial H_1}{\partial y_1} - \frac{\partial G_1}{\partial z_1}\right),\quad \mathfrak{M}_1 = A\mu\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_1}\right),\quad \mathfrak{N}_1 = A\mu\left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\right),$$

wo alsdann F_1, G_1, H_1 die bekannten Bedeutungen haben:

$$(6.)\qquad F_1 = \int\frac{u\,D\tau}{r},\qquad G_1 = \int\frac{v\,D\tau}{r},\qquad H_1 = \int\frac{w\,D\tau}{r},$$

wo die Integrationen, ebenso wie in (3.), (4.), ausgedehnt zu denken sind über alle Volumelemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes.

Mittelst der Formeln (5.), (6.) bestimmen sich die durch die gegebenen u, v, w hervorgebrachten magnetischen Zustände $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Um nun ferner die ponderomotorischen Kräfte zu ermitteln, welche die betrachtete Substanz, vermöge dieser magnetischen Zustände, auf ihre einzelnen Elemente ausüben wird, sei zuvörderst folgende aus (6.) entspringende Formel notirt:

$$(7.)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial z_1} = \int\left(u\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} + v\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} + w\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)D\tau.$$

Die rechte Seite dieser Formel ist offenbar auch so darstellbar:

$$(-1)\int\left(u\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + v\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + w\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)D\tau,$$

oder auch so:

$$-\int\left(\frac{\partial\frac{u}{r}}{\partial x} + \cdots\right)D\tau + \int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)D\tau,$$

oder endlich auch so:

$$\int[u\cos(n, x) + \cdots]\,\frac{Do}{r} + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \cdots\right)\frac{D\tau}{r},$$

das *erste* Integral ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do einer den unendlichen Raum umgrenzenden unendlich fernen Fläche; dabei ist n die auf Do errichtete innere Normale. Nun sollen aber u, v, w [nach der bei (2.) genannten Voraussetzung] im Unendlichen überall $= 0$ sein. Folglich ist dieses *erste* Integral $= 0$. Das *zweite* Integral ist aber [nach (2.)] ebenfalls $= 0$. Somit reducirt sich die Formel (7.) auf:

$$(8.)\qquad \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial z_1} = 0.$$

Ferner folgt aus (5.):

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial z_1} = A\mu \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \right) \right],$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial z_1} = A\mu \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} + \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \right) - \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} \right) \right],$$

also mit Hinblick auf (8.) und (6.):

$$(9.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial z_1} = 4\pi A \mu u_1. \quad \text{Ebenso erhält man:} \\ \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial z_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x_1} = 4\pi A \mu v_1, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial y_1} = 4\pi A \mu w_1. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen (9.) sei noch hinzugefügt die bekannte allgemeine Gleichung Seite 376 (15.):

$$(10.) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial z_1} = 0.$$

Beiläufig sei übrigens bemerkt, dass man die Formeln (9.) direct hätte ableiten können aus den allgemeinen Gleichungen (A.) Seite 398, aber ebenfalls nur unter Anwendung der im vorigen Paragraph besprochenen Vernachlässigungen.

Die betrachtete Substanz wird nun, vermöge ihres magnetischen Zustandes, auf das augenblicklich im Raumelement $D\tau$ enthaltene Substanzelement eine gewisse ponderomotorische Kraft ($\Xi^m D\tau, \mathsf{H}_m D\tau, Z_m D\tau$) ausüben. Und zwar gilt für die Componente $\Xi_m D\tau$ die auf Seite 396 angegebene allgemeine Formel. Diese Formel aber ist, mit Rücksicht auf (1.), folgendermassen zu schreiben:

$$(11.) \quad \Xi_m D\tau = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\left(\frac{\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}^2}{2} \right)_1 + \left(\frac{2\,\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{2} \right)_2 + \left(\frac{2\,\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{2} \right)_3 \right] D\tau.$$

Der hier in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck hat offenbar den Werth:

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3) + \mathfrak{M}(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_1) + \mathfrak{N}(\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{N}_1),$$

d. i. den Werth:

$$\mathfrak{L} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} \right) + \mathfrak{M} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) + \mathfrak{N} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} \right).$$

Dieser Werth aber gewinnt mit Hinblick auf (9.), (10.) die Gestalt:

$$0 + 4\pi A \mu (-\mathfrak{M} w + \mathfrak{N} v);$$

so dass also die Formel (11.) übergeht in:

$$(12.) \quad \Xi_m D\tau = A(\mathfrak{N} v - \mathfrak{M} w) D\tau.$$

Substituirt man endlich hier für $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ die aus (5.) entspringenden Werthe, so erhält man:

$$(13.)\qquad \Xi_m D\tau = A^2\mu\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)v + \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial z}\right)w\right]D\tau,$$

eine Formel, die, abgesehen von dem constanten Factor μ, mit der älteren Theorie, nämlich mit der Formel (19.) Seite 309, in Einklang ist. Somit gelangt man zu folgendem

Resultat. — *Die neuere vom Helmholtz'schen Minimalprincip ausgehende Theorie ist hinsichtlich der ponderomotorischen Wirkungen, welche annulare elektrische Ströme aufeinander ausüben, mit der F. Neumann-schen Theorie im Wesentlichen (nämlich abgesehen vom Factor μ) in Einklang; jedoch nur in solchen Fällen, in denen die auf Seite 437 genannten Vernachlässigungen zulässig sind, und auch nur dann, wenn man den Magnetisirungscoefficienten μ als allenthalben constant vorauszusetzen berechtigt ist.*

§ 3.

Ueber die auf einen linearen Ring ausgeübten elektromotorischen Wirkungen.

Von Neuem wollen wir annehmen, dass die den Weltraum erfüllende Substanz in *beliebiger Bewegung* begriffen sei, während das Axensystem $[x, y, z]$ ein *absolut ruhendes* sein soll. Zu dieser Substanz, die in all' ihren Theilen nur *temporär*-magnetischer Natur sein soll, gehöre nun unter Anderem *ein von einer isolirenden Hülle umschlossener starrer homogener linearer Drahtring.*

Im Ringe wie auch in allen übrigen Theilen der den Weltraum erfüllenden Substanz werden im Allgemeinen irgend welche von Augenblick zu Augenblick sich ändernde elektrische und magnetische Zustände, mithin auch irgend welche elektrische Strömungen (u, v, w) vorhanden sein. Auch mögen irgend welche der Theorie fremden elektromotorischen Kräfte (X', Y', Z') vorhanden gedacht werden; so dass also für die in irgend einem Punkt (x, y, z) vorhandene totale elektromotorische Kraft $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ die Formeln (4.) Seite 373 gelten:

$$(1.)\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + X', \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + Y', \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + Z',$$

wo die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die elektrischen Zustandscomponenten der Substanz an der Stelle (x, y, z) vorstellen, während ε den dortigen Werth des Dielektricitätscoefficienten bezeichnet. *Wir stellen uns nun die Aufgabe, die von diesen Kräften $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ auf jenen Drahtring während der Zeit dt ausgeübte elektromotorische Arbeit $d\mathfrak{L}$ näher zu bestimmen.*



Diese Arbeit $d\mathfrak{L}$ hat [nach Seite 64 (4.)] den Werth:

$$(2.)\qquad d\mathfrak{L} = (dt)\int(\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w)\,D\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\tau$ des gegebenen Ringes*). Da der Ring linear und von einer isolirenden Hülle umgeben ist, so werden die in ihm vorhandenen elektrischen Strömungen (u, v, w) durchweg in der Richtung des Ringes stattfinden. Denkt man sich also das Ringelement $D\tau$ von zwei aufeinander folgenden senkrechten Querschnitten des Ringes begrenzt, und die Länge dieses Elementes mit Ds, ferner die rechtwinkligen Componenten von Ds mit Dx, Dy, Dz bezeichnet, so wird man [vgl. Seite 66 (12.)] setzen können:

$$(3.)\qquad uD\tau = JDx,\quad vD\tau = JDy,\quad wD\tau = JDz,$$

wo alsdann J die im Elemente vorhandene Stromstärke vorstellt. Substituirt man diese Werthe (3.) in (2.), so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad d\mathfrak{L} = (dt)\int J(\mathfrak{A}\,Dx + \mathfrak{B}\,Dy + \mathfrak{C}\,Dz).$$

Wir wollen jetzt annehmen, nach Ablauf irgend welcher Zeit würde die Stromstärke J des Ringes eine *gleichförmige*, d. h. eine an allen Stellen des Ringes gleich starke; so dass sie fernerhin nur noch eine Function der Zeit ist. Alsdann geht die Formel (4.) über in:

$$(5.)\qquad d\mathfrak{L} = (J\,dt)\int(\mathfrak{A}\,Dx + \mathfrak{B}\,Dy + \mathfrak{C}\,Dz).$$

Substituirt man hier für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Werthe (1.), so erhält man:

$$(6.)\qquad d\mathfrak{L} = (J\,dt)\,\Psi + (J\,dt)\int(X'Dx + Y'Dy + Z'Dz),$$

wo der letzte Theil als die von den Kräften X', Y', Z' ausgeübte elektromotorische Arbeit zu bezeichnen ist; während das Ψ im ersten Theile die Bedeutung hat:

$$(7.)\qquad \Psi = \int\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\,Dx + \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\,Dy + \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\,Dz\right).$$

Hier in diesem Ausdrucke (7.) könnte man übrigens den Divisor ε auch *vor* das Integralzeichen setzen. Denn der Ring soll homogen sein; so dass also der Dielektricitätscoefficient ε für alle Punkte des Ringes ein und denselben constanten Werth besitzt.

*) Es kann wohl kein Missverständniss hervorbringen, dass wir im gegenwärtigen Paragraph den Buchstaben $\mathfrak{L}$ in zwei ganz verschiedenen Bedeutungen gebrauchen, nämlich einerseits in der Arbeit $d\mathfrak{L}$ (2.), andrerseits aber auch zur Bezeichnung der einen magnetischen Zustandscomponente, wie z. B. weiterhin in (9.), (10.), u. s. w.

Mittelst des Stokes'schen Theorems [Seite 4 (B.)] geht der Ausdruck (7.) über in:

$$\Psi = \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} \right) a + \cdots \right] Do, \tag{8.}$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Elemente Do irgend einer vom Ringe umgrenzten Fläche; dabei sind a, b, c die Richtungscosinus der auf der positiven Seite von Do errichteten Normale. Dieser Ausdruck (8.) kann, falls man der allgemeinen Gleichungen (Γ.) Seite 400 sich bedient, auch so geschrieben werden:

$$\Psi = -A \int \left(\frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} a + \frac{\Delta \mathfrak{M}}{dt} b + \frac{\Delta \mathfrak{N}}{dt} c \right) Do. \tag{9.}$$

Wir wollen jetzt die vom Ringe umgrenzte Fläche o, über deren Elemente Do die Integration (9.) sich ausdehnt, *fortdauernd aus ein und denselben substantiellen Punkten bestehend* uns vorstellen; so dass sie also, ihrer Lage und Gestalt nach, im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick sich ändern wird*). Die Grössen Do, a, b, c hängen dann ab von der augenblicklichen Lage der betreffenden substantiellen Punkte. Jedenfalls aber werden die $\Delta(Do)$, Δa, Δb, Δc alle $= 0$ sein. [Vgl. Seite 129 (20.) und Seite 360 (A.)]. Demgemäss kann man die Formel (9.) auch so schreiben:

$$\Psi = -A \int \frac{\Delta[(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c) Do]}{dt}. \tag{10.}$$

Bekanntlich ist: $d = \delta + \Delta$, d. i. $\Delta = d - \delta$, also z. B.:

$$\Delta[(\mathfrak{L}a + \cdots) Do] = d[(\mathfrak{L}a + \cdots) Do] - \delta[(\mathfrak{L}a + \cdots) Do].$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist aber bekanntlich stets $= 0$ [vgl. Seite 378 (21.)]; so dass also die Gleichung sich reducirt auf:

$$\Delta[(\mathfrak{L}a + \cdots) Do] = d[(\mathfrak{L}a + \cdots) Do].$$

Demgemäss geht die Formel (10.) über in:

$$\Psi = -A \int \frac{d[(\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c) Do]}{dt}, \tag{11.}$$

wofür man offenbar auch schreiben kann:

$$\Psi = -A \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c) Do. \tag{12.}$$

Dies in (6.) substituirt, ergiebt sich:

$$d\mathfrak{L} = -AJ d\Omega + (J dt) \int (X' Dx + Y' Dy + Z' Dz), \tag{13.}$$

*) Diese Vorstellung, deren man übrigens nur für das gerade betrachtete unendlich kleine Zeitelement dt bedarf, ist wohl dieselbe, deren auch Hertz sich bedient hat. [Vgl. Hertz' Ges. W., Bd. 2, Seite 268 und 270].

wo alsdann Ω die Bedeutung hat:

$$(14.)\qquad \Omega = \int (\mathfrak{L}a + \mathfrak{M}b + \mathfrak{N}c)\, Do.$$

Diese Grösse Ω wird von Hertz [Ges. W., Bd. 2, Seite 268, 269] *die Zahl der durch den Ring hindurchgehenden magnetischen Zustandslinien* (*Kraftlinien*) genannt. Die dortigen Hertz'schen Rechnungen sind scheinbar etwas complicirter als die unsrigen, stimmen aber mit den unsrigen im Wesentlichen vollständig überein. Statt Ω hat Hertz den Buchstaben ζ angewendet.

Um diese Grösse Ω einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen, benutzen wir für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die allgemeine Formel Seite 398 (α.). Nach jener Formel wird der Werth $\mathfrak{L}_1$, den $\mathfrak{L}$ in irgend einem Punkte (x_1, y_1, z_1) hat, *unter Anwendung der auf Seite 437 genannten Vernachlässigungen*, folgendermassen lauten:

$$\frac{\mathfrak{L}_1}{\mu_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r}$$
$$+ A\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\int \frac{w\,D\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{v\,D\tau}{r}\right).$$

Demgemäss ergiebt sich:

$$(15.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_1 = -\mu_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + A\mu_1\left(\dfrac{\partial H_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial G_1}{\partial z_1}\right), \\ \mathfrak{M}_1 = -\mu_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + A\mu_1\left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} - \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\right), \\ \mathfrak{N}_1 = -\mu_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial z_1} + A\mu_1\left(\dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\right), \end{cases}$$

wo alsdann ψ_1, F_1, G_1, H_1 die Bedeutungen haben:

$$(16.)\qquad \psi_1 = \int \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{L}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{M}}{\mu} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\frac{D\tau}{r},$$

$$(17.)\qquad F_1 = \int \frac{u\,D\tau}{r}, \quad G_1 = \int \frac{v\,D\tau}{r}, \quad H_1 = \int \frac{w\,D\tau}{r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente $D\tau$ des ganzen unendlichen Raumes. Der Ausdruck ψ_1 (16.) ist offenbar [vgl. (IV.) Seite 413] zu bezeichnen als das Potential des im ganzen unendlichen Raum enthaltenen freien Magnetismus, dasselbe gebildet gedacht für den Punkt (x_1, y_1, z_1).

Substituirt man in (14.) für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die aus (15.) entspringenden Werthe, so erhält man:

$$(18.)\quad \Omega = -\int \mu\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}a + \frac{\partial \psi}{\partial y}b + \frac{\partial \psi}{\partial z}c\right)Do$$
$$+ A\int \mu\left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)a + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)b + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)c\right]Do.$$

Um diesen Ausdruck weiter behandeln zu können, *wollen wir jetzt annehmen*, dass der Magnetisirungscoefficient μ im ganzen unendlichen Raum überall ein und denselben Werth habe:

$$(19.) \qquad \mu = \text{Const.}$$

Alsdann wird sich die Formel (16.) [unter Anwendung der allgemeinen Gleichung Seite 376 (15.)], verwandeln in $\psi_1 = 0$. Es wird mithin ψ allenthalben $= 0$ sein; so dass also die Formel (18.) übergeht in:

$$(20.) \quad \Omega = A\mu \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) a + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) b + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) c \right] Do;$$

wofür man unter Anwendung des Stokes'schen Theorems [Seite 4 (B.)] auch schreiben kann:

$$(21.) \qquad \Omega = A\mu \int (F\,Dx + G\,Dy + H\,Dz),$$

die Integration hinerstreckt über alle Elemente $Ds(Dx, Dy, Dz)$ des gegebenen linearen Ringes.

Schon vorhin, beim Uebergange von (4.) zu (5.), haben wir auf die Betrachtung derjenigen Zeit uns beschränkt, während welcher die im Ringe vorhandene Stromstärke J eine *gleichförmige* ist; so dass alsdann z. B. in den Formeln (3.):

$$(\text{f.}) \qquad J\,Dx = u\,D\tau, \qquad J\,Dy = v\,D\tau, \qquad J\,Dz = w\,D\tau$$

der Factor J eine blosse Function der Zeit ist. Substituirt man also in (21.) die aus diesen Formeln (f.) für Dx, Dy, Dz entspringenden Werthe, so ergiebt sich sofort:

$$(22.) \qquad \Omega = \frac{A\mu}{J} \int (Fu + Gv + Hw)\, D\tau.$$

Substituirt man endlich hier für F, G, H die aus (17.) ersichtlichen Werthe:

$$F = \int \frac{u_1\, D\tau_1}{r}, \qquad G = \int \frac{v_1\, D\tau_1}{r}, \qquad H = \int \frac{w_1\, D\tau_1}{r},$$

so erhält man:

$$(23.) \qquad \Omega = \frac{A\mu}{J} \iint \frac{uu_1 + vv_1 + ww_1}{r}\, D\tau\, D\tau_1,$$

wo alsdann die eine Integration, ebenso wie in (22.), über alle Elemente $D\tau$ des *gegebenen Ringes*, die andere aber über sämmtliche Elemente $D\tau_1$ des *ganzen unendlichen Raumes* auszudehnen ist.

Wir geben jetzt der Formel (23.) die Gestalt:

$$(24.) \quad \Omega = -\frac{\mu}{A} \frac{P}{J}, \quad \text{wo: } P = -A^2 \iint \frac{uu_1 + vv_1 + ww_1}{r}\, D\tau\, D\tau_1.$$

Dies in (13.) substituirt, ergiebt sich schliesslich:

$$(25.) \qquad d\Omega = \mu J\, d\left(\frac{P}{J}\right) + (J\,dt) \int (X'\,Dx + Y'\,Dy + Z'\,Dz).$$

Die von allen im ganzen unendlichen Raum vorhandenen Strömen während der Zeit dt auf den gegebenen Ring ausgeübte elektromotorische Arbeit wird also (falls man von den der Theorie fremden Kräften X', Y', Z' abstrahirt) den Werth haben:

$$\mu J d\left(\frac{P}{J}\right), \tag{26.}$$

wo $d\left(\frac{P}{J}\right)$ den Zuwachs von $\frac{P}{J}$ während der Zeit dt vorstellt. Sind nun jene im ganzen unendlichen Raum vorhandenen Ströme *annularer Natur*, so ist der Ausdruck P (24.) offenbar nichts Andres, als das F. Neumann'sche Potential all' jener Ströme auf den im gegebenen Ringe vorhandenen Strom J; so dass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Resultat. — *Die neuere vom Helmholtz'schen Minimalprincip ausgehende Theorie ist, hinsichtlich der elektromotorischen Wirkungen, welche annulare elektrische Ströme aufeinander ausüben, mit der F. Neumann'schen Theorie im Wesentlichen (nämlich abgesehen vom Factor μ) in Einklang; jedoch nur in solchen Fällen, in denen die auf Seite 437 genannten Vernachlässigungen zulässig sind, und auch nur dann, wenn man den Magnetisirungscoefficienten μ als allenthalben constant vorauszusetzen berechtigt ist.*

Bemerkung. — Die betreffenden Hertz'schen Betrachtungen [Ges. W., Bd. 2, Seite 270] sind sehr schwer verständlich. Sollte dort nicht ein höchst störender Druckfehler vorliegen, nämlich in der funfzehnten Zeile, statt „magnetische Polarisation", zu lesen sein: „elektrische Polarisation"? Diese Leseart als richtig acceptirt, ist alsdann in den dortigen Hertz'schen Darlegungen enthalten, dass die Aenderungen Δ dieser elektrischen Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gleich Null sein sollen, respective vernachlässigt werden sollen; was in gutem Einklang sein würde mit jenen Vernachlässigungen, von denen soeben (bei Aussprache des Resultates) die Rede war.

§ 4.

Ueber die in irgend einem Punkt vorhandene elektromotorische Kraft.

Wir halten fest an den Vorstellungen und Voraussetzungen des vorigen Paragraphs. Nur wollen wir jetzt, statt des linearen Ringes, irgend einen beliebigen *Punkt* (x_1, y_1, z_1) der den ganzen unendlichen Raum erfüllenden Substanz in Betracht ziehen. Die in diesem Punkt vorhandenen elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ haben alsdann nach (1.) die Werthe:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} + X_1', \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{Y}_1}{\varepsilon_1} + Y_1', \quad \mathfrak{C}_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\varepsilon_1} + Z_1'. \tag{27.}$$

Ueberdies ist nach der allgemeinen Gleichung (γ.) Seite 400:

$$(28.)\qquad \frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\frac{D\tau}{r}$$
$$-\frac{A}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{D\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial z_1}\int\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{D\tau}{r}\right),$$

wofür zur Abkürzung geschrieben werden mag:

$$(29.)\qquad \frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}-\frac{A}{4\pi}\Phi_1;$$

so dass also φ_1 das Newton'sche Potential aller im ganzen unendlichen Raum enthaltenen *freien Elektricität* in Bezug auf den Punkt (x_1, y_1, z_1) vorstellen wird [wie solches aus (II.) Seite 413 sofort ersichtlich ist].

Es handelt sich nun darum, den mit Φ_1 bezeichneten Ausdruck einer gewissen Transformation zu unterwerfen. Zuvörderst ergiebt sich aus (28.), (29.) sofort:

$$(30.)\qquad \Phi_1 = \int\left(\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}-\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\frac{D\tau}{r}.$$

Diese Formel kann man offenbar auch so schreiben:

$$\Phi_1 = \int\left(-\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\frac{D\tau}{r},$$

oder auch so: $\Phi_1 = \int\left\{-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\frac{1}{r}\right)\right\}D\tau$

$$+\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\right)D\tau.$$

Hieraus folgt, unter Anwendung einer gewissen Green'schen Transformation und unter gleichzeitiger Anwendung eines bekannten Commutationssatzes [Seite 365 (24.)]:

$$\Phi_1 = \int\left(\frac{\Delta\mathfrak{N}}{dt}\cos(n,y)-\frac{\Delta\mathfrak{M}}{dt}\cos(n,z)\right)\frac{Do}{r}$$
$$+\int\frac{\Delta}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}\right)\frac{D\tau}{r},$$

wo alsdann das erste Integral ausgedehnt zu denken ist über alle Elemente Do einer den ganzen unendlichen Raum umgrenzenden unendlich fernen Fläche; dabei bezeichnet n die auf Do errichtete innere Normale. Dieses Integral wird also $= 0$ sein; denn wir nehmen durchweg an, dass die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ [ebenso wie die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und u, v, w] in den unendlichen fernen Theilen des Raumes fortdauernd $= 0$ bleiben. Somit ergiebt sich:

$$\Phi_1 = \int\frac{\Delta}{dt}\left(\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z}\right)\frac{D\tau}{r}.$$

Nach wie vor betrachten wir das $D\tau$ als ein völlig unveränderliches festes Raumelement. Folglich ist z. B.: $\Delta(D\tau) = 0$. Andrerseits aber ist [vgl. Seite 129 (20.) und Seite 360 (A.)] auch $\Delta r = 0$. Die letzte Formel kann daher folgendermassen geschrieben werden:

$$\Phi_1 = \frac{\Delta}{dt}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right)\frac{D\tau}{r}. \tag{31.}$$

Wir bedienen uns jetzt der allgemeinen Gleichungen (A.) Seite 398. Da, nach unserer schon in (19.) gemachten Voraussetzung, μ allenthalben constant sein soll, so folgt aus jenen Gleichungen sofort:

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} = A\mu\left(4\pi u + \frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt}\right).$$

Und hieraus ergiebt sich *unter Anwendung der auf Seite 437 genannten Vernachlässigungen:*

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} = A\mu \cdot 4\pi u;$$

so dass also die Formel (31.) die Gestalt gewinnt:

$$\Phi_1 = 4\pi A\mu\frac{\Delta}{dt}\int\frac{u\,D\tau}{r}. \tag{32.}$$

Dies in (29.) substituirt, ergiebt sich:

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - A^2\mu\frac{\Delta}{dt}\int\frac{u\,D\tau}{r}. \tag{33.}$$

Und dies endlich in (27.) substituirt, erhält man:

$$\mathfrak{A}_1 = X_1' - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} - A^2\mu\frac{\Delta}{dt}\int\frac{u\,D\tau}{r}. \tag{34.}$$

Die rechte Seite dieser Formel besteht aus drei Theilen. Der erste Theil rührt her von den der Theorie fremden Kräften. Der zweite Theil rührt her von aller überhaupt vorhandenen freien Elektricität. Endlich rührt der dritte Theil her von den vorhandenen elektrischen Strömen. Bezeichnet man diesen letzten Theil mit $\mathfrak{A}_1^*$, so gelangt man zu folgendem

Satz. — *Die neuere vom Helmholtz'schen Minimalprincip ausgehende Theorie liefert für die von* annularen *elektrischen Strömen* (u, v, w) *in irgend einem Punkt* (x_1, y_1, z_1) *hervorgebrachte elektromotorische Kraft* $(\mathfrak{A}_1^*, \mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{C}_1^*)$ *folgende Formeln:*

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_1^* = -A^2\mu\dfrac{\Delta}{dt}\displaystyle\int\frac{u\,D\tau}{r}, \\ \mathfrak{B}_1^* = -A^2\mu\dfrac{\Delta}{dt}\displaystyle\int\frac{v\,D\tau}{r}, \\ \mathfrak{C}_1^* = -A^2\mu\dfrac{\Delta}{dt}\displaystyle\int\frac{w\,D\tau}{r}, \end{cases} \tag{35.}$$

jedoch nur in solchen Fällen, in denen die auf Seite 437 genannten Vernachlässigungen zulässig sind, und auch nur dann, wenn man den Magnetisirungscoefficienten μ als allenthalben constant vorauszusetzen berechtigt ist.

Bemerkung. — Will man die auf einen linearen Ring ausgeübte elektromotorische Arbeit (5.):

$$d\mathfrak{L} = (J\,dt)\int(\mathfrak{A}\,Dx + \mathfrak{B}\,Dy + \mathfrak{C}\,Dz)$$

berechnen, und bedient man sich zu diesem Zweck der durch (34.) für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ angedeuteten Werthe, so gelangt man zurück zu der schon in (25.) gefundenen Formel; — was hier weiter auszuführen überflüssig sein würde.

Specialfall. — Denkt man sich einen homogenen linearen Ring von einem elektrischen Strom durchflossen, dessen Stärke J eine blosse Function der Zeit ist, so wird, zufolge der Formeln (3.),

$$\int \frac{u\,D\tau}{r} = J\int\frac{Dx}{r}$$

werden. Und hieraus ergiebt sich sofort:

$$\frac{\Delta}{dt}\int\frac{u\,D\tau}{r} = \frac{dJ}{dt}\int\frac{Dx}{r}.$$

Dies in (35.) substituirt, gelangt man zu folgendem

Resultat. — *Ist ein linearer Stromring gegeben, dessen Stromstärke J eine blosse Function der Zeit ist, so werden die von diesem Ringe in irgend einem Punkt (x_1, y_1, z_1) hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{B}_1^*$, $\mathfrak{C}_1^*$, zufolge der neueren vom Helmholtz'schen Minimalprincip ausgehenden Theorie, die Werthe haben:*

$$(36.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1^* = -A^2\mu\dfrac{dJ}{dt}\displaystyle\int\frac{Dx}{r}, \\ \mathfrak{B}_1^* = -A^2\mu\dfrac{dJ}{dt}\displaystyle\int\frac{Dy}{r}, \\ \mathfrak{C}_1^* = -A^2\mu\dfrac{dJ}{dt}\displaystyle\int\frac{Dz}{r}, \end{cases}$$

jedoch nur in solchen Fällen, in denen die auf Seite 437 genannten Vernachlässigungen zulässig sind, und auch nur dann, wenn man den Magnetisirungscoefficienten μ als allenthalben constant anzusehen berechtigt ist.

Dieses Resultat zeigt gegenüber dem betreffenden Satz der älteren Theorie [*Seite 314* (13.)] *einen grossen Unterschied.*

Uebrigens fallen die vorzugsweise den Unterschied ausmachenden [auf Seite 314 mit L, M, N behafteten] Glieder fort, sobald man die elektromotorische Einwirkung eines *in sich zurücklaufenden Solenoids* zu berechnen sucht; so dass man also [vgl. die Untersuchungen Seite 314 bis 319] für ein solches Solenoid wiederum zu den auf Seite 319 (28.) angegebenen Formeln gelangt, nur $A\mu$ statt A gesetzt. Hieraus folgt weiter, dass jenes für die ältere Theorie geltende Theorem Seite 321:

(37.) $\left\{\begin{array}{l}\end{array}\right.$ *dass die elektromotorischen Einwirkungen eines gleichförmigen Magnetfeldes, trotz Angabe seiner Richtung und Intensität, im Allgemeinen noch völlig* **unbekannt** *seien,*

auch noch fortbesteht für die neuere Theorie.

§ 5.

Ueber die Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit. Anwendung auf den Aether.

Es sei $[x, y, z]$ ein *absolut ruhendes* Axensystem. Ferner sei $D\tau(x, y, z)$ irgend ein *festes Raumelement* innerhalb einer homogenen incompressiblen Flüssigkeit. Endlich sei ϱ die constante Dichtigkeit dieser Flüssigkeit. Bezeichnet man nun den hydrostatischen Druck des augenblicklich in $D\tau$ enthaltenen Flüssigkeitselementes $\varrho D\tau$ mit p, ferner die augenblicklichen Geschwindigkeitscomponenten dieses Flüssigkeitselementes mit α, β, γ, so gelten bekanntlich, nach Euler, für die Bewegung der Flüssigkeit folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \tag{1.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\alpha}{dt} \varrho D\tau = X\varrho D\tau - \frac{\partial p}{\partial x} D\tau, \\ \frac{d\beta}{dt} \varrho D\tau = Y\varrho D\tau - \frac{\partial p}{\partial y} D\tau, \\ \frac{d\gamma}{dt} \varrho D\tau = Z\varrho D\tau - \frac{\partial p}{\partial z} D\tau, \end{array}\right. \tag{2.}$$

wo z. B. $\frac{d\alpha}{dt}$ die Bedeutung hat:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\gamma. \tag{2a.}$$

Dabei sind, abgesehen vom Drucke p, unter $X\varrho D\tau$, $Y\varrho D\tau$, $Z\varrho D\tau$ die Componenten *aller* ponderomotorischen Kräfte zu verstehen, die auf das Element $\varrho D\tau$ überhaupt einwirken. Diese Kräfte werden im Allgemeinen *theils Fernkräfte* sein, nämlich durch die Schwere (oder überhaupt durch Gravitation) entstehen; *anderntheils* aber herrühren von dem augenblicklichen *elektrischen und magnetischen Zustande* des betrachteten Flüssigkeitselementes $\varrho D\tau$. Demgemäss kann man setzen:

$$\left\{\begin{array}{l} X\varrho D\tau = \frac{\partial F}{\partial x} \varrho D\tau + \Xi_e D\tau + \Xi_m D\tau, \\ Y\varrho D\tau = \frac{\partial F}{\partial y} \varrho D\tau + \mathrm{H}_e D\tau + \mathrm{H}_m D\tau, \\ Z\varrho D\tau = \frac{\partial F}{\partial z} \varrho D\tau + \mathrm{Z}_e D\tau + \mathrm{Z}_m D\tau, \end{array}\right. \tag{3.}$$

wo F die Kräftefunction jener Fernkräfte vorstellt*), während Ξ_e, H_e, Z_e und Ξ_m, H_m, Z_m vom elektrischen und magnetischen Zustande des Elementes $\varrho D\tau$ herrühren. Demgemäss werden die Gleichungen (2.), falls man den Factor $D\tau$ fortlässt, die Gestalt erhalten:

$$(4.)\qquad \begin{cases} \varrho \frac{d\alpha}{dt} = \varrho \frac{\partial F}{\partial x} + \Xi_e + \Xi_m - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varrho \frac{d\beta}{dt} = \varrho \frac{\partial F}{\partial y} + \mathsf{H}_e + \mathsf{H}_m - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varrho \frac{d\gamma}{dt} = \varrho \frac{\partial F}{\partial z} + \mathsf{Z}_e + \mathsf{Z}_m - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Bezeichnet man den augenblicklichen elektrischen und magnetischen Zustand des Elementes $\varrho D\tau$ mit $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, so ist nach dem allgemeinen Satze Seite 396:

$$(5.)\qquad \Xi_e = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Y}}{8\pi\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{X}\mathfrak{Z}}{8\pi\varepsilon}\right),$$

$$(6.)\qquad \Xi_m = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{L}^2 - \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}^2}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{M}}{8\pi\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2\mathfrak{L}\mathfrak{N}}{8\pi\mu}\right),$$

wo ε und μ *gegebene Constanten* sind. Es bezeichnet nämlich ε den constanten Dielektricitätscoefficienten und μ den constanten Magnetisirungscoefficienten der betrachteten homogenen incompressiblen Flüssigkeit.

Aus (5.) folgt, falls man die partiellen Ableitungen nach x, y, z durch die Indices 1, 2, 3 andeutet, sofort:

$$\Xi_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[(\mathfrak{X}\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{Y}\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1) + (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{X}\mathfrak{Z}_3 + \mathfrak{X}_3\mathfrak{Z})],$$

oder besser geordnet:

$$(7.)\qquad \Xi_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\mathfrak{Y}(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_1) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Z}_1) + \mathfrak{X}(\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_3)].$$

Desgleichen ergiebt sich aus (6.):

$$(8.)\qquad \Xi_m = \frac{1}{4\pi\mu}[\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_1) + \mathfrak{N}(\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{N}_1) + \mathfrak{L}(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{N}_3)].$$

Diese Formeln (7.), (8.) gewinnen, mit Rücksicht auf Seite 371 (14.) und Seite 376 (15.), die einfachere Gestalt:

$$(9.)\qquad \Xi_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}[\mathfrak{Y}(\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_1) + \mathfrak{Z}(\mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Z}_1) + 4\pi\sigma\mathfrak{X}],$$

$$(10.)\qquad \Xi_m = \frac{1}{4\pi\mu}[\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_1) + \mathfrak{N}(\mathfrak{L}_3 - \mathfrak{N}_1)].$$

---

*) Ebenso wie die früher [in (2.) Seite 372] eingeführten elektromotorischen Kräfte X', Y', Z' als der eigentlichen Theorie *fremde* Kräfte bezeichnet wurden, ebenso wird Gleiches zu sagen sein von den durch die Kräftefunction F repräsentirten ponderomotorischen Kräften und auch von den durch p repräsentirten Druckkräften.

Nun sind ε, μ gegebene Constanten. Folglich ist nach (Γ.) Seite 400 und nach (A.) Seite 398:

$$\mathfrak{X}_2 - \mathfrak{Y}_1 = + A\varepsilon \frac{\Delta \mathfrak{N}}{dt}, \qquad \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{Z}_1 = - A\varepsilon \frac{\Delta \mathfrak{M}}{dt},$$

$$\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}_1 = - A\mu \left(\frac{\Delta \mathfrak{Z}}{dt} + 4\pi w\right), \quad \mathfrak{L}_3 - \mathfrak{N}_1 = + A\mu \left(\frac{\Delta \mathfrak{Y}}{dt} + 4\pi v\right),$$

wo u, v, w die im Element $D\tau$ augenblicklich vorhandenen elektrischen Strömungen vorstellen. Demgemäss gehen die Formeln (9.), (10.) über in:

$$\Xi_e = + \frac{A}{4\pi}\left[\mathfrak{Y}\frac{\Delta \mathfrak{N}}{dt} - \mathfrak{Z}\frac{\Delta \mathfrak{M}}{dt}\right] + \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathfrak{X}, \tag{11.}$$

$$\Xi_m = - \frac{A}{4\pi}\left[\mathfrak{M}\left(\frac{\Delta \mathfrak{Z}}{dt} + 4\pi w\right) - \mathfrak{N}\left(\frac{\Delta \mathfrak{Y}}{dt} + 4\pi v\right)\right]. \tag{12.}$$

Wir wollen jetzt annehmen, die gegebene Flüssigkeit sei ein Isolator. Alsdann wird $u = v = w = 0$, und σ ebenfalls $= 0$ [vgl. den Satz Seite 407]; so dass also die Formeln (11.), (12.) sich reduciren auf:

$$\Xi_e = + \frac{A}{4\pi}\left(\mathfrak{Y}\frac{\Delta \mathfrak{N}}{dt} - \mathfrak{Z}\frac{\Delta \mathfrak{M}}{dt}\right), \tag{13.}$$

$$\Xi_m = - \frac{A}{4\pi}\left(\mathfrak{M}\frac{\Delta \mathfrak{Z}}{dt} - \mathfrak{N}\frac{\Delta \mathfrak{Y}}{dt}\right). \tag{14.}$$

Nun ist nach Seite 368 (3.): $\frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - \frac{\delta^* \mathfrak{X}}{dt}$, oder, falls man hier für $\delta^*\mathfrak{X}$ den Werth (11.) Seite 370 substituirt:

$$\frac{\Delta \mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + (\mathfrak{X}_1\alpha + \mathfrak{X}_2\beta + \mathfrak{X}_3\gamma) - (\alpha_1\mathfrak{X} + \alpha_2\mathfrak{Y} + \alpha_3\mathfrak{Z}) + \mathfrak{X}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3).$$

Auch wird [nach dem Satz Seite 378] eine analoge Formel für $\mathfrak{L}$ gelten; so dass man also zur ersten Gleichung folgenden Systems gelangt:

$$\frac{\Delta \mathfrak{L}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + (\mathfrak{L}_1\alpha + \mathfrak{L}_2\beta + \mathfrak{L}_3\gamma) - (\alpha_1\mathfrak{L} + \alpha_2\mathfrak{M} + \alpha_3\mathfrak{N}) + \mathfrak{L}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + (\mathfrak{M}_1\alpha + \mathfrak{M}_2\beta + \mathfrak{M}_3\gamma) - (\beta_1\mathfrak{L} + \beta_2\mathfrak{M} + \beta_3\mathfrak{N}) + \mathfrak{M}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$

$$\frac{\Delta \mathfrak{N}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + (\mathfrak{N}_1\alpha + \mathfrak{N}_2\beta + \mathfrak{N}_3\gamma) - (\gamma_1\mathfrak{L} + \gamma_2\mathfrak{M} + \gamma_3\mathfrak{N}) + \mathfrak{N}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3),$$

dessen übrige Gleichungen in ähnlicher Weise zu erhalten sind. Substituirt man diese Werthe von $\Delta\mathfrak{N}$ und $\Delta\mathfrak{M}$ in der Formel (13.), so erhält man sofort:

$$\Xi_e = + \frac{A}{4\pi}\left\{\begin{array}{l} \left(\mathfrak{Y}\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} - \mathfrak{Z}\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\right) + [\alpha(\mathfrak{Y}\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{Z}\mathfrak{M}_1) + \text{etc.}] \\ + (\beta_1\mathfrak{L} + \beta_2\mathfrak{M} + \beta_3\mathfrak{N})\mathfrak{Z} - (\gamma_1\mathfrak{L} + \gamma_2\mathfrak{M} + \gamma_3\mathfrak{N})\mathfrak{Y} \\ + (\mathfrak{Y}\mathfrak{N} - \mathfrak{Z}\mathfrak{M})(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \end{array}\right\}, \tag{15.}$$

wo der in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck, vollständig hingeschrieben, folgendermassen lauten würde:

$$\alpha(\mathfrak{Y}\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{Z}\mathfrak{M}_1) + \beta(\mathfrak{Y}\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{Z}\mathfrak{M}_2) + \gamma(\mathfrak{Y}\mathfrak{N}_3 - \mathfrak{Z}\mathfrak{M}_3).$$

In analoger Art wird offenbar aus (14.) sich ergeben:

$$\text{(16.)} \quad \Xi_m = -\frac{A}{4\pi}\left\{\begin{array}{l} \left(\mathfrak{M}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - \mathfrak{N}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right) + [\alpha(\mathfrak{M}\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{N}\mathfrak{Y}_1) + \text{etc.}] \\ + (\beta_1\mathfrak{X} + \beta_2\mathfrak{Y} + \beta_3\mathfrak{Z})\mathfrak{N} - (\gamma_1\mathfrak{X} + \gamma_2\mathfrak{Y} + \gamma_3\mathfrak{Z})\mathfrak{M} \\ + (\mathfrak{M}\mathfrak{Z} - \mathfrak{N}\mathfrak{Y})(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \end{array}\right\},$$

der Art, dass die in (15.) und (16.) in den geschweiften Klammern enthaltenen Ausdrücke in einander übergehen durch Vertauschung von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

Addirt man jetzt die beiden Formeln (15.), (16.), und bedient man sich dabei der Abkürzungen:

$$\text{(17.)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \mathfrak{Y}\mathfrak{N} - \mathfrak{Z}\mathfrak{M}, \\ \mathfrak{Q} &= \mathfrak{Z}\mathfrak{L} - \mathfrak{X}\mathfrak{N}, \\ \mathfrak{R} &= \mathfrak{X}\mathfrak{M} - \mathfrak{Y}\mathfrak{L}, \end{aligned}$$

so gelangt man sofort zu folgender Gleichung:

$$\text{(18.)} \quad \Xi_e + \Xi_m = \frac{A}{4\pi}\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + [\alpha\mathfrak{P}_1 + \beta\mathfrak{P}_2 + \gamma\mathfrak{P}_3] \\ + (\beta_1\mathfrak{Q} - \beta_2\mathfrak{P}) + (\gamma_1\mathfrak{R} - \gamma_3\mathfrak{P}) \\ + 2\mathfrak{P}(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) \end{array}\right\}.$$

Der hier in den geschweiften Klammern enthaltene Ausdruck ist offenbar auch so darstellbar:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + (\alpha\mathfrak{P}_1 + \beta\mathfrak{P}_2 + \gamma\mathfrak{P}_3) + (\alpha_1\mathfrak{P} + \beta_1\mathfrak{Q} + \gamma_1\mathfrak{R}) + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\mathfrak{P},$$

oder auch so:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \beta(\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{Q}_1) + \gamma(\mathfrak{P}_3 - \mathfrak{R}_1) + (\alpha\mathfrak{P} + \beta\mathfrak{Q} + \gamma\mathfrak{R})_1 + (\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3)\mathfrak{P};$$

so dass also die Formel (18.) übergeht in:

$$\text{(19.)} \quad \Xi_e + \Xi_m = \frac{A}{4\pi}\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \beta\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}\right) \\ + \frac{\partial(\alpha\mathfrak{P} + \beta\mathfrak{Q} + \gamma\mathfrak{R})}{\partial x} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)\mathfrak{P} \end{array}\right\}.$$

Substituirt man dies in der ersten Formel des Systems (4.), so erhält man mit Rücksicht auf (1.):



$$(20.)\quad \varrho\frac{d\alpha}{dt}=\varrho\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{A}{4\pi}\Big[\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}+\beta\Big(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}\Big)+\gamma\Big(\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}\Big)\Big]$$
$$+\frac{A}{4\pi}\frac{\partial(\alpha\mathfrak{P}+\beta\mathfrak{Q}+\gamma\mathfrak{R})}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Resultat:

Satz. — *Eine gegebene isolirende und incompressible homogene Flüssigkeit sei in Bewegung begriffen unter dem Einfluss ihres hydrostatischen Druckes p, ferner unter der Einwirkung irgend welcher Fernkräfte, deren Kräftefunction F heissen mag, und endlich unter der Einwirkung derjenigen ponderomotorischen Kräfte, welche vom augenblicklichen elektrischen und magnetischen Zustand der Flüssigkeit herrühren.*

Die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeit und ihre elektrischen und magnetischen Zustandscomponenten mögen im Augenblick t für die Stelle (x, y, z) mit α, β, γ, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ bezeichnet sein. Ferner mag gesetzt werden [*vgl.* (17.)]:

$$(21.)\quad \begin{cases}\mathfrak{P}=\mathfrak{Y}\mathfrak{N}-\mathfrak{Z}\mathfrak{M},\\ \mathfrak{Q}=\mathfrak{Z}\mathfrak{L}-\mathfrak{X}\mathfrak{N},\\ \mathfrak{R}=\mathfrak{X}\mathfrak{M}-\mathfrak{Y}\mathfrak{L},\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathfrak{F}=\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial y},\\ \mathfrak{G}=\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z},\\ \mathfrak{H}=\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x},\end{cases}$$

und überdies:

$$(22.)\quad P=A(\alpha\mathfrak{P}+\beta\mathfrak{Q}+\gamma\mathfrak{R})+4\pi(\varrho F-p),$$

wo ϱ die constante Dichtigkeit der gegebenen Flüssigkeit vorstellt. Alsdann werden die Differentialgleichungen für die Bewegung der Flüssigkeit folgendermassen lauten:

$$(23.)\quad 0=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z},$$

$$(24.)\quad \begin{cases}4\pi\varrho\frac{d\alpha}{dt}=A\Big[\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}+\beta\mathfrak{H}-\gamma\mathfrak{G}\Big]+\frac{\partial P}{\partial x},\\ 4\pi\varrho\frac{d\beta}{dt}=A\Big[\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}+\gamma\mathfrak{F}-\alpha\mathfrak{H}\Big]+\frac{\partial P}{\partial y},\\ 4\pi\varrho\frac{d\gamma}{dt}=A\Big[\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial t}+\alpha\mathfrak{G}-\beta\mathfrak{F}\Big]+\frac{\partial P}{\partial z},\end{cases}$$

wo $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ die in (2a.) *angegebenen Bedeutungen haben.*

Betrachtet man mit Helmholtz [Wiss. Abh., Bd. 3, Seite 527] den *reinen Aether* als *incompressibel*, so werden die Gleichungen (23.), (24.) ohne Weiteres anwendbar sein auf die Bewegung des reinen Aethers. Dabei entsteht die Frage, ob der Aether *Beharrungsvermögen* habe.



Schreibt man dem Aether Beharrungsvermögen zu, so lauten die Differentialgleichungen für die Bewegung des reinen Aethers genau ebenso, wie in (23.), (24.) angegeben ist.

Betrachtet man hingegen mit Helmholtz [a. a. O. Seite 527] den Aether als eine Materie, die *ganz ohne* Beharrungsvermögen ist, so werden die Differentialgleichungen für die Bewegung des Aethers, wie man leicht übersieht, folgendermassen lauten:

$$(25.)\qquad 0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

$$(26.)\qquad \begin{cases} 0 = A\left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \beta\mathfrak{H} - \gamma\mathfrak{G}\right] + \frac{\partial P}{\partial x}, \\ 0 = A\left[\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} + \gamma\mathfrak{F} - \alpha\mathfrak{H}\right] + \frac{\partial P}{\partial y}, \\ 0 = A\left[\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + \alpha\mathfrak{G} - \beta\mathfrak{F}\right] + \frac{\partial P}{\partial z}. \end{cases}$$

Und diese Gleichungen (25.), (26.), *in denen* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *die Bedeutungen* (21.) *besitzen, sind in der That identisch mit den von Helmholtz aufgestellten Formeln* [a. a. O. Seite 533].

Aus diesen Gleichungen (25.), (26.) folgert nun Helmholtz mit vollem Recht, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll, dass der Aether an der Grenze der ponderablen Körper diesen Körpern nicht unverrückbar anhaften könne, sondern unter Umständen längs der Grenzfläche *gleiten* müsse. Helmholtz fügt hinzu: Fasse man solche Gleitungen als einen sehr jähen Uebergang zwischen verschiedenen Werthen tangentialer Geschwindigkeiten auf, so müssten in der Grenzschicht noch dementsprechende elektrische und magnetische Kräfte entstehen können, mit entsprechend jähen Unterschieden der tangentialen Componenten [a. a. O. Seite 535].

Es liegt mir sehr fern, auf die Frage, ob der Aether Beharrungsvermögen besitzt oder nicht, hier irgendwie eingehen zu wollen. Nur möchte ich bemerken, dass jene Helmholtz'schen Folgerungen über das Gleiten des Aethers an der Grenze ponderabler Körper gänzlich fortfallen werden, sobald man (wie bisher üblich war) dem Aether Beharrungsvermögen zuschreibt. Denn alsdann werden für die Bewegung des Aethers nicht die Helmholtz'schen Gleichungen (25.), (26.), sondern jene ursprünglichen Gleichungen (23.), (24.) gelten.

Anhang.

Ergänzungen und nachträgliche Bemerkungen.

§ 1.

Zu den Helmholtz'schen Dilatationsuntersuchungen.

Die bei jenen Untersuchungen erhaltenen Sätze Seite 281 mögen hier, um sie einer gewissen Controle zu unterwerfen, auf einen speciellen Fall in Anwendung gebracht werden.

(1.) *Der Inducent M_1 sei nämlich dargestellt durch einen starren linearen Ring, der von einem elektrischen Strome durchflossen sein soll, dessen Stärke J_1 eine blosse Function der Zeit ist. Auch mag das Coordinatensystem $[x, y, z]$ mit diesem Ringe M_1 starr verbunden gedacht werden.*

Im Uebrigen mögen die Vorstellungen und ebenso auch die Bezeichnungen genau dieselben bleiben, wie in den dortigen Sätzen Seite 281. So z. B. sollen $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ die Componenten derjenigen elektromotorischen Kraft sein, welche der soeben genannte Inducent M_1 in irgend einem Punkte (x, y, z) des inducirten Körpers M hervorbringt. Alsdann wird $(\mathfrak{X})$ zufolge jener Sätze [vgl. (53.) Seite 282] den Werth haben:

$$(\mathfrak{X}) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + A^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \beta + \frac{\partial W}{\partial x} \gamma \right) - \frac{dU}{dt} \right], \tag{2.}$$

wo α, β, γ die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes (x, y, z) vorstellen, während U, V, W die Bedeutungen haben:

$$U = \int \frac{u_1 D\tau_1}{r}, \quad V = \int \frac{v_1 D\tau_1}{r}, \quad W = \int \frac{w_1 D\tau_1}{r}. \tag{3.}$$

Auch haben wir damals gesehen, dass speciell für *starre* Körper, die Function λ folgenden Werth haben muss [vgl. (82.) Seite 287]:

$$\lambda = A^2 \int \left\{ \left(\frac{x - x_1}{r} \frac{du_1}{dt} + \cdots \right) - \frac{1}{r} \left(u_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots \right) \right\} D\tau_1. \tag{4.}$$

Bei der hier zu betrachtenden Sachlage (1.) ist nun offenbar:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = \frac{dz_1}{dt} = 0,$$

und ferner [vgl. (12.) Seite 66]:

$$u_1 D\tau_1 = J_1 Dx_1, \quad \text{mithin:} \ \frac{du_1}{dt} D\tau_1 = \frac{dJ_1}{dt} Dx_1;$$

so dass also die Formeln (3.), (4.) folgende Gestalt erhalten:

$$(5.) \qquad U = J_1 \int \frac{Dx_1}{r}, \quad V = J_1 \int \frac{Dy_1}{r}, \quad W = J_1 \int \frac{Dz_1}{r},$$

$$(6.) \qquad \lambda = A^2 \frac{dJ_1}{dt} \int \left(\frac{x - x_1}{r} Dx_1 + \frac{y - y_1}{r} Dy_1 + \frac{z - z_1}{r} Dz_1 \right).$$

Aus der letzten Formel (6.) ergiebt sich aber, mittelst des Stokes'schen Theorems [(C.) Seite 5] sofort:

$$(7.) \qquad \lambda = 0.$$

Demgemäss reducirt sich die Formel (2.) auf:

$$(8.) \qquad (\mathfrak{X}) = A^2 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V}{\partial x} \beta + \frac{\partial W}{\partial x} \gamma \right) - \frac{dU}{dt} \right].$$

Dieses Resultat (8.) ist aber *in voller Uebereinstimmung* mit der von uns auf einem ganz anderen Wege gefundenen Formel (14.) Seite 315. Denn es ist zu beachten, dass die Grössen U, V, W (5.) identisch sind mit den Grössen F, G, H (15.) Seite 315. Auch ist, was die damalige Bezeichnungsweise betrifft, auf Seite 316 der Uebergang von (δ.) zu (ε.) zu beachten.

In dieser Uebereinstimmung liegt nichts Unerwartetes. Vielmehr ist dieselbe nur anzusehen als eine gelegentliche Controle der Richtigkeit unserer Rechnungen.

§ 2.

Ueber die Variation der Geschwindigkeiten, unter Zugrundelegung der Euler'schen Vorstellungsweise.

Es handelt sich hier um den früher auf Seite 352 aufgestellten Satz. Wenn damals, bei der Ableitung jenes nur allein die *Euler*'sche Vorstellungsweise betreffenden Satzes, eine ganz *andre* Vorstellungsweise, nämlich die sogenannte *Lagrange*'sche Anschauungsweise mithineingezogen wurde, — so ist das offenbar ein grosser Umweg. Es soll gegenwärtig versucht werden, jenen Satz, ohne einen solchen Umweg, ganz direct zu beweisen.

Die Geschwindigkeiten α, β, γ seien *im Euler'schen Sinne* gegeben als Functionen der Coordinaten und der Zeit:

$$(1.) \quad \alpha = \alpha(x, y, z, t), \quad \beta = \beta(x, y, z, t), \quad \gamma = \gamma(x, y, z, t).$$

Neben der *wirklichen* Bewegung denken wir uns eine von dieser nur unendlich wenig verschiedene *fingirte* Bewegung, und bezeichnen die Coordinaten, welche ein und derselbe Massenpunkt bei der wirklichen

und bei der fingirten Bewegung in irgend einem Augenblick t besitzt, respective mit x, y, z und mit $x + \mathfrak{d}x,\ y + \mathfrak{d}y,\ z + \mathfrak{d}z$; so dass also $\mathfrak{d}x, \mathfrak{d}y, \mathfrak{d}z$ die sogenannten Variationen vorstellen. Diese Variationen denken wir uns ebenfalls *im Euler'schen Sinne* gegeben als Functionen der Coordinaten und der Zeit:

$$(2.)\quad \mathfrak{d}x = f(x, y, z, t), \qquad \mathfrak{d}y = g(x, y, z, t), \qquad \mathfrak{d}z = h(x, y, z, t);$$

so dass also f, g, h unendlich kleine Functionen vorstellen, deren höhere Dimensionen fortzulassen sind.

Auf Grund der gegebenen Functionen (1.) wird man nun die Coordinaten eines Massenpunktes in zwei aufeinander folgenden Augenblicken t und $t + dt$ anzugeben im Stande sein für die *wirkliche* Bewegung. Sodann aber wird man, auf Grund der Functionen (2.), die Coordinaten dieses selben Massenpunktes in jenen beiden Augenblicken t und $t + dt$ auch anzugeben im Stande sein für die *fingirte* Bewegung. Hieraus ergiebt sich alsdann aber sofort auch die bei dieser fingirten Bewegung vom Punkte während der Zeit dt durchlaufene *Weglänge*, mithin auch die betreffende *Geschwindigkeit*.

Kurz man sieht, dass man auf Grund der Functionen (1.), (2.) die Geschwindigkeiten nicht nur für die wirkliche, sondern auch für die fingirte Bewegung anzugeben vermag. Solches aber ausgeführt gedacht, wird man durch Subtraction die *Unterschiede* dieser beiderlei Geschwindigkeiten, d. i. die sogenannten *Variationen* der Geschwindigkeiten, berechnen können. Nach diesem Plane soll im Folgenden verfahren werden.

Bezeichnet man die räumlichen Lagen ein und desselben Massenpunktes in den Augenblicken $t, t + dt$ bei der wirklichen und bei der fingirten Bewegung respective mit p, q und p', q', so werden die Coordinaten dieser Raumpunkte p, q, p', q' auf Grund der Formeln (1.), (2.) sofort angebbar sein. In der That gelangt man, falls x, y, z die Coordinaten des Raumpunktes p vorstellen, zu folgender Tabelle:

$$(3.)\quad p): x, y, z, \qquad q): x + \alpha dt, \quad y + \beta dt, \quad z + \gamma dt,$$

$$(4.)\quad p'): x + f(x, y, z, t), \quad q'): x + \alpha dt + f(x + \alpha dt, y + \beta dt, z + \gamma dt, t + dt),$$

wo, der Kürze willen, für p' und q' nur allein die x-Coordinaten angegeben sind. Die Ausdrücke (4.) sind offenbar auch so darstellbar:

$$(5.)\quad p'): x + f, \qquad q'): x + f + \left(\alpha + \frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma + \frac{\partial f}{\partial t}\right) dt;$$

zur Abkürzung mag nämlich gesetzt sein:

$$(\alpha.)\quad f = f(x, y, z, t), \qquad g = g(x, y, z, t), \qquad h = h(x, y, z, t).$$

Wir wollen jetzt die Formeln (5.) einer gewissen Transformation unterwerfen, indem wir dabei einige neue Grössen x', y', z', α', β', γ', f', g', h' einführen, die folgende Bedeutungen haben sollen:

$$(\beta.) \qquad x' = x + f, \quad y' = y + g, \quad z' = z + h,$$

$$(\gamma.) \quad \alpha' = \alpha(x', y', z', t), \quad \beta' = \beta(x', y', z', t), \quad \gamma' = \gamma(x', y', z', t),$$

$$(\delta.) \quad f' = f(x', y', z', t), \quad g' = g(x', y', z', t), \quad h' = h(x', y', z', t).$$

Die identische Gleichung:

$$\alpha(x, y, z, t) = \alpha(x' + x - x', \quad y' + y - y', \quad z' + z - z', \quad t)$$

ist nach (β.) offenbar auch so darstellbar:

$$\alpha(x, y, z, t) = \alpha(x' - f, \quad y' - g, \quad z' - h, \quad t),$$

und kann daher, unter Anwendung der in (1.) und (γ.) angegebenen Bezeichnungen, auch so geschrieben werden:

$$(\varepsilon.) \qquad \alpha = \alpha' - \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x'} f + \frac{\partial \alpha'}{\partial y'} g + \frac{\partial \alpha'}{\partial z'} h\right).$$

Analoge Formeln gelten offenbar für β, γ, und ebenso auch für f, g, h. So z. B. wird man erhalten:

$$f = f' - \left(\frac{\partial f'}{\partial x'} f + \frac{\partial f'}{\partial y'} g + \frac{\partial f'}{\partial z'} h\right).$$

Die höheren Dimensionen von f, g, h, f', g', h' sind aber fortzulassen. Und hiedurch reducirt sich die letzte Formel auf

$$(\zeta.) \qquad f = f'. \quad \text{Ebenso wird: } g = g', \quad h = h'.$$

Aus (ζ.) folgt nun weiter:

$$(\zeta\zeta.) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x}.$$

Nun ist nach (α.), (β.): $x' = x + f(x, y, z, t)$. Und hieraus ergiebt sich, falls man bei ein und demselben Augenblick t bleibt, die Differentialformel:

$$dx' = \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad \text{Ebenso wird:}$$

$$dy' = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz,$$

$$dz' = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \left(1 + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dz.$$

Demgemäss geht die Gleichung ($\zeta\zeta$.) über in:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'}\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Die höheren Dimensionen von f, g, h, f', g', h' sind aber fortzulassen. Somit folgt:

(η.) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x'}$. Ebenso wird $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial z'}$;

und analoge Formeln werden offenbar gelten für die Ableitungen von g und h. — Noch sei bemerkt, dass die Formel (ε.) mit Rücksicht auf (ζ.) auch so darstellbar ist:

$$(\vartheta.) \qquad \alpha = \alpha' - \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x'} f' + \frac{\partial \alpha'}{\partial y'} g' + \frac{\partial \alpha'}{\partial z'} h'\right).$$

Unter Anwendung der Gleichungen (β.) und (ζ.), (η.), (ϑ.), und unter abermaliger Fortlassung der höheren Dimensionen von f, g, h, f', g', h', gewinnen jetzt die Ausdrücke (5.) folgende Gestalt:

$$(6.) \quad p'):\ x', \qquad q'):\ x' + \left[\alpha' - \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x'} f' + \frac{\partial \alpha'}{\partial y'} g' + \frac{\partial \alpha'}{\partial z'} h'\right)\right] dt$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial f'}{\partial x'} \alpha' + \frac{\partial f'}{\partial y'} \beta' + \frac{\partial f'}{\partial z'} \gamma'\right) + \frac{\partial f'}{\partial t}\right] dt.$$

Diese Ausdrücke (6.) repräsentiren die Coordinaten, welche ein und derselbe Massenpunkt bei der fingirten Bewegung in den Augenblicken t und $t + dt$ besitzt; dabei sind seine Coordinaten im Augenblick t mit x', y', z' bezeichnet. Auf die Buchstaben kommt es aber nicht an. Man kann also, falls es beliebt, die Coordinaten des Massenpunktes im Augenblick t mit irgend welchen andern Buchstaben, z. B. mit x, y, z bezeichnen. Alsdann aber gestalten sich die Ausdrücke (6.) folgendermassen:

$$(7.) \quad p'):\ x, \qquad q'):\ x + \left[\alpha - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} f + \frac{\partial \alpha}{\partial y} g + \frac{\partial \alpha}{\partial z} h\right)\right] dt$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma\right) + \frac{\partial f}{\partial t}\right] dt.$$

Fasst man jetzt gleichzeitig die Ausdrücke (3.) und (7.) ins Auge, so gelangt man zu folgendem Satz:

Sind x, y, z die Coordinaten irgend eines Massenpunktes im Augenblick t, so wird dieser selbe Massenpunkt im Augenblick $t + dt$, je nachdem man ihn inzwischen der *wirklichen* oder der *fingirten* Bewegung überlässt, entweder die [in (3.) angegebene] x-Coordinate:

$$x + \alpha\, dt,$$

oder aber die [in (7.) angegebene] x-Coordinate:

$$x + \left[\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma\right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} f + \frac{\partial \alpha}{\partial y} g + \frac{\partial \alpha}{\partial z} h\right)\right] dt$$

besitzen. Oder mit andern Worten: Es wird dieser Massenpunkt, je nachdem man ihn der *wirklichen*, oder der *fingirten* Bewegung überlässt, entweder die Geschwindigkeitscomponente:

$$\alpha,$$

oder aber die Geschwindigkeitscomponente:

$$\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}f + \frac{\partial \alpha}{\partial y}g + \frac{\partial \alpha}{\partial z}h\right)$$

besitzen. Der Unterschied dieser beiden Werthe ist aber offenbar nichts Andres als die sogenannte Variation von α. Bezeichnet man also diese Variation mit $\mathfrak{d}\alpha$, so ergiebt sich:

$$(8.) \quad \mathfrak{d}\alpha = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma\right) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}f + \frac{\partial \alpha}{\partial y}g + \frac{\partial \alpha}{\partial z}h\right).$$

Substituirt man endlich hier für f, g, h ihre eigentlichen in (2.) angegebenen Bedeutungen $\mathfrak{d}x$, $\mathfrak{d}y$, $\mathfrak{d}z$, so erhält man den zu beweisenden Satz, nämlich die erste der Formeln (21.) Seite 353. — *Q. e. d.*

Dies ist offenbar der eigentlich sachgemässe *directe* Weg zur Ableitung jenes Satzes. Uebrigens dürfte auch der früher [Seite 347—353] eingeschlagene *indirecte* Weg völlig correct sein. Die Correctheit jenes damals eingeschlagenen *indirecten* Weges verdanke ich gewissen Einwendungen meines Collegen *A. Mayer*, nämlich gewissen kleinen aber doch höchst wichtigen Abänderungen, die ich, auf Grund jener Einwendungen, in dem betreffenden Druckbogen noch vor seinem Abzuge auszuführen im Stande war.

§ 3.

Ueber das Weber'sche Gesetz.

Bei den elektrischen Erscheinungen kommen offenbar, falls man an der gewöhnlichen Vorstellung der Fernwirkungen festhalten will, im Ganzen *dreierlei* Wirkungen in Betracht, nämlich erstens die Wirkung der elektrischen Materie auf sich selber, zweitens die Wirkung der elektrischen Materie auf die nichtelektrische Materie, und drittens endlich die Wirkung der nichtelektrischen Materie auf sich selber. Dabei dürfte unter der nichtelektrischen Materie sowohl die ponderable Materie wie auch der Aether zu verstehen sein. Ein Gesetz, welches den *letzten Grund* der elektrischen Erscheinungen darzulegen, und diese Erscheinungen *vollständig* zu erklären beansprucht, müsste daher Rechenschaft geben über alle *drei* Wirkungen.

Das Weber'sche Gesetz bezieht sich aber nur allein auf die *erste* dieser drei Wirkungen, und kann daher einen solchen Anspruch *nicht* erheben. Kurz, das Weber'sche Gesetz ist, an und für sich, ein *unvollständiges*, welches zu seiner Ergänzung noch irgend welcher accessorischer Annahmen bedarf.

Hiemit hängt zusammen, dass das Weber'sche Gesetz *für sich allein* wohl schwerlich irgend eine Folgerung geben dürfte, die mit der

Erfahrung oder Beobachtung confrontirt werden kann. Denn will man z. B. dieses Gesetz benutzen, um Auskunft zu erhalten über die ponderomotorischen Wirkungen, so bedarf es dazu einer accessorischen Annahme über die Art und Weise, wie die auf die elektrische Materie ausgeübten Kräfte auf die ponderable Materie sich übertragen. U. s. w. [Vgl. C. Neumann, Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874, Seite 100].

Gesetzt nun aber, man gelangt auf Grund des Weber'schen Gesetzes, verbunden mit solchen accessorischen Annahmen, zu einem unbefriedigenden Resultat, z. B. zu einem Widerspruch mit der Erfahrung, so wird es immer zweifelhaft sein, ob die Schuld dem Weber'schen Gesetz oder aber jenen accessorischen Annahmen aufzubürden sei. Das Weber'sche Gesetz dürfte daher, eben in Folge seiner Unvollständigkeit, ziemlich *unangreifbar* sein.

Jedenfalls wird es sich bei einem näheren Eingehen auf das Weber'sche Gesetz in erster Linie um die Aufgabe handeln, diejenigen accessorischen Annahmen zu finden, welche zur Vervollständigung dieses Gesetzes erforderlich sind, und durch welche dasselbe mit den beobachteten Erscheinungen in Einklang kommt. Nach dieser Richtung hin sind von mir im Laufe der letzten Jahrzehnte verschiedene Versuche angestellt worden (dualistische und unitarische Vorstellungsweise), ohne dass es mir dabei gelungen wäre, zu einem wirklich befriedigenden Resultat zu gelangen. Demgemäss habe ich mein im ersten Theil dieses Werkes aufgestelltes Programm geändert, und hier im zweiten Theil nicht (wie es damals meine Absicht war) das Weber'sche Gesetz, sondern die Helmholtz'schen Arbeiten zum Gegenstande meines Studiums gemacht. Hiedurch findet auch der Umstand seine Erklärung, dass das Titelblatt dieses zweiten Theiles mit dem des ersten Theiles nicht vollständig harmonirt.

Wie man übrigens in Betreff des Weber'schen Gesetzes auch denken mag, Niemand wird verkennen, dass wir demselben grosse Anregungen und wesentliche Fortschritte verdanken. Zu diesen Fortschritten rechne ich namentlich die Ausdehnung des Princips der lebendigen Kraft und des Hamilton'schen Princips auf solche Fälle, in denen das Potential nicht blos von den Coordinaten, sondern zugleich auch von den Geschwindigkeiten abhängt. [Vgl. C. Neumann: Allg. Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen, Leipzig bei Teubner, 1896, daselbst Seite 222—238]. Auch dürften nach meiner Ansicht die durch das Weber'sche Gesetz dargebotenen Perspectiven früher oder später von Neuem aufzunehmen und weiter zu verfolgen sein.

Ende des Werkes.



